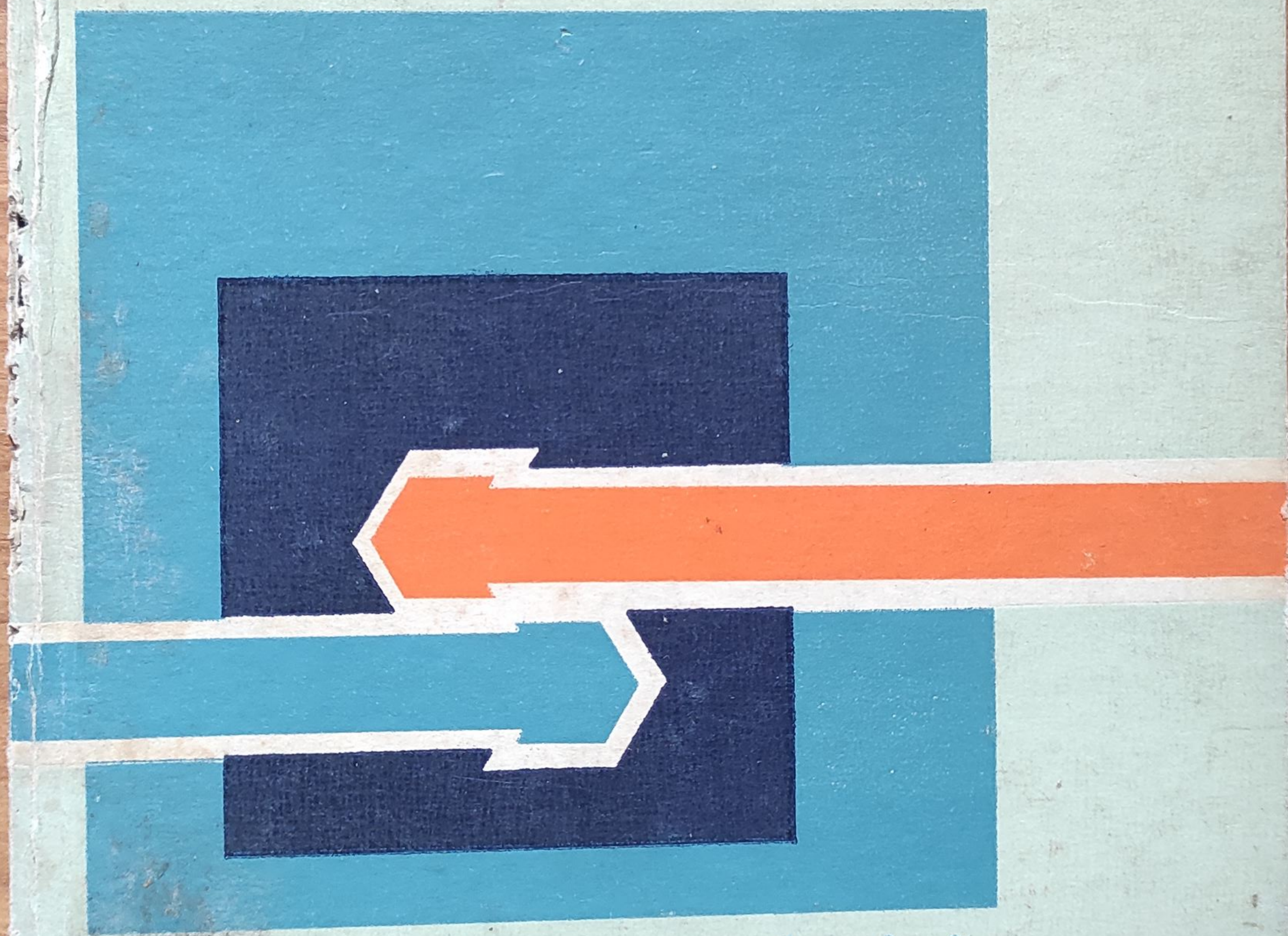


I. Ința  
S. Dumitru

SCAN



# Complemente de fizică



Editura tehnică



Ioan INȚA

Spiridon DUMITRU

# Complemente de fizică I

Editura tehnică

București





## PREFAȚĂ

*Progresele înregistrate de fizică în ultimele decenii au făcut ca în prezent această știință să fie implicată în cele mai diverse domenii ale cunoașterii și practicii umane.*

*Pentru omul modern, cunoașterea fizicii a ajuns să constituie o condiție educațională de vitală însemnătate a capacității sale de a se înscrie în mod armonios și creator într-o natură și o societate marcate din ce în ce mai profund de virtuțile și riscurile tehnicii. Ea este o cerință elementară, atât pentru cei cărora le revin funcții de control, cât și pentru cei ce trăiesc și muncesc, pur și simplu, într-un univers a cărui umanizare accelerată dezvăluie mereu noi rezerve pentru o viață mai bună, trezind, totodată, și unele reacții adverse în domeniul resurselor de materii prime și energie și al calității mediului înconjurător.*

*În acest context, devine evidentă necesitatea de a pune la îndemâna celui mai larg public cărți în care cunoștințele de fizică să fie prezentate în mod sistematic, riguros și, totodată, accesibil. Acestor cerințe autorii cărții de față, în care recunosc cu plăcere pe foștii mei studenți I. Ința și S. Dumitru, s-au străduit să le răspundă printr-o contribuție de calitate. Cartea este concepută astfel încât să poată cuprinde pe un spațiu relativ restrâns capitolele de bază ale fizicii într-o formă lesne de asimilat. Volumul de față cuprinde mecanica clasică, teoria relativității, termodinamica, fizica statistică, electromagnetismul și optica.*

*Autorii au optat pentru o organizare deductivă a sistemului de cunoștințe, construind expunerea de la principii spre consecințe și de la general spre particular. Prin aceasta ei nu au neglijat deloc latura experimentală a fizicii,*



concentrându-se însă pe reliefarea semnificațiilor experimentelor și nu pe infrastructura lor tehnică detaliată. Mai mult, s-a încercat o selecție cât mai restrânsă a experimentelor revelatoare pentru știința fizicii.

Acest mod de a releva baza experimentală a fizicii în contextul unei expuneri deductive asigură cărții un profil echilibrat, corespunzător preferințelor didactice actuale. Aparatul matematic folosit implică cunoștințe de analiză matematică, algebră și analiză vectorială care sînt astăzi, de regulă, la îndemîna unei largi clase de cititori. Văzută în ansamblu, cartea se conturează ca un cadru de informație științifică strict necesară, pe care pot fi racordate, după dorință, dezvoltări în direcția diverselor aplicații ale fizicii sau adînciri în direcția fundamentelor acesteia.

Cu aceste calități, cartea este deschisă lecturii unui public larg. Ea se va dovedi utilă celor care, avînd ca preocupare diversele aplicații practice ale fizicii, doresc să-și însușească, cu un efort moderat, un ansamblu sistematizat și coerent de cunoștințe fundamentale de fizică. Ea poate constitui un compendiu operativ și o sursă de sugestii și pentru cadrele didactice care predau fizica în învățămîntul tehnic superior sau în licee. Studenții facultăților tehnice, de chimie și fizică vor avea, la rîndul lor, la îndemînă, o lucrare complementară manualelor și cursurilor universitare, alcătuită de doi buni cunoscători ai necesităților și profilului de muncă al studentului, a căror temeinică experiență este pe măsura pasiunii și devotamentului cu care s-au dedicat învățămîntului și cercetării de fizică.

Acad. prof. ION URSU



## CUPRINS

Capitolul I. ELEMENTE DE MECANICĂ A SISTEMELOR CU UN NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE	7
1.1. Spațiu, timp, sisteme de referință	7
1.2. Elemente de mecanică newtoniană a particulelor și sistemelor de particule.	11
1.3. Legături și coordonate generalizate	28
1.4. Ecuațiile Lagrange.	31
1.5. Ecuațiile Hamilton și parantezele Poisson	38
1.6. Principiul minimei acțiuni	43
1.7. Oscilații liniare	49
1.8. Mișcarea particulelor în câmpuri de forțe centrale.	62
1.9. Elemente de mecanica corpurilor de masă variabilă.	69
Capitolul II. ELEMENTE DE MECANICA MEDIILOR CONTINUE	73
2.1. Introducere	73
2.2. Ecuația de continuitate	76
2.3. Forțele care acționează în mediile continue	76
2.4. Ecuațiile de mișcare ale mediilor continue	79
2.5. Propagarea mișcărilor mecanice în fluide ideale; unde acustice	85
2.6. Caracteristici ale undelor acustice	91
Capitolul III. ELEMENTE DE TEORIA RELATIVITĂȚII	98
3.1. Introducere	98
3.2. Transformarea coordonatelor, vitezelor și accelerațiilor în relativitatea clasică	100
3.3. Forma ecuațiilor mecanicii clasice în raport cu diferite sisteme de referință	104
3.4. Postulatele teoriei relativității restrânse și transformările Lorentz	107
3.5. Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz	112
3.6. Elemente de dinamică relativistă	116
3.7. Formularea cvadridimensională a teoriei relativității restrânse	122
Capitolul IV. ELEMENTE DE TERMODINAMICĂ	127
4.1. Mișcarea termică și sisteme termodinamice	127
4.2. Conceptele și principiile termodinamicii stărilor și proceselor de echilibru	130
4.3. Ecuații de stare, funcții termodinamice și coeficienți termodinamici	138
4.4. Termodinamica sistemelor cu cantitate variabilă de substanță	143



4.5. Termodinamica corpurilor elastice . . . . .	146
4.6. Elemente de termodinamica proceselor ireversibile . . . . .	151
Capitolul V. ELEMENTE DE FIZICĂ STATISTICĂ . . . . .	158
5.1. Descrierea statistică a sistemelor termodinamice . . . . .	158
5.2. Distribuția canonică . . . . .	162
5.3. Descrierea statistică a gazului ideal . . . . .	170
5.4. Teoria Dulong-Petit a căldurilor specifice a solidelor ideale . . . . .	178
5.5. Elemente de teoria fluctuațiilor . . . . .	180
Capitolul VI. ELEMENTE DE ELECTROMAGNETISM . . . . .	187
6.1. Sarcini electrice și câmp electromagnetic . . . . .	187
6.2. Ecuațiile Maxwell-Lorentz . . . . .	191
6.3. Energia, impulsul și momentul cinetic al câmpului electromagnetic . . . . .	201
6.4. Potențialele câmpului electromagnetic . . . . .	206
6.5. Unele aspecte relativiste ale electromagnetismului . . . . .	210
6.6. Câmpul electromagnetic în regim static (electrostatica) . . . . .	216
6.7. Regimul staționar al câmpului electromagnetic (electrocinetica) . . . . .	256
6.8. Regimul staționar al câmpului electromagnetic (magnetostatica) . . . . .	273
6.9. Câmpul electromagnetic în regim cvasistaționar . . . . .	303
6.10. Câmpul electromagnetic în regim variabil. Unde electromagnetice . . . . .	311
6.11. Plasma și fenomene electromagnetice în plasmă . . . . .	331
Capitolul VII. ELEMENTE DE OPTICĂ . . . . .	342
7.1. Introducere . . . . .	342
7.2. Caracteristici energetice ale radiațiilor luminoase. Fotometrie și măsurători fotometrice . . . . .	343
7.3. Interferența luminii . . . . .	354
7.4. Difrakția luminii. . . . .	370
7.5. Dispersia luminii . . . . .	384
7.6. Absorbția și difuzia luminii. . . . .	390
7.7. Polarizarea luminii. . . . .	392
7.8. Elemente de optică geometrică . . . . .	402
Bibliografie . . . . .	415



## Elemente de mecanică a sistemelor cu un număr finit de grade de libertate

### § 1.1. SPAȚIU, TIMP, SISTEME DE REFERINȚĂ

Toate fenomenele fizice se desfășoară în *spațiu* și *timp*. În accepțiunea generală, filozofică, spațiul și timpul sînt forme fundamentale ale existenței lumii materiale. Într-o astfel de viziune spațiul caracterizează întinderea, poziția reciprocă, iar timpul se referă la durată, coexistența și succesiunea obiectelor și fenomenelor realității obiective. Privite prin prisma particulară a fizicii, spațiul și timpul caracterizează obiectele și fenomenele fizice. De aceea, proprietățile fizice ale spațiului și timpului se relevă prin intermediul studiului proprietăților obiectelor și fenomenelor fizice. Trebuie, însă, consemnat că studiul respectiv se face în diferite contexte și aproximații. Astfel, obiectele și fenomenele fizice sînt studiate într-o abordare clasică (constituită de mecanica, termodinamica, fizica statistică și electromagnetismul în versiune clasică (nerelativistă și necuantică)), într-o abordare relativistă (constituită de teoria relativității restrînsă și generalizată, din teoria relativistă a fenomenelor electromagnetice) or într-una cuantică (constituită de mecanica cuantică, statistica cuantică, teoria cuantică a cîmpurilor). Rezultă atunci că, în principiu, proprietățile fizice ale spațiului și timpului sînt indisolubil legate de abordarea (aproximația și contextul) în care sînt studiate obiectele și fenomenele fizice prin a căror comportare și proprietăți spațiul și timpul își relevă caracteristicile. În acest paragraf ne vom referi doar la proprietățile spațiului și timpului care se relevă prin intermediul obiectelor și fenomenelor studiate în mecanica clasică, întrucît această ramură a fizicii formează obiectul de discuție al prezentului capitol și al celui următor.

În mecanica clasică caracterizarea întinderii corpurilor (obiectelor) și a pozițiilor lor reciproce se face cu ajutorul distanțelor spațiale, iar descrierea caracteristicilor de durată, coexistență și succesiune a fenomenelor se face cu ajutorul intervalelor de timp. Distanțele spațiale se măsoară cu ajutorul *etaloanelor* de lungime, iar intervalele de timp se măsoară cu aju-



torul *ceasurilor*. În mecanica clasică, pe baza experienței, se admite că respectivele instrumente au următoarele proprietăți :

— dacă lungimea a două etaloane coincide o dată, etaloanele rămân egale în orice comparații ulterioare, independent de starea lor de mișcare relativă (unul față de altul) ;

— două ceasuri, odată reglate pe aceeași oră inițială, vor arăta întotdeauna aceeași oră, independent de starea lor de mișcare relativă. Aceste două proprietăți arată că în mecanica clasică distanțele spațiale și intervalele temporale au un *caracter absolut*.

În cadrul mecanicii clasice experiența ne arată că pentru a defini complet poziția unui corp punctiform în raport cu alte corpuri în cazul cel mai general este necesar și suficient să folosim trei distanțe independente între ele. Această proprietate a spațiului se numește *tridimensionalitate*. Tot experiența ne arată că timpul este *unidimensional*, ceea ce înseamnă că pentru a „repera în timp” un eveniment față de altul este necesar și suficient să dăm un singur interval de timp. De notat că tridimensionalitatea spațiului și unidimensionalitatea timpului sînt proprietăți stabilite experimental și că pînă în prezent nu s-a dat vreo demonstrație teoretică care să arate de ce spațiul are exact 3 dimensiuni (și de ce, de exemplu, nu are 2, 4 sau 5 dimensiuni) și de ce timpul este unidimensional.

Analiza fenomenelor studiate în mecanica clasică arată că spațiul și timpul mai au următoarele proprietăți :

— spațiul este *omogen*, adică proprietățile lui sînt aceleași în toate punctele sale (nu apar modificări ale respectivelor proprietăți la deplasarea dintr-un punct în altul) ;

— spațiul este *izotrop*, adică proprietățile lui sînt aceleași după toate direcțiile (nu apar modificări ale respectivelor proprietăți la rotația în jurul direcțiilor spațiale) ;

— timpul este *omogen*, adică diferitele momente de timp sînt identice între ele (nu apar deosebiri de proprietăți ale timpului dacă ne referim la diferite momente de timp).

Caracteristicile menționate ale spațiului și timpului se numesc *proprietăți de simetrie*. De notat că aceste proprietăți se reflectă în legi de conservare a unor mărimi mecanice ale sistemelor izolate de corpuri.

Experiențele referitoare la fenomenele studiate de mecanica clasică arată de asemenea că spațiul este plat sau euclidian — adică relațiile spațiale pot fi descrise (modelate) cu ajutorul geometriei euclidiene. De menționat aici faptul că problema de a ști care este geometria (euclidiană sau neeuclidiană) cu ajutorul căreia se descriu (modelează) relațiile spațiale din spațiul fizic real este o problemă de fizică și nu una de matematică.

Reprezentarea spațiului și timpului prin proprietățile menționate mai sus se numește *reprezentare clasică*. Ea a fost stabilită pe baza experienței și se dovedește a fi aplicabilă unui număr foarte mare de fenomene fizice.

În mecanică se folosește frecvent termenul de *punct material* sau termenul echivalent de *particulă punctiformă* (or, simplu, *particulă*). Prin punct material se înțelege un corp pentru care se pot neglija dimensiunile



propriu în comparație cu distanțele pe care se mișcă și a cărei structură internă nu se schimbă (și în consecință se poate face abstracție de ea) în decursul mișcării. După cum am mai menționat, experiența arată că pentru a defini complet poziția în spațiu a unui punct material în caz general este necesar și suficient să cunoaștem trei distanțe în raport cu

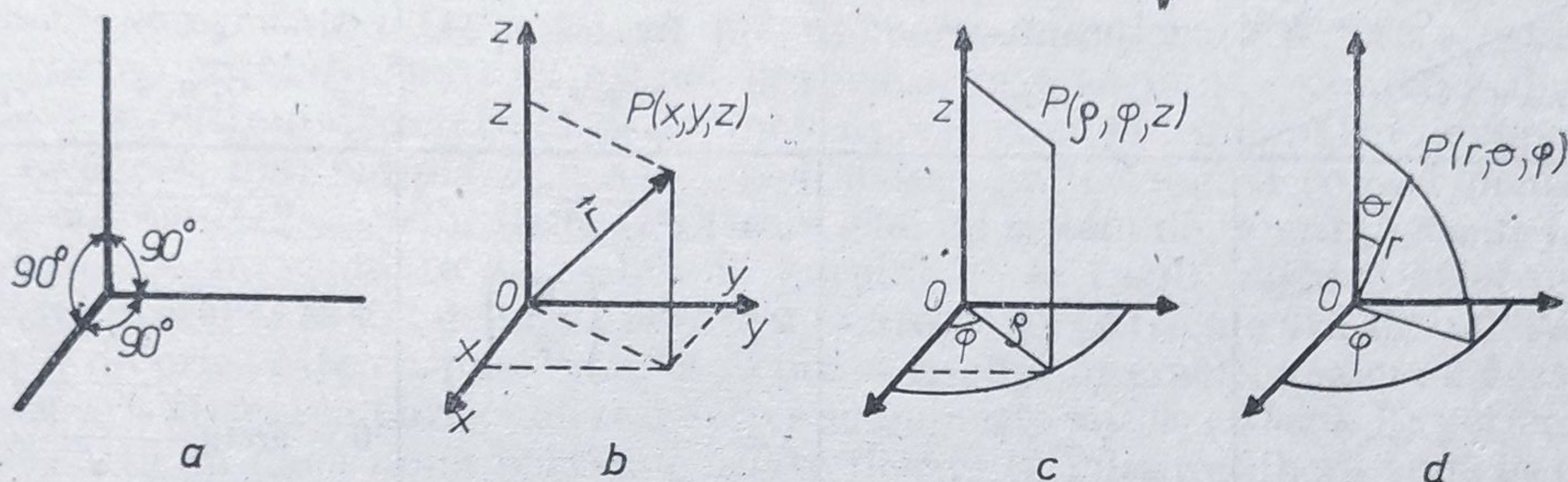


Fig. 1.1.1.

un sistem de corpuri de referință — distanțe care trebuie să fie independente între ele. Dacă sistemului de corpuri de referință i se atașează un set de axe în raport cu care putem defini în mod univoc poziția oricărui punct din spațiu obținem un *sistem de axe de referință*. Cel mai frecvent este folosit *sistemul cartezian* de axe de referință, format din trei axe concurente într-un punct și reciproc perpendiculare între ele două câte două (vezi fig. 1.1.1, a).

Reperarea poziției punctelor spațiului în raport cu un sistem de axe de referință se face cu ajutorul unui set de trei parametri independenți între ei, care alcătuiesc un *sistem de coordonate*; valorile parametrilor respectivi pentru un punct dat reprezintă *coordoanatele punctului* considerat. În raport cu sistemul de axe cartezian se folosesc următoarele sisteme de coordonate: *coordoanatele carteziene* ( $x, y, z$ ), *coordoanatele cilindrice* ( $\rho, \varphi, z$ ) și *coordoanatele sferice* ( $r, \varphi, \theta$ ) (vezi fig. 1.1.1, b, c și d). Desigur că poziția unui punct în spațiu poate fi definită cu ajutorul oricăruia dintre sistemele de coordonate amintite și, în consecință, între coordoanatele aceluiași punct exprimate în diferite sisteme de coordonate trebuie să existe anumite relații de legătură. Respectivale relații sînt date în tabelul 1.1.1.

Dacă la sistemul de axe de referință, prevăzut cu un sistem de coordonate, adăugăm un dispozitiv care permite, printr-un procedeu bine definit, reperarea timpului, obținem ceea ce se numește *sistem de referință*.

În concepția clasică asupra proprietăților spațiului și timpului se admite că un punct material se găsește în orice moment într-un punct bine determinat al spațiului și că, în consecință, coordoanatele lui sînt bine determinate. Coordoanatele unui punct material definesc *poziția* respectivului punct în raport cu sistemul de referință ales. În cazul unui sistem de puncte materiale este evident că *poziția sistemului* este dată prin ansamblul pozițiilor punctelor constitutive și deci definiția poziției sistemului trebuie să se facă în principiu prin precizarea coordonatelor tuturor punctelor.



În practică de multe ori, însă, între coordonatele punctelor dintr-un sistem există anumite relații matematice de legătură, ceea ce face ca unele din coordonatele punctelor din sistem să se poată exprima în funcție de alte coordonate ale particulelor din același sistem. De aici rezultă că pentru

Tabelul 1.1.1

<div> <div>C oordonatele</div> <div>în funcție de coordonatele</div> </div>	<div> <div>Carteziene</div> <div><math>x, y, z</math></div> </div>	<div> <div>Cilindrice</div> <div><math>\rho, \varphi, z</math></div> </div>	<div> <div>Sferice</div> <div><math>r, \varphi, \theta</math></div> </div>
<div> <div>Carteziene</div> <div><math>x, y, z</math></div> </div>	<div> <div><math>x = x</math></div> <div><math>y = y</math></div> <div><math>z = z</math></div> </div>	<div> <div><math>\rho = \sqrt{x^2 + y^2}</math></div> <div><math>\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right)</math></div> <div><math>z = z</math></div> </div>	<div> <div><math>r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}</math></div> <div><math>\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}</math></div> <div><math>\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}</math></div> </div>
<div> <div>Cilindrice</div> <div><math>\rho, \varphi, z</math></div> </div>	<div> <div><math>x = \rho \cos \varphi</math></div> <div><math>y = \rho \sin \varphi</math></div> <div><math>z = z</math></div> </div>	<div> <div><math>\rho = \rho</math></div> <div><math>\varphi = \varphi</math></div> <div><math>z = z</math></div> </div>	<div> <div><math>r = \sqrt{\rho^2 + z^2}</math></div> <div><math>\varphi = \varphi</math></div> <div><math>\theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z}</math></div> </div>
<div> <div>Sferice</div> <div><math>r, \varphi, \theta</math></div> </div>	<div> <div><math>x = r \sin \theta \cos \varphi</math></div> <div><math>y = r \sin \theta \sin \varphi</math></div> <div><math>z = r \cos \theta</math></div> </div>	<div> <div><math>\rho = r \sin \theta</math></div> <div><math>\varphi = \varphi</math></div> <div><math>z = r \cos \theta</math></div> </div>	<div> <div><math>r = r</math></div> <div><math>\varphi = \varphi</math></div> <div><math>\theta = \theta</math></div> </div>

definirea poziției unui sistem de particule nu este întotdeauna necesar să precizăm un număr de coordonate egal cu numărul total de coordonate al tuturor particulelor din sistem. Coordonatele independente necesare pentru a defini complet poziția unui sistem de particule formează setul *gradelor de libertate* al sistemului. În funcție de acest set avem de a face cu : (i) sisteme cu un set finit (și desigur numărabil) de grade de libertate, (ii) sisteme cu un set numărabil de grade de libertate al căror număr la limită tinde la infinit și (iii) sisteme cu un set infinit și nenumărabil (continuu) de grade de libertate. În prima categorie de sisteme intră sistemele formate dintr-un număr finit de puncte materiale distincte și sistemele de corpuri absolut rigide, în a doua categorie — așa numitele sisteme statistice, iar în a treia — așa numitele medii continue (fluide și solide deformabile), în care de fapt nu mai avem puncte materiale discrete, ci o distribuție continuă a materiei.

Modificarea în timp a poziției sistemelor materiale se numește *mișcare mecanică*. Studiul acestei mișcări formează obiectul de investigație al *mecanicii*. Mecanica clasică se bazează pe proprietățile clasice ale spațiului și timpului (proprietăți prezentate mai sus).

După cum am menționat mai sus, studiul fenomenelor fizice și, în particular al celor mecanice, necesită alegerea unui sistem de referință în raport cu care să se facă descrierea fenomenelor respective. Evident că



există o infinitate de sisteme de referință care se mișcă arbitrar unul față de altul. Întrucât distanțele spațiale și intervalele temporale se definesc în raport cu sistemele de referință și deoarece în relațiile matematice care exprimă legile fizicii intră distanțe spațiale și intervale temporale, este de presupus că legile naturii nu au aceeași formă de exprimare matematică în toate sistemele de referință. (Alegînd un sistem de referință arbitrar se poate ajunge la situația că legile unor fenomene foarte simple să ia forme foarte complicate.) De notat că presupunerea menționată a fost atestată de experiență. Natural că atunci problema care se pune este aceea de a alege un sistem de referință astfel încît în raport cu el legile fizicii să capete forma cea mai simplă. Un asemenea sistem ar fi cel mai comod pentru descrierea fenomenelor fizice. Pentru a găsi un sistem de referință cu caracteristicile menționate ar trebui să pornim de la cazul mișcării celei mai elementare. O astfel de mișcare este mișcarea unei particule atît de îndepărtată de orice alte corpuri încît să se poată neglija interacțiunea ei cu aceste corpuri. Mișcarea particulei respective se numește *mișcare liberă*. Experiența ne arată că dacă două particule aflate fiecare în mișcare liberă sînt, la un moment dat, în repaus relativ (respectiv în mișcare relativă cu o viteză  $V$ ) ele rămîn tot timpul în repaus relativ (respectiv în mișcare relativă rectilinie și uniformă cu aceeași viteză  $V$ ). De aceea este convenabil să alegem un sistem de referință ale cărui axe de referință sînt legate solidar de o particulă care se află în mișcare liberă. Un astfel de sistem de referință se numește *inertial*.

Din cele prezentate mai sus rezultă că un sistem de referință ce se mișcă rectiliniu și uniform față de un sistem de referință inertial este și el inertial. Evident că există o infinitate de sisteme de referință inerțiale. De notat aici că în raport cu sistemele de referință inerțiale spațiul este omogen (diversele puncte ale spațiului sînt echivalente între ele) și izotrop (diversele direcții spațiale sînt echivalente între ele). Un sistem de referință care se mișcă arbitrar (nu rectiliniu și uniform) față de un sistem de referință inertial este *neinertial*. În raport cu un sistem de referință neinertial spațiul nu mai este în general nici omogen nici izotrop.

În volumul de față majoritatea fenomenelor fizice vor fi descrise în raport cu sisteme de referință inerțiale și, de aceea, în general nu vom mai specifica de fiecare dată că este vorba de un astfel de sistem. Cazurile de excepție (cînd descrierea fenomenelor fizice se face în sisteme de referință neinerțiale) vor fi menționate în mod explicit (vezi, de exemplu, cap. III).

## § 1.2. ELEMENTE DE MECANICĂ NEWTONIANĂ A PARTICULELOR ȘI SISTEMELOR DE PARTICULE

În descrierea mișcărilor mecanice folosim noțiunea de punct material sau particulă punctiformă. Un corp poate fi asimilat cu un punct material dacă dimensiunile corpului sînt neglijabile în raport cu distanțele



pe care el se mișcă și dacă în problemele luate în studiu se poate face abstracție de structura internă a corpului. Posibilitatea de a asimila un corp cu un punct material depinde de contextul concret al problemei studiate. Astfel, Pământul în mișcarea sa anuală în jurul Soarelui poate fi considerat

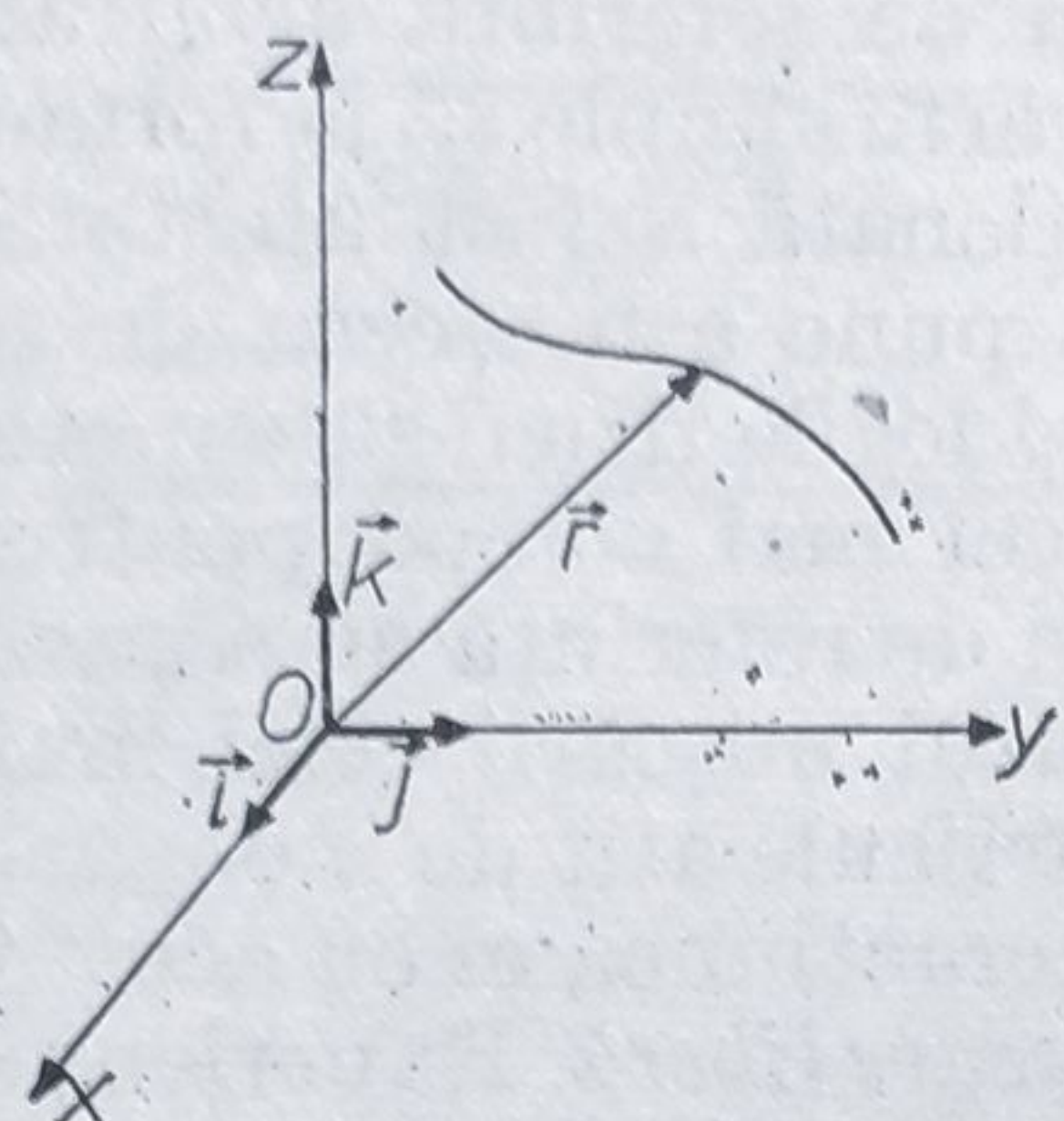


Fig. 1.2.1.

ca un punct material (în această mișcare dimensiunile proprii ale Pământului sînt neglijabile în comparație cu distanțele pe care el se mișcă, iar de structura lui internă se poate face abstracție). Pe de altă parte, Pământul nu mai poate fi considerat ca un punct material cînd studiem mișcarea sa de rotație diurnă în jurul propriei axe (deoarece dimensiunile Pământului nu mai sînt neglijabile în raport cu distanțele pe care se face mișcarea) sau cînd studiem mișcările seismice (deoarece în aceste mișcări nu mai putem face abstracție de structura internă a Pământului, tocmai respectiva structură fiind cea care se modifică în decursul mișcării).

Poziția unei particule punctiforme în raport cu un sistem de referință poate fi precizată cu ajutorul vectorului de poziție (numit și rază vectorie)  $\mathbf{r}$  (fig. 1.2.1).

Dacă folosim coordonatele carteziene  $x$ ,  $y$  și  $z$ , atunci  $\mathbf{r}$  poate fi scris sub forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.2.1)$$

unde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  și  $\mathbf{k}$  sînt versorii celor trei axe de coordonate. Deoarece, în general, particula se mișcă, raza ei vectorie  $\mathbf{r}$  este, în general, funcție de timpul  $t$ , adică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (1.2.2)$$

Curba pe care o descrie particula în mișcare este tocmai curba pe care o descrie vîrfurile vectorului  $\mathbf{r}$  în cursul variației sale ca funcție de  $t$  și se numește *traiectoria particulei*. Mișcările particulelor pot fi clasificate după forma geometrică a traiectoriilor. Astfel, avem mișcări rectilinii (traiectoriile fiind linii drepte) și mișcări curbilinii (care pot fi la rîndul lor circulare, eliptice, spirale etc., după forma geometrică a traiectoriei). Derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție, adică mărimea

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \\ &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

se numește *viteză* a particulei. Mărimile  $v_x$ ,  $v_y$  și  $v_z$  sînt componentele carteziene ale vitezei. Derivata în raport cu timpul a vitezei, adică



mărimea

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k} = \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

se numește *accelerație* a particulei, mărimile  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$  fiind componentele carteziane ale accelerației. După felul accelerației mișcările se împart în: *uniforme* ( $\mathbf{a} = 0$ ), *uniform variate* ( $d\mathbf{a}/dt = 0$ ) și *variate* ( $d\mathbf{a}/dt \neq 0$ ).

Pe traiectoria unei particule se poate defini *parcursul*  $s(t)$ , egal cu lungimea arcului de curbă descris de particulă, măsurat din locul unde se afla particula la  $t = 0$  pînă la locul unde ea se află la momentul  $t$  (fig. 1.2.2). Din faptul că, la limită, lungimea unui arc infinitesimal de curbă devine egal cu lungimea coardei care-l subîntinde, rezultă că vectorul

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.2.5)$$

este un vector de modul egal cu unitatea, adică un versor (figura 1.2.3). Deoarece la limită  $d\mathbf{r}$  devine tangent la traiectorie, înseamnă că și  $\boldsymbol{\tau}$  este tangent la traiectorie. De aceea,  $\boldsymbol{\tau}$  este numit *versor al tangentei* la traiectorie.

În general, pentru o mișcare arbitrară,  $\boldsymbol{\tau}$  variază în timp, adică  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$ . Din faptul că  $\boldsymbol{\tau}$  este versor se poate scrie

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = \tau^2 = 1 \quad (1.2.6)$$

de unde, prin derivare în raport cu parcursul  $s(t)$ , se obține

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (1.2.7)$$

Această relație arată că vectorul  $d\boldsymbol{\tau}/ds$  este normal pe versorul  $\boldsymbol{\tau}$ . Dacă se scrie

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho} \quad \text{cu} \quad \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| \quad (1.2.8)$$

$\mathbf{n}$  reprezintă un versor normal pe  $\boldsymbol{\tau}$ , numit și versor *normal* la traiectorie. Mărimea  $\rho$  definită de (1.2.8) se numește *rază de curbură* a traiectoriei (în punctul considerat). În funcție de versorii  $\boldsymbol{\tau}$  și  $\mathbf{n}$ , prin relația

$$\mathbf{b} = [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}] \quad (1.2.9)$$

se poate defini un al treilea versor  $\mathbf{b}$  numit versor *binormal*. Versorii  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  și  $\mathbf{b}$  formează un triedru, care desigur că se deplasează o dată cu particula pe traiectorie. De aceea, triedrul respectiv se numește și *triedru însoțitor* (sau urmăritor) (fig. 1.2.4). Triedrul format de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  și  $\mathbf{b}$  definește trei plane numite: *plan osculator* (definit de  $\boldsymbol{\tau}$  și  $\mathbf{n}$ ), *plan normal* (definit de  $\mathbf{n}$  și  $\mathbf{b}$ ) și *plan de rectificare* (definit de  $\mathbf{b}$  și  $\boldsymbol{\tau}$ ).



Să vedem cum sînt orientați vectorii viteză  $\mathbf{v}$  și accelerație  $\mathbf{a}$  în raport cu triedrul însoțitor (adică în raport cu versorii  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  și  $\mathbf{b}$ ). Din relațiile (1.2.3) și (1.2.5) se vede că se poate scrie

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot v. \quad (1.2.10)$$

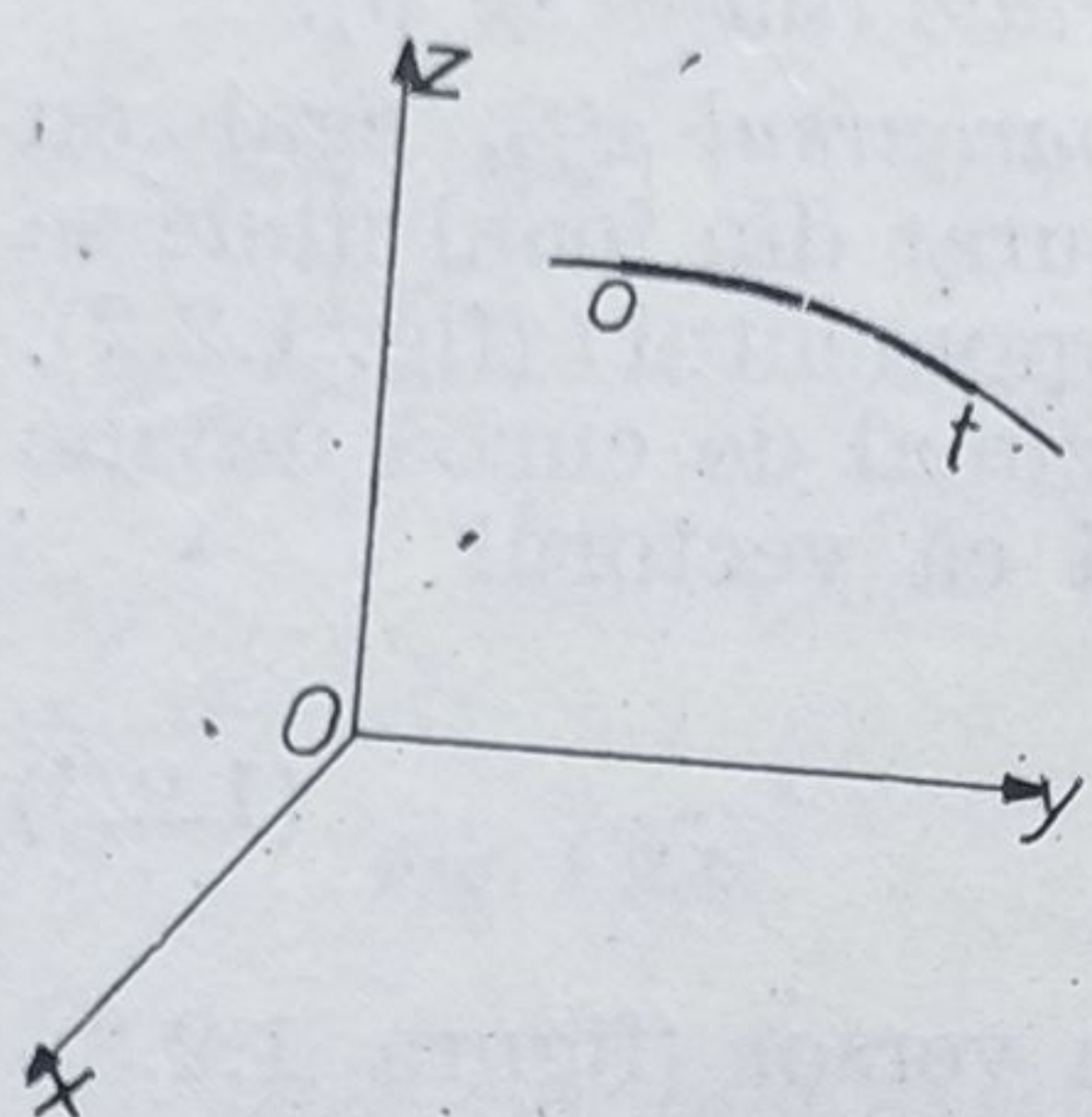


Fig. 1.2.2.

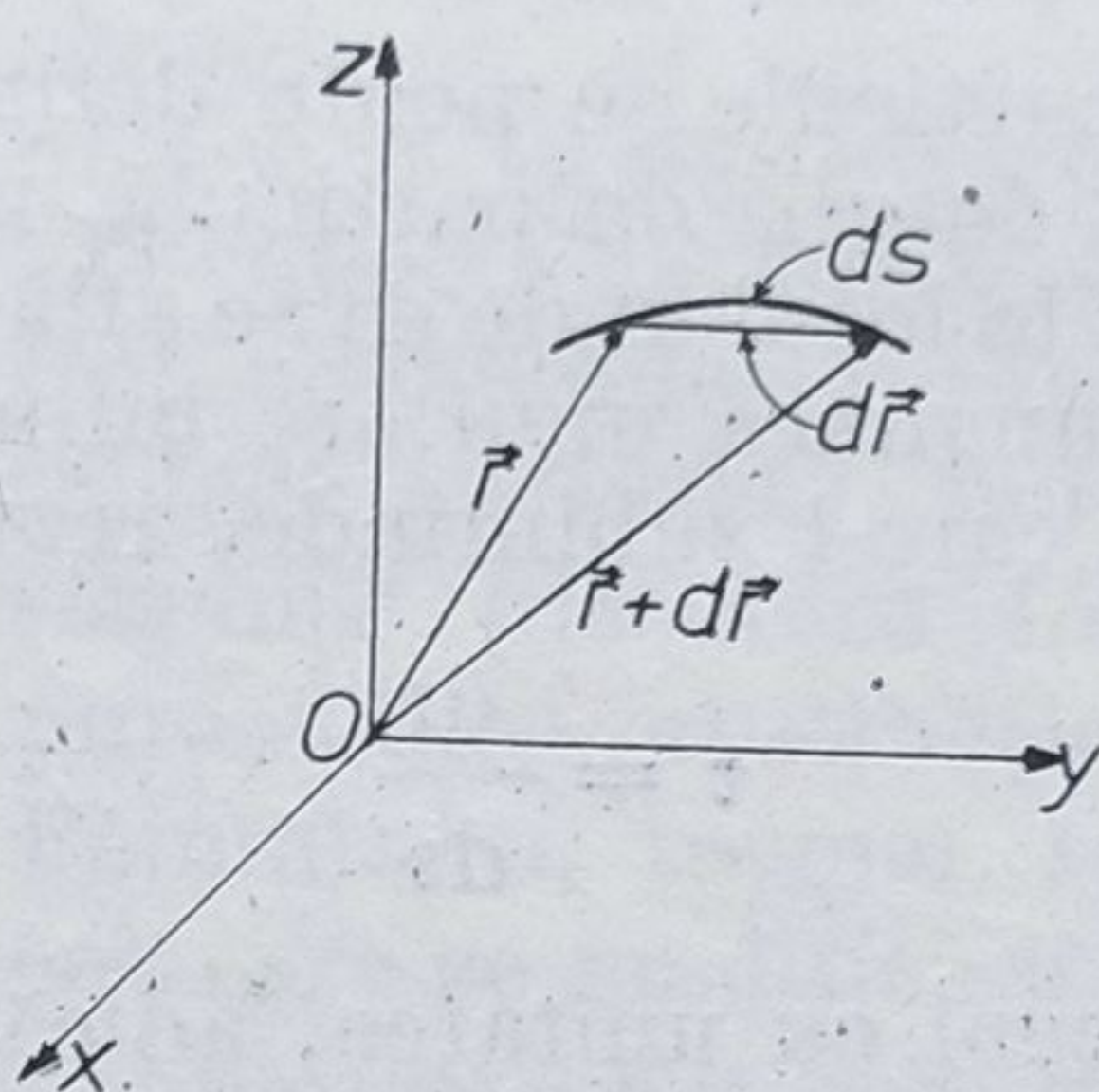


Fig. 1.2.3.

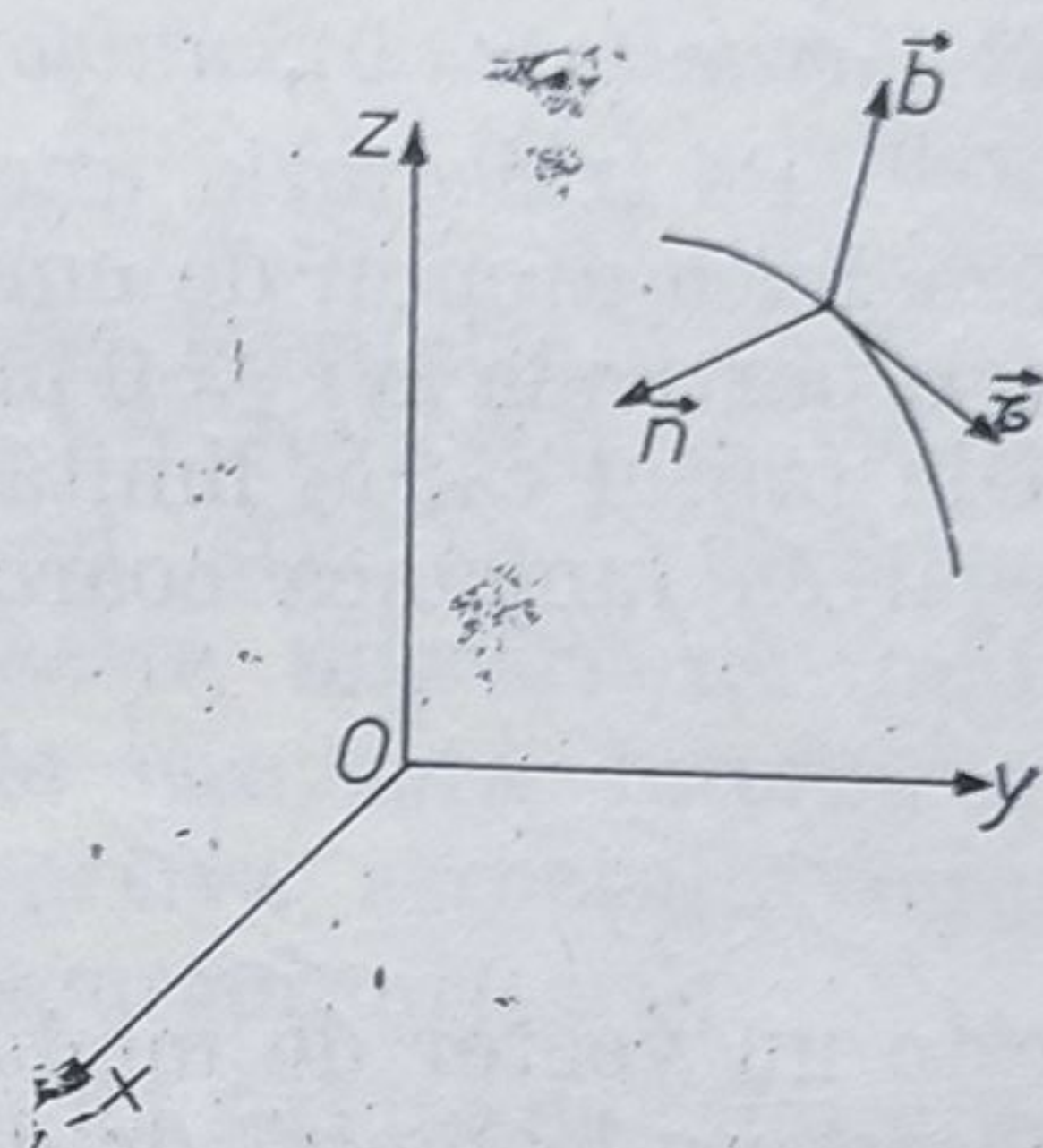


Fig. 1.2.4.

Acest rezultat arată că vectorul viteză este orientat după direcția versorului  $\boldsymbol{\tau}$ , adică tangent la traiectorie și că modulul vitezei  $v = |\mathbf{v}|$  este egal cu derivata  $(ds/dt)$  a parcursului  $s$  în raport cu timpul. Din relațiile (1.2.4), (1.2.8) și (1.2.10) se vede că se poate scrie

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} \right] = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \\ &= \left( \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) \cdot \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\mathbf{n}}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \boldsymbol{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \\ &= \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} + \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\tau} = a_n \cdot \mathbf{n} + a_\tau \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Acest rezultat arată că vectorul accelerație  $\mathbf{a}$  este conținut în planul osculator al traiectoriei (planul definit de  $\boldsymbol{\tau}$  și  $\mathbf{n}$ ). Mărimile  $a_\tau = (d^2s/dt^2)$  respectiv  $a_n = (v^2/\rho)$  se numesc componente *tangentială* respectiv *normală* ale vectorului accelerație  $\mathbf{a}$ . Evident că întrucît  $\boldsymbol{\tau}$  și  $\mathbf{n}$  sînt perpendiculari între ei, modulul vectorului accelerație poate fi calculat prin relațiile

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left( \frac{d^2s}{dt^2} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{\rho} \right)^2}. \quad (1.2.12)$$



În cinematică se definește și așa numita *viteză areolară*. Această mărime se definește în felul următor. În timpul infinitesimal  $dt$  raza vector  $\mathbf{r}$  a particulei „mătură” un sector de suprafață  $dS$  dat de relația (fig. 1.2.5)

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt. \quad (1.2.13)$$

De aici se definește *viteza areolară* prin relația

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|. \quad (1.2.14)$$

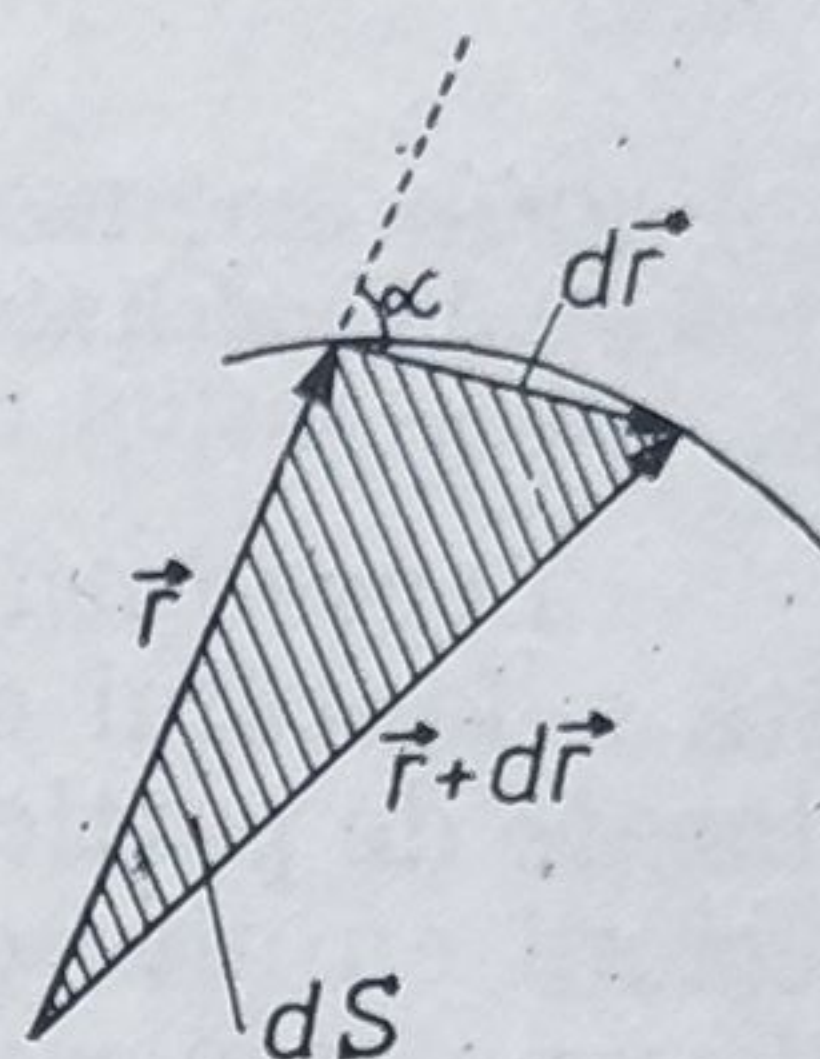


Fig. 1.2.5

Caracteristicile mișcării prezentate mai sus prin intermediul vectorilor de poziție ( $\mathbf{r}$ ), viteze ( $\mathbf{v}$ ) și accelerații ( $\mathbf{a}$ ) relevă proprietățile *cinematice* (geometrice, spațio-temporale) ale mișcărilor corpurilor materiale. Respectivul caracteristici nu ne spun nimic despre legătura și corelațiile ce există între mișcările respective ale unor corpuri (particule) și existența sau mișcarea altor particule. Or experiența ne arată că mișcarea unor corpuri dintr-o anumită zonă a spațiului depinde (este influențată) de existența și mișcarea altor corpuri aflate în alte zone ale spațiului. Această dependență este manifestarea principală a *interacțiunii* corpurilor. Desigur că un studiu al mișcărilor corpurilor trebuie să fie făcut în strânsă legătură cu studiul interacțiunilor dintre corpuri. Un studiu al interacțiunilor trebuie să releve pe de o parte modul de manifestare a respectivelor interacțiuni și pe de altă parte natura lor fizică. În mecanica clasică respectivul studiu se întreprinde numai din punctul de vedere al stabilirii unor caracteristici mai importante ale interacțiunilor, fără a exista vreo preocupare (interes) pentru natura fizică intimă a interacțiunilor. (Astfel de preocupări intră în atenția altor capitole ale fizicii cum sînt electromagnetismul și fizica particulelor elementare.)

Evident, un studiu al mișcărilor mecanice, care, pe lângă aspectele cinematice (legate de poziții, viteze și accelerații), să ia în considerare și aspecte legate de interacțiuni, trebuie să se bazeze pe un set de ipoteze și postulate (preluate și „distilate” din experiență). Setul acestor ipoteze și postulate trebuie ca, pe lângă ipotezele referitoare la proprietățile spațiului și timpului, să mai conțină și ipoteze suplimentare referitoare la modul de manifestare al interacțiunilor. Aceste ipoteze suplimentare în mecanica clasică sînt formulate sub forma a trei legi fundamentale sau postulate, cunoscute sub denumirea de *legile dinamicii* sau *legile lui Newton*. Respectivul legi se exprimă în felul următor:

*Legea întâi* (sau principiul inerției): un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atît timp cît asupra lui nu se exercită vreo acțiune din exterior (din partea altor corpuri).

*Legea a doua* (sau principiul forței): dacă asupra unui corp acționează o forță  $\mathbf{F}$ , ca expresie a interacțiunii corpului respectiv cu alte corpuri, această forță determină o modificare în timp a impulsului  $\mathbf{p}$  al corpului



după legea

$$dp/dt = F. \quad (1.2.15)$$

*Legea a treia* (sau principiul acțiunii și reacțiunii) : dacă un corp  $A$  acționează asupra unui alt corp  $B$  cu o forță  $F_{AB}$ , atunci la rândul său  $B$  acționează asupra lui  $A$  cu o forță egală și de sens contrar cu  $F_{BA}$ , adică cu forța

$$F_{BA} = -F_{AB}. \quad (1.2.16)$$

*Observație.* De reținut că sistemele de referință în raport cu care se formulează cele 3 legi ale dinamicii sînt prin exclusivitate doar sistemele de referință inerțiale, în care — trebuie reamintit — spațiul este omogen și izotrop, iar timpul omogen.

Legea întâi este, după cum se poate vedea ușor, o consecință nemijlocită a faptului că sistemele de referință inerțiale sînt concepute ca fiind atașate de particule aflate în mișcare liberă (adică nesupuse nici unor interacțiuni cu alte corpuri). În legea a doua impulsul  $p$  este o măsură a mișcării corpului în cauză și este legat de viteza  $v$  a corpului respectiv prin relația

$$p = mv \quad (1.2.17)$$

$m$  fiind masa corpului. Forța  $F$  este o măsură a interacțiunii corpului considerat cu alte corpuri. Interacțiunea respectivă determină (cauzează) o modificare a stării de mișcare a corpului, absența interacțiunii lasă corpul să execute o mișcare liberă. Din relațiile (1.2.15) și (1.2.17) se vede că masa este o măsură a inerției corpurilor, adică o măsură a proprietății lor de a-și păstra mișcarea liberă, (deoarece cu cît masa unui corp este mai mare trebuie o forță mai mare pentru a scoate corpul respectiv dintr-o stare de mișcare liberă și a-i imprima o anumită variație (modificare)  $dp/dt$  a impulsului (deci a măsurii mișcării). Din aceste motive relația (1.2.15) nu numai că exprimă legea a doua a dinamicii, dar ea poate fi privită și ca reprezentînd relația de definiție a masei. Legat tot de relația (1.2.15) trebuie adăugat că forța  $F$  și impulsul  $p$  sînt mărimi aditive. De aici rezultă că variația impulsului cauzată de două forțe diferite este egală cu suma variațiilor impulsului cauzate de fiecare forță în parte. Această afirmație exprimă *principiul independenței acțiunii forțelor*.

În mecanica clasică se admite că masa este o mărime constantă care nu depinde de viteză, de timp sau de alți parametrii cinematici. De aceea, ținînd cont de (1.2.17) și de (1.2.3) legea a doua a dinamicii (1.2.15) se poate scrie și sub forma

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F. \quad (1.2.18)$$

Aceasta reprezintă ecuația vectorială a mișcării unei particule. În cazul coordonatelor carteziene (vezi § 1.1) din (1.2.18) se obțin următoarele ecuații scalare de mișcare

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \quad (1.2.19)$$

$F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$  fiind componentele carteziene ale vectorului forță.



Ecuatiile (1.2.18) și (1.2.19) sînt ecuații diferențiale. Prin integrarea lor se obțin funcția vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \quad (1.2.20)$$

respectiv funcțiile scalare

$$x = x(t, C_1, C_2), y = y(t, C_3, C_4), z = z(t, C_5, C_6) \quad (1.2.21)$$

unde  $t$  reprezintă variabila timp, iar  $C_1, C_2, \dots, C_6$  sînt constante de integrare. Pentru a determina valorile acestor constante sînt necesare date suplimentare, care de obicei se dau sub forma condițiilor inițiale prin indicarea valorilor mărimilor

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

$$x_0 = x(0), v_{x0} = v_x(0); y_0 = y(0), v_{y0} = v_y(0); z_0 = z(0), v_{z0} = v_z(0). \quad (1.2.22)$$

Din relația (1.2.15) rezultă următoarea *lege de conservare* a impulsului unei particule: dacă forța  $\mathbf{F}$  care acționează asupra unei particule este nulă ( $\mathbf{F} = 0$ ), impulsul particulei rămîne constant  $\left( \text{deoarece } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \right)$ . Deoarece  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  și masa este o mărime constantă înseamnă că o particulă care-și conservă impulsul execută o mișcare liberă ( $\mathbf{v} = \text{const.}$ ).

Din relația (1.2.18) scrisă pentru  $\mathbf{F} \neq 0$  rezultă că masa  $m$  este o măsură a inerției particulei (adică o măsură a proprietății particulei de a-și păstra mișcarea liberă). Aceasta deoarece, pentru a produce o modificare dată (caracterizată prin mărimea  $d^2\mathbf{r}/dt^2$ ) a mișcării particulei față de mișcarea liberă (inerțială), este nevoie de o forță cu atît mai mare cu cît  $m$  este mai mare.

O altă mărime care intervine în caracterizarea stării dinamice de mișcare a unei particule este momentul cinetic  $\mathbf{L}$  definit prin relația

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (1.2.23)$$

Dacă se face derivarea în raport cu timpul a lui  $\mathbf{L}$  și se ține cont de relațiile (1.2.3), (1.2.15) și (1.2.23) se obține următorul șir de relații

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \\ &= 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \end{aligned}$$

adică ecuația de evoluție a momentului cinetic

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (1.2.24)$$

Mărimea  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  se numește *moment al forței*  $\mathbf{F}$  în raport cu originea axelor de coordonate.



Din relația (1.2.24) rezultă următoarea *lege de conservare a momentului cinetic al unei particule*: dacă momentul forței ce acționează asupra unei particule este nul ( $\mathbf{M} = 0$ ), momentul cinetic al particulei respective se conservă (deoarece  $d\mathbf{L}/dt = 0$ ).

O altă mărime care se întâlnește în studiul mișcării mecanice a particulelor este *lucrul mecanic*, care se definește în felul următor: dacă o par-

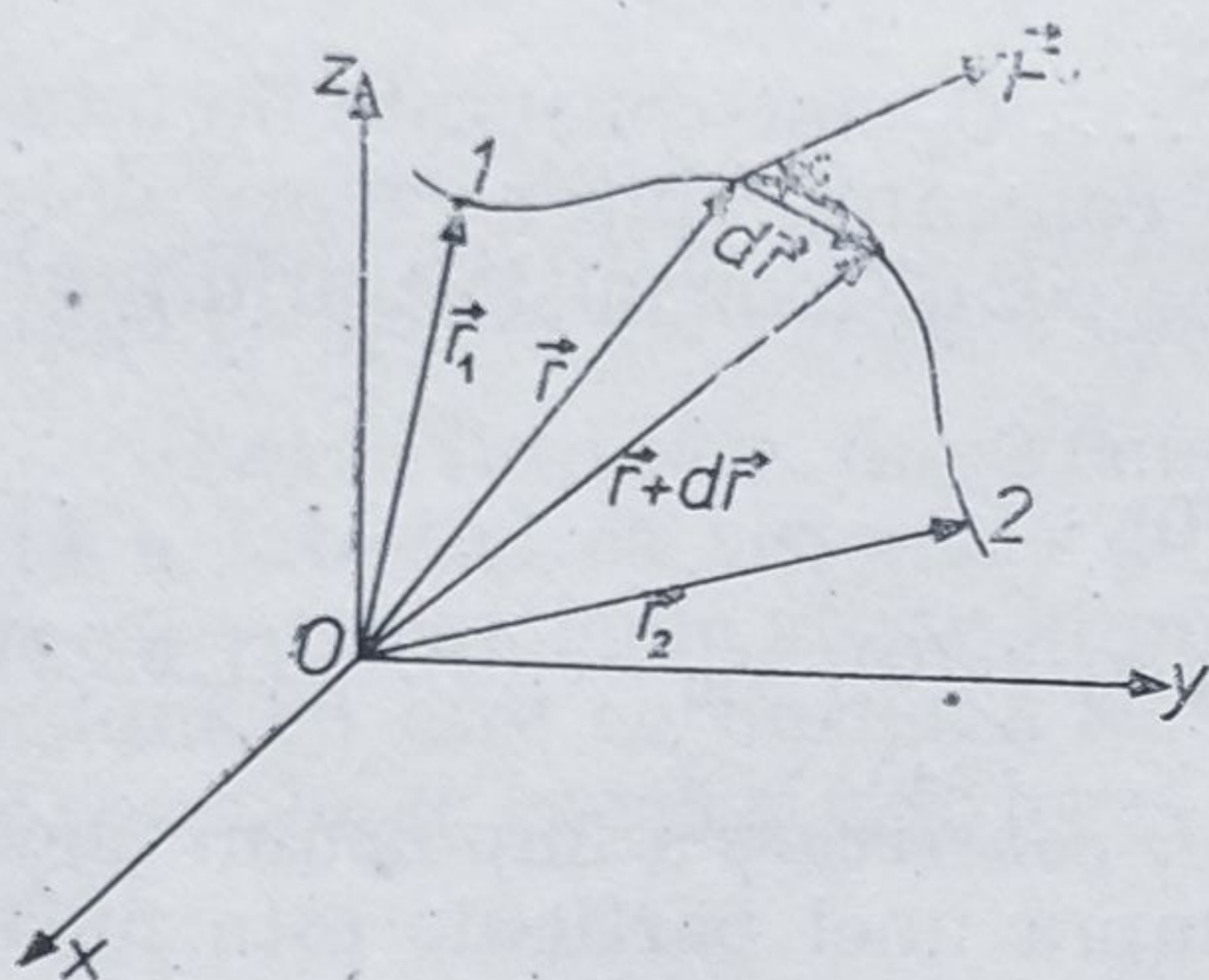


Fig. 1.2.6

ticulă supusă acțiunii unei forțe  $\mathbf{F}$  suferă o deplasare elementară  $d\mathbf{r}$  (fig. 1.2.6) spunem că forța  $\mathbf{F}$  a efectuat asupra particulei un lucru mecanic elementar  $\delta\mathcal{A}$  definit prin relația

$$\delta\mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha. \quad (1.2.25)$$

Lucrul mecanic efectuat de forța  $\mathbf{F}$  pentru deplasarea pe o distanță finită, de-a lungul unei curbe  $C$  între punctele 1 și 2 (de raze  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$ ) (fig. 1.2.6) este dat de relația

$$\mathcal{A}_{12} = \int_1^2 \delta\mathcal{A} = \int_{\mathbf{r}_1(C)}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2.26)$$

În relațiile (1.2.25) și (1.2.26) folosirea simbolului  $\delta$  indică faptul că mărimea  $\delta\mathcal{A}$  nu este o diferențială totală exactă și deci că lucrul mecanic  $\mathcal{A}_{12}$  depinde, în general, de curba pe care se face deplasarea între punctele 1 și 2.

În caracterizarea dinamică a stării de mișcare a particulelor se folosește de asemenea mărimea fizică numită *energie cinetică*. Definirea acestei mărimi se poate face prin rescrierea relației (1.2.25). Dacă se ține cont de relațiile (1.2.3), (1.2.15) și (1.2.25) se poate scrie

$$\delta\mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = d(m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2\right) = d(T)$$

sau

$$\delta\mathcal{A} = dT \quad (1.2.27)$$

unde mărimea  $T = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2$  reprezintă energia cinetică a particulei.

Relația (1.2.27) reprezintă forma diferențială (sau locală) a legii variației energiei cinetice. În formă integrală (sau globală) legea respectivă se exprimă prin relațiile

$$\mathcal{A}_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2}. \quad (1.2.28)$$

Această relație arată că lucrul mecanic efectuat de forța  $\mathbf{F}$  între punctele 1 și 2 (de vectori de poziție  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$ ) este egal cu variația energiei cinetice între aceleași puncte (poziții).



O forță care are proprietatea că lucrul mecanic efectuat de ea între două puncte nu depinde de traiectoria pe care se face deplasarea între cele două puncte (fig. 1.2.7) se numește conservativă. O asemenea forță satisface relația

$$\int_{r_1(C')}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1(C'')}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2.29)$$

Din această relație rezultă că lucrul mecanic efectuat de o forță conservativă pe un contur închis este nul, adică rezultă relația

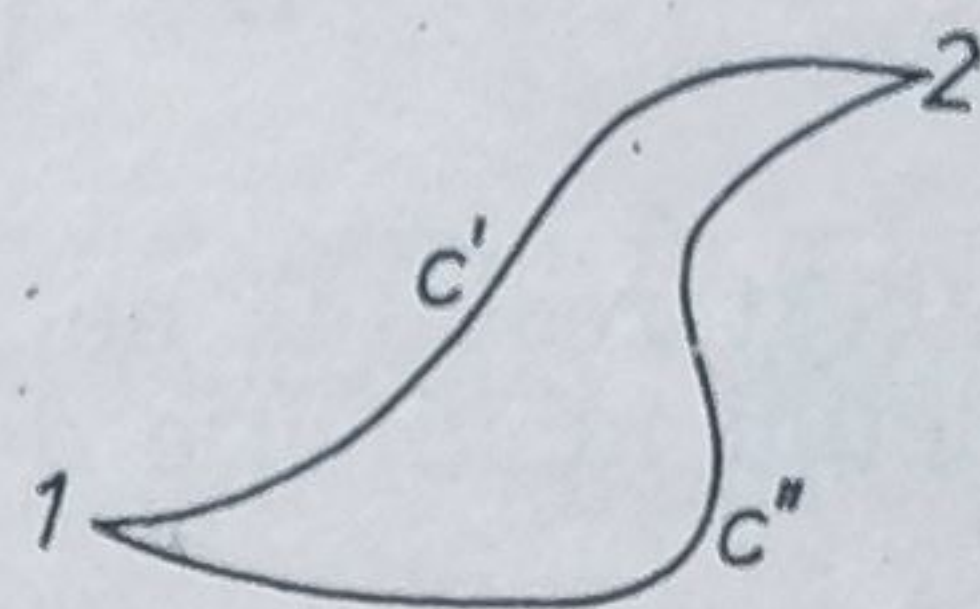


Fig. 1.2.7

$$\oint_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.2.30)$$

(unde  $\oint_{(C)}$  semnifică integrala pe un contur închis  $C$ ). De aici prin aplica-

rea teoremei Stokes rezultă

$$\oint_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S(C)} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.31)$$

unde  $S(C)$  reprezintă o suprafață netedă (fără singularități) arbitrară, care se sprijină pe conturul  $C$ , iar  $d\mathbf{S}$  este un vector normal la elementul de arie  $dS$ , și de modul  $|d\mathbf{S}| = dS$ . Relația (1.2.31) fiind adevărată pentru o suprafață  $S$  arbitrară, rezultă că ea implică relația

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.2.32)$$

Atunci rezultă că forța  $\mathbf{F}$  este de forma

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}\right) \quad (1.2.33)$$

întrucât  $\nabla \times (\nabla V) = 0$  oricare ar fi  $V$ . Se poate foarte ușor vedea că în cazul unei forțe conservative lucrul mecanic al forței este legat nemijlocit de variația funcției  $V$ . Din acest motiv funcția  $V = V(\mathbf{r})$  este denumită *energie potențială* a particulei (considerate) în poziția  $\mathbf{r}$ . Afirmațiile anterioare pot fi ilustrate cu următorul șir de relații

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\nabla V \cdot d\mathbf{r} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) = \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right) = -dV. \end{aligned} \quad (1.2.34)$$



De aici, prin integrare de-a lungul unei traiectorii care trece prin pozițiile  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{r}_2$ , se obține

$$\mathcal{A}_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 dW = - \int_1^2 dV = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2). \quad (1.2.35)$$

Acest rezultat ne arată că energia potențială într-un punct  $\mathbf{r}_1$  se poate defini în funcție de valoarea ei într-un punct  $\mathbf{r}_2$  prin relația

$$V(\mathbf{r}_1) = V(\mathbf{r}_2) + \int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2.36)$$

Deoarece punctul  $\mathbf{r}_2$  se poate alege arbitrar rezultă că energia potențială se definește pînă la o constantă arbitrară ( $V(\mathbf{r}_2)$ ). Pentru cîmpurile de forță pentru care  $V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)$  rămîne finit cînd  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$  (cu  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \neq 0$ ), se poate alege zeroul scării energiei potențiale astfel încît  $\lim_{|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}_2) = 0$ .

Atunci din (1.2.36) se poate scrie

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{A}_{\infty \mathbf{r}}. \quad (1.2.37)$$

Această relație arată că, pentru cîmpurile de forță de tipul menționat, energia potențială a unei particule într-un punct  $\mathbf{r}$  este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic necesar pentru a aduce particula de la infinit în punctul respectiv.

Să mai consemnăm o relație referitoare la energia unei particule supusă acțiunii unei forțe conservative. Din relațiile (1.2.27) și (1.2.34) rezultă relația

$$d(T + V) = dE = 0 \quad (1.2.38)$$

adică mărimea  $E = T + V$  — numită energia mecanică totală a particulei — rămîne constantă în timp. Relația (1.2.38) reprezintă *legea de conservare a energiei mecanice* pentru o particulă supusă acțiunii unei forțe conservative.

Să prezentăm acum cîteva considerații referitoare la mișcarea mecanică a sistemelor de particule. Fie un sistem format din  $N$  particule punctuale de mase  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , ale căror poziții sînt date de vectorii  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  și ale căror impulsuri sînt  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$ . Pentru un asemenea sistem, în conformitate cu legea a doua a dinamicii, se pot scrie relațiile

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} \quad (1.2.39)$$

unde  $\mathbf{F}_i$  reprezintă forța totală care acționează asupra particulei  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^{(E)}$  forța care acționează asupra particulei  $i$  din partea unor corpuri



aflate în exteriorul sistemului de particule, iar  $\mathbf{F}_{ji}$  forța care acționează asupra particulei  $i$  din partea particulei  $j$  din interiorul sistemului. Legat de forțele  $\mathbf{F}_{ji}$  trebuie notat că, în conformitate cu legea a treia a dinamicii (1.2.6), ele satisfac relațiile

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}. \quad (1.2.40)$$

Problema directă a dinamicii sistemelor de particule constă în aflarea funcțiilor vectoriale  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  (care dau pozițiile particulelor în funcție de timp) pornind de la cunoașterea forțelor  $\mathbf{F}_i$  și integrarea ecuațiilor (1.2.39). Problema inversă a dinamicii sistemelor de particule constă în aflarea, prin intermediul ecuațiilor (1.2.39), a forțelor  $\mathbf{F}_i$  pornind de la cunoașterea vectorilor de poziție  $\mathbf{r}_i$  ca funcții de timp (adică a funcțiilor vectoriale  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ ).

Să stabilim acum câteva relații pentru mărimi ce caracterizează un sistem de particule în ansamblul său. Din (1.2.39) prin însumare și ținând cont de (1.2.40) se obține

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(E)}. \quad (1.2.41)$$

Pe de altă parte se poate scrie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dt^2} (m_i \mathbf{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right\} = \frac{d^2}{dt^2} M \mathbf{R} = M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

cu

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (1.2.43)$$

Mărimea  $M$  reprezintă *masa totală* a sistemului de particule, iar  $\mathbf{R}$  definește poziția unui punct numit *centru de masă* (sau centru de inerție) al sistemului de particule. Din (1.2.41) și (1.2.42) rezultă relația

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(E)}. \quad (1.2.44)$$

Această relație arată că centrul de masă al unui sistem de particule se mișcă asemenea unei particule de masă egală cu masa totală a sistemului,



plasată în respectivul centru și asupra căreia acționează o forță egală cu rezultanta forțelor exterioare. Din relațiile anterioare se vede că forțele interioare  $\mathbf{F}_{ji}$  nu exercită nici o influență asupra mișcării centrului de masă.

*Impulsul total* al sistemului de particule prin definiție este egal cu suma impulsurilor particulelor din sistem, adică

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{R} = M\mathbf{V}. \quad (1.2.45)$$

Din (1.2.43)–(1.2.45) rezultă relația

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \mathbf{F}^{(E)}. \quad (1.2.46)$$

De aici se vede că dacă rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra unui sistem de particule este nulă ( $\mathbf{F}^{(E)} = 0$ ), atunci impulsul total al sistemului se conservă (deoarece  $d\mathbf{P}/dt = 0$  și deci  $\mathbf{P} = \text{const.}$ ). Această afirmație exprimă *legea de conservare a impulsului total* pentru un sistem de particule. Din (1.2.45) se vede că viteza  $\mathbf{V}$  a centrului de masă este constantă dacă impulsul total al sistemului se conservă.

*Momentul cinetic total* al unui sistem de particule se definește prin relația

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (1.2.47)$$

Ținând cont de relațiile (1.2.39) și (1.2.40) putem scrie relațiile

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}. \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

Din fig. 1.2.8 se observă că  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  definește poziția particulei  $i$  în raport cu particula  $j$ . Dacă presupunem că forța  $\mathbf{F}_{ji}$  cu care particula  $i$



acționează asupra particulei  $j$  este orientată în lungul direcției ce unește particulele respective — adică pe direcția vectorului  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  — vom avea  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$

Din (1.2.48) obținem

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i^{(E)} = \mathbf{M}^{(E)} \quad (1.2.49)$$

unde  $\mathbf{M}^{(E)}$  reprezintă *rezultanta momentelor forțelor exterioare*. Din (1.2.49) se vede că dacă rezultanta momentelor forțelor exterioare care acționează

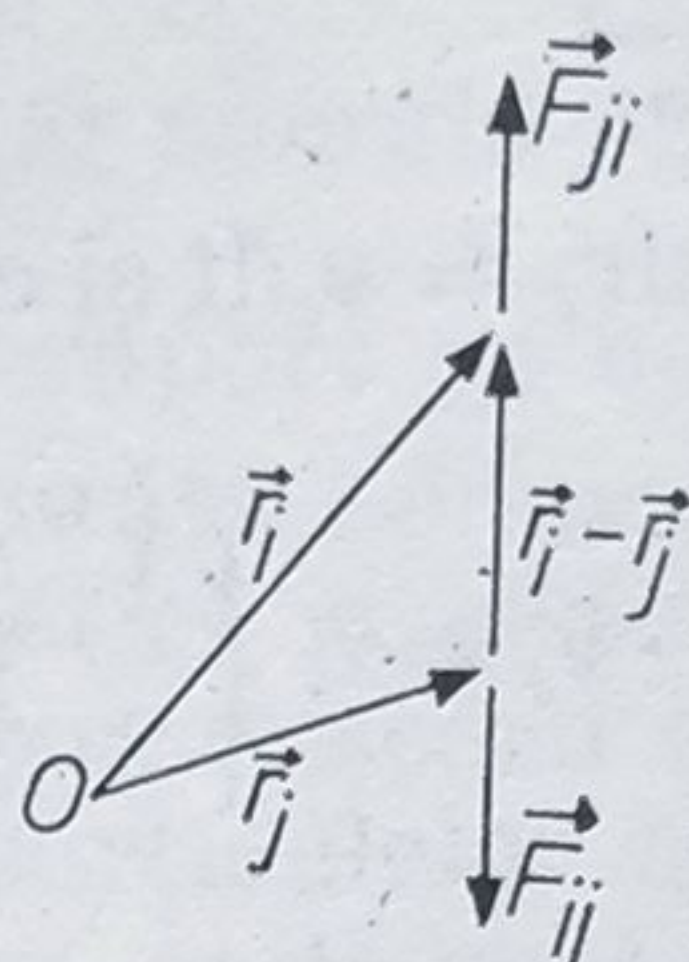


Fig. 1.2.8

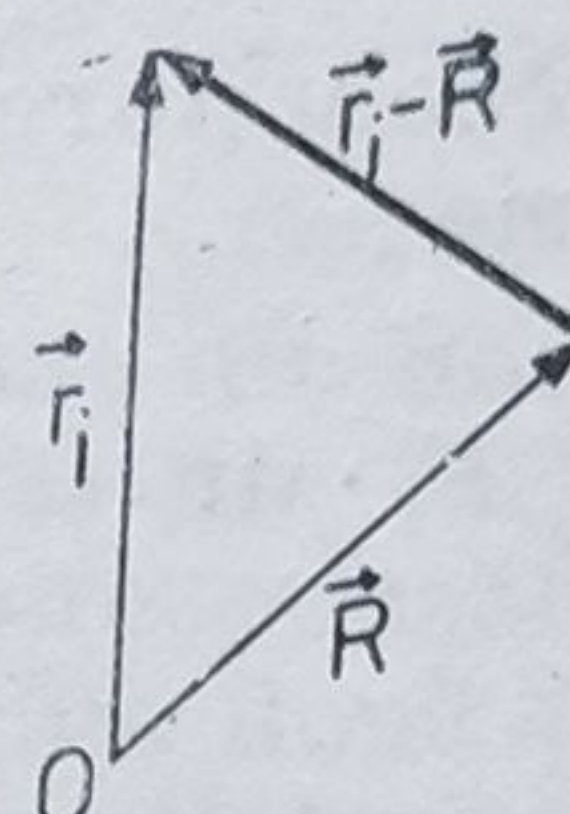


Fig. 1.2.9

asupra unui sistem de particule este nulă ( $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ ), atunci momentul cinetic total al sistemului se conservă  $\mathbf{L} = \text{constant}$  (deoarece  $d\mathbf{L}/dt = 0$ ). Această afirmație reprezintă enunțul *legii de conservare a momentului cinetic total* al unui sistem de particule. (De precizat că această lege este îndeplinită numai dacă sînt îndeplinite relațiile  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = 0$ ).

Să exprimăm acum momentul cinetic total  $\mathbf{L}$  al unui sistem de particule în funcție de impulsul total  $\mathbf{P}$  al sistemului. Din (1.2.47) și ținînd cont de figura 1.2.9 putem scrie următorul șir de relații

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) + \mathbf{R}] \times \mathbf{p}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{p}_i + \mathbf{R} \times \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right] = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

Mărimea  $\mathbf{L}_{CM} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{p}_i$  reprezintă momentul cinetic al sistemului în raport cu centrul de masă și este numit *moment cinetic intern* al sistemului de particule. Din (1.2.50) se vede că momentul cinetic total  $\mathbf{L}$  se poate exprima în funcție de impulsul total  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$  al sistemului de particule. Se observă ușor că termenul  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  din expresia lui  $\mathbf{L}$  depinde de alegerea originii  $O$  a sistemului de referință (deoarece, după cum se vede din fig. 1.2.9, vectorul  $\mathbf{R}$  depinde de această alegere). Totodată se observă



că nici vectorul  $\mathbf{r}_i - \mathbf{R}$  (care dă poziția particulei  $i$  în raport cu centrul de masă) și nici impulsul  $\mathbf{p}_i$  (al particulei  $i$ ) nu depind de respectiva alegere. În consecință, momentul cinetic intern  $\mathbf{L}_{CM}$  al unui sistem de particule este independent de alegerea originii sistemului de referință și este invariant (rămâne nemodificat) față de orice schimbare a respectivei origini.

Să prezentăm acum câteva relații energetice referitoare la un sistem de particule. Dacă sub acțiunea forțelor  $\mathbf{F}_i$  particulele din sistem suferă deplasările  $d\mathbf{r}_i$ , atunci forțele respective, în ansamblul lor, efectuează lucrul mecanic

$$\delta \mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i. \quad (1.2.51)$$

Ținând cont de relațiile (1.2.39) și de faptul că  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$  și că  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  se poate scrie:

$$\delta \mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^N d(m_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i = d \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \right\}. \quad (1.2.52)$$

Mărima

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (1.2.53)$$

se numește *energie cinetică totală* a sistemului de particule. Relația (1.2.52) se transcrie în relația

$$\delta \mathcal{A} = dT \quad (1.2.54)$$

care arată că lucrul mecanic elementar al tuturor forțelor care acționează asupra particulelor din sistem este egal cu variația energiei cinetice totale a sistemului.

Să exprimăm acum energia cinetică totală a unui sistem în funcție de viteza  $\mathbf{V}$  a centrului de masă. Ținând cont de relațiile (1.2.43) și (1.2.45) se poate scrie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{V} + (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N 2m_i \mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \cdot \sum_{i=1}^N m_i + \mathbf{V} \cdot \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 M + \\ &+ \mathbf{V} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})^2 \end{aligned}$$



adică energia cinetică totală a sistemului se poate scrie sub forma

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - V)^2. \quad (1.2.55)$$

Se observă că  $V$  reprezintă viteza centrului de masă și  $v_i - V$  reprezintă viteza particulei  $i$  în raport cu centrul de masă. Atunci relația (1.2.55) arată că energia cinetică a unui sistem de particule se compune din doi termeni: energia cinetică legată de mișcarea centrului de masă

$\left( \frac{1}{2} M V^2 \right)$  și energia cinetică a mișcărilor par-

ticulelor în raport cu centrul de masă.

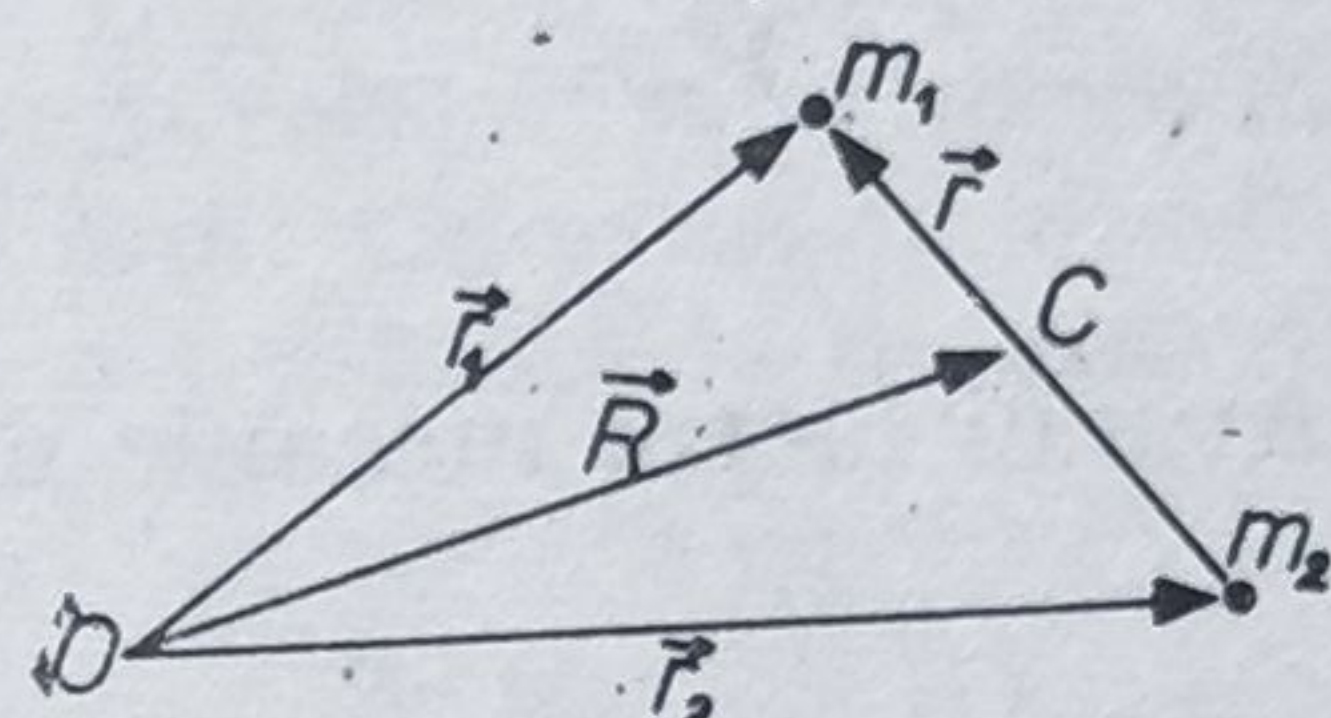


Fig. 1.2.10

Vom arăta acum că în cazul unui sistem format din două particule energia cinetică a sistemului se poate exprima prin doi termeni: unul corespunzător mișcării centrului de masă și unul corespunzător mișcării relative a particulelor una față de alta. Să considerăm două particule de mase  $m_1$  și  $m_2$  și de vectori de poziție  $r_1$  și  $r_2$ . Mișcarea relativă a celor două particule este descrisă (fig. 1.2.10) de vectorul

$$r = r_1 - r_2. \quad (1.2.56)$$

Pe de altă parte, conform cu (1.2.43), pentru un astfel de sistem vectorul  $R$  al centrului de masă  $C$  este definit prin relația

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = R(m_1 + m_2) = RM. \quad (1.2.57)$$

Din relațiile (1.2.56) și (1.2.57) se pot exprima vectorii  $r_1$  și  $r_2$  în funcție de  $r$  și  $R$  prin formulele

$$r_1 = \frac{1}{M} (m_2 r + MR) \quad r_2 = \frac{1}{M} (MR - m_1 r). \quad (1.2.58)$$

Atunci energia cinetică a sistemului se poate exprima în următoarele forme

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \quad (1.2.59)$$

unde mărimea

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2.60)$$

se numește *masă redusă* a sistemului de două particule.

Să revenim la discutarea expresiei (1.2.51) a lucrului mecanic efectuat de forțele  $F_i = F_i^{(E)} + \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ji}$ . Dacă presupunem că atît forțele externe



$\mathbf{F}_i^{(E)}$  cît și forțele interne  $\mathbf{F}_{ji}$  sînt conservative atunci se poate defini o energie potențială a sistemului de particule. Pentru forțe conservative se poate scrie

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = - \nabla_i V_i^{(E)} = - \frac{dV_i^{(E)}}{d\mathbf{r}_i} \quad (1.2.61)$$

$$\mathbf{F}_{ji} = - \nabla_i V_{ji} = - \frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = \nabla_j V_{ij} = - \mathbf{F}_{ij}.$$

Atunci lucrul mecanic dat de (1.2.51) se poate transcrie în felul următor

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{dV_i^{(E)}}{d\mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i - \\ &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{dV_{ji}}{d\mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = - d \left( \sum_{i=1}^N V_i^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V_{ji} \right). \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

Mărimea

$$V = \sum_{i=1}^N V_i^{(E)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1, i \neq j}}^N V_{ji} \quad (1.2.63)$$

reprezintă *energia potențială totală* a sistemului de particule. Ea cuprinde doi termeni: energia potențială a sistemului în câmpul forțelor externe  $\left( \sum_{i=1}^N V_i^{(E)} \right)$  și energia potențială de interacțiune reciprocă a particulelor din interiorul sistemului  $\left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1, i \neq j}}^N V_{ji} \right)$ . Din (1.2.50) și (1.2.51) rezultă

$$\delta \mathcal{A} = -dV. \quad (1.2.64)$$

Combinînd această relație cu (1.2.42) se obține

$$dE = d(T + V) = 0 \quad (1.2.65)$$

sau

$$E = T + V = \text{const.} \quad (1.2.66)$$

$E$  se numește *energie mecanică totală* a sistemului de particule.

Relația (1.2.66) arată că dacă forțele ce acționează asupra unui sistem de particule (atît cele externe cît și cele interne) sînt conservative atunci energia mecanică totală  $E$  a sistemului se conservă.

Referindu-ne în general la forțele  $\mathbf{F}_i$  care acționează asupra unui sistem de particule trebuie reținută următoarea precizare: la ora actuală



în fizică se admite că toate forțele fundamentale (primare) de interacțiune între particulele materiale sînt forțe conservative. Forțele neconservative (cum sînt, de exemplu, forțele de frecare) nu sînt decît aproximații grosiere, mediate macroscopic, ale acțiunii forțelor fundamentale. Forțele neconservative apar doar între corpuri care nu mai pot fi considerate punctiforme, deoarece structura lor internă joacă un rol ce nu poate fi neglijat.

Legile mișcării mecanice menționate mai sus sînt locale în raport cu timpul în sensul că ele se referă la o valoare dată (locală) a timpului. Pe lîngă această categorie de legi se mai pot scrie și legi (relații) referitoare la valori medii în timp ale mărimilor mecanice. Definim valoarea medie în timp  $\langle B \rangle$  a unei mărimi mecanice  $B = B(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$  referitoare la un sistem de particule, prin relația

$$\langle B \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau B(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) dt. \quad (1.2.67)$$

Fie acum pentru un sistem de particule mărimea scalară

$$G = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (1.2.68)$$

$\mathbf{p}_i$  și  $\mathbf{r}_i$  fiind impulsurile respectiv vectorii de poziție ai particulelor din sistem. Ținînd cont de (1.2.39) și (1.2.53) se poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \\ &= 2T + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (1.2.69)$$

$T$  fiind energia cinetică totală a sistemului și  $\mathbf{F}_i$  forța care acționează asupra particulei  $i$ . Dacă mișcarea sistemului este periodică or dacă este finită (adică sistemul se mișcă în regiuni finite ale spațiului și energia lui totală și alte mărimi referitoare la sistem în întregime sînt finite) se vede ușor că

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 0. \quad (1.2.70)$$

Atunci din (1.2.67) — (1.2.70) rezultă

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle. \quad (1.2.71)$$

Mărimea din partea dreaptă a acestei relații se numește *virialul sistemului*, iar relația este cunoscută sub denumirea de *teorema virialului*.



Dacă câmpul de forțe  $\mathbf{F}_i$  ce acționează asupra sistemului este conservativ evident că se poate scrie

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N (\nabla_i V) \cdot \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} z_i \right) \quad (1.2.72)$$

unde  $V$  este energia potențială a sistemului. Să considerăm cazul particular când  $V$  este o funcție omogenă de ordinul  $n$  în funcție de variabilele  $x_i, y_i, z_i$ , când ea satisface relația

$$V(\lambda x_i, \lambda y_i, \lambda z_i) = \lambda^n V(x_i, y_i, z_i). \quad (1.2.73)$$

Derivînd aici în raport cu  $\lambda$  și punînd apoi  $\lambda = 1$  rezultă relația Euler

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} z_i \right) = n V(x_i, y_i, z_i). \quad (1.2.74)$$

Pentru cazul menționat din (1.2.71)–(1.2.74) rezultă că teorema variationalului (1.2.71) capătă forma particulară

$$2\langle T \rangle = n\langle V \rangle. \quad (1.2.75)$$

Pe de altă parte pentru un astfel de sistem are loc conservarea energiei, adică

$$T + V = E = E_0 = \text{const.} \quad (1.2.76)$$

Atunci pentru sistemul considerat mediile în timp  $\langle T \rangle$  și  $\langle V \rangle$  ale energiilor cinetică și potențială se exprimă în funcție de energia totală a sistemului  $E_0$  prin relațiile

$$\langle T \rangle = \frac{n}{n+2} E_0, \quad \langle V \rangle = \frac{2}{n+2} E_0 \quad (1.2.77)$$

(de notat că  $\langle E \rangle = E = E_0$ ).

### § 1.3. LEGĂTURI ȘI COORDONATE GENERALIZATE

Din cele prezentate în paragraful anterior rezultă că studiul mișcărilor mecanice ale sistemelor de particule, în sensul de a afla vectorii de poziție  $\mathbf{r}_i$  ai particulelor, ca funcții de timp se reduce la aflarea forțelor  $\mathbf{F}_i$  și apoi la integrarea sistemului de ecuații

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i. \quad (1.3.1)$$



Realizarea efectivă a respectivului studiu este îngreunată, în multe cazuri de interes practic, de faptul că sistemul de particule poate să fie supus la anumite *legături* care sînt dificil de luat în considerație în sistemul de ecuații (1.3.1) (mai exact în expresiile forțelor  $F_i$ ). Prin legături se înțeleg constrîngerile care îngădesc mișcarea sistemului obligînd particulele să se miște numai în anumite domenii restrînse ale spațiului. De exemplu, o particulă plasată în unul din capetele unei bare rigide care are celălalt capăt prins printr-o articulație de un punct fix va fi obligată să se miște pe o suprafață sferică. Sau, un alt exemplu, o particulă plasată într-un vas închis cu pereții rigizi se poate mișca doar în domeniul reprezentat de volumul interior al vasului. Legăturile se pot caracteriza de regulă prin anumite relații matematice. Astfel în exemplul particulei obligate să se miște pe o suprafață sferică legătura poate fi caracterizată prin relația

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.3.2)$$

dacă sfera se ia de rază  $R$  și cu centrul plasat în originea axelor de coordonate,  $x$ ,  $y$  și  $z$  fiind coordonatele carteziene ale particulei. În cazul exemplului cu particula închisă într-un vas legăturile pot fi exprimate prin relațiile

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq z \leq L \quad (1.3.3)$$

dacă vasul se ia de forma unui cub cu latura  $L$ , avînd muchiile paralele cu axele de coordonate și un colț plasat în originea axelor.

Legăturile descrise matematic prin egalități (ca de exemplu (1.3.2)) se numesc *legături bilaterale*. Cele care nu se pot descrie prin egalități (ca de exemplu legătura descrisă de (1.3.3)) se numesc *legături unilaterale*. Clasificarea legăturilor la care sînt supuse mișcările mecanice se face și în funcție de faptul dacă relațiile matematice care le descriu conțin sau nu timpul în mod explicit. Legăturile a căror exprimare matematică nu conține explicit timpul (ca, de exemplu, cele exprimate de (1.3.2) și (1.3.3)) se numesc *legături staționare* (sau scleronome). Cele a căror exprimare matematică conține explicit timpul se numesc *legături nestaționare* (sau reonome). Ca exemplu de legătură reonomă putem da legătura la care este supusă o particulă obligată să se miște pe o suprafață sferică antrenată într-o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza  $v$  ( $v, 0, 0$ ). O asemenea legătură se descrie prin relația

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.3.4)$$

Pentru mișcările particulelor existența legăturilor este echivalentă cu existența unor forțe suplimentare, care constrîng mișcările respective să se desfășoare doar în domeniile permise de legături. Aceste forțe suplimentare trebuie luate în considerare la scrierea ecuațiilor de mișcare și la integrarea lor. Or, în cele mai multe cazuri, expresia analitică concretă a acestor forțe suplimentare este dificil de găsit (în sensul că nu dispunem de anumite principii generale care să ne permită găsirea relativ ușor a forțelor suplimentare care se datoresc legăturilor). De aceea, în general,



existența legăturilor creează dificultăți pentru studiul mișcărilor sistemelor de particule.

În cazul legăturilor bilaterale exprimate prin egalități în care intervin coordonatele dificultățile menționate pot fi ocolite prin folosirea *coordonatelor generalizate* și rescrierea ecuațiilor de mișcare în limbajul respectivelor coordonate. Să vedem în continuare ce sînt coordonatele generalizate. Un sistem format din  $N$  particule punctiforme, ale căror mișcări nu sînt supuse la nici un fel de legături, este caracterizat prin  $3N$  grade de libertate, pe care le descriem cu ajutorul a  $3N$  variabile (de regulă, coordonate carteziene). Dacă sistemul este supus la legături bilaterale care se exprimă prin egalități matematice, atunci între cele  $3N$  variabile există  $k$  relații de legătură, și deci cele  $3N$  variabile nu mai sînt complet independente între ele. Într-o asemenea situație pentru caracterizarea completă a stării sistemului de particule sînt necesare și suficiente  $3N - k$  variabile independente între ele. Un astfel de sistem de variabile, pe care îl vom nota generic prin  $\{q_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 3N - k$ ), formează un sistem de *coordonate generalizate*. De notat că un același sistem de particule poate fi descris cu ajutorul a diferite sisteme de coordonate generalizate. Astfel, de exemplu, pentru o particulă constrînsă să se miște într-un plan se pot folosi fie coordonatele carteziene  $x$  și  $y$  fie coordonatele polare  $\rho$  și  $\varphi$  (vezi fig. 1.1.1 și tabelul 1.1.1). De consemnat în plus faptul că variabilele folosite drept coordonate generalizate nu au obligatoriu dimensiunea de lungime (cum au coordonatele carteziene); ele pot fi și mărimi de altă natură ca mărimi unghiulare sau mărimi cu dimensiune de impuls, moment cinetic sau energie.

Să prezentăm în continuare cîteva sisteme de coordonate generalizate care pot fi folosite în descrierea poziției unei particule constrînsă să se miște pe o suprafață: plană (fig. 1.3.1, a), sferică (fig. 1.3.1, b), cilindrică (fig. 1.3.1, c) sau conică (fig. 1.3.1, d). Pentru cele patru situații seturile de coordonate generalizate cu ajutorul cărora se poate defini în mod univoc poziția particulei sînt date în tabelul 1.3.1. Tot în același tabel se indică și relațiile prin care coordonatele carteziene  $x$ ,  $y$  și  $z$  ale particulei se exprimă în funcție de coordonatele generalizate.

În exemplele menționate mai sus apar următoarele mărimi constante (care nu sînt variabile): (b)  $r$  — raza sferei, (c)  $\rho$  — raza cilindrului și (d)  $A = \tan \theta$ ,  $\theta$  fiind unghiul de deschidere al conului (fig. 1.3.1, d). Din

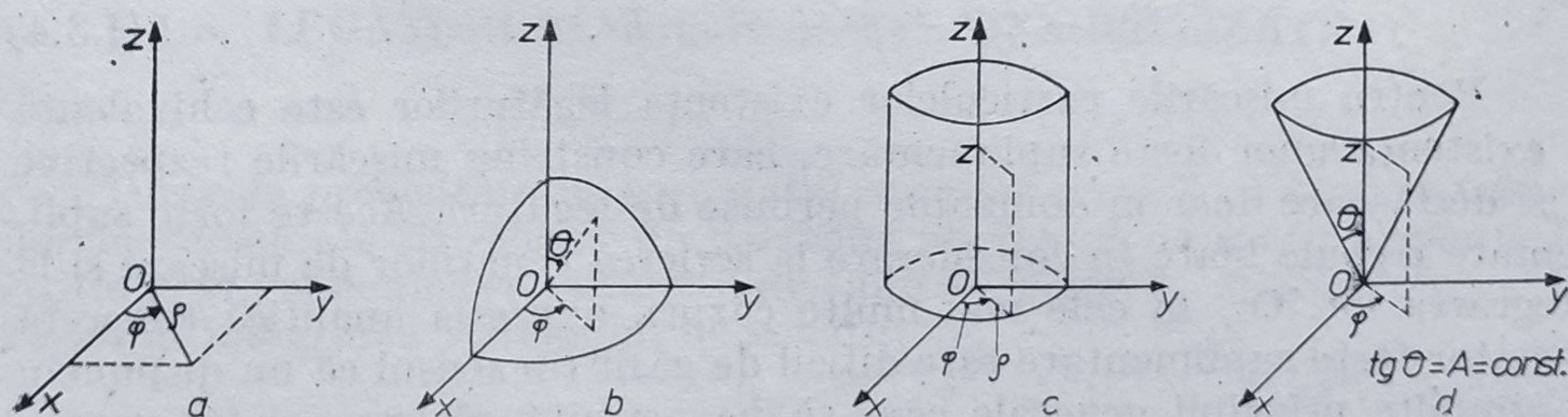


Fig. 1.3.1



Tabelul 1.3.1.

Situația din figura 1.3.1.	Coordonatele carteziane în funcție de			Coordonatele generalizate
	$x$	$y$	$z$	
a	$q_1$	$q_2$	0	$q_1 = x, q_2 = y$
	$q_1 \cos q_2$	$q_1 \sin q_2$	0	sau $q_1 = \rho, q_2 = \varphi$
b	$r \cos q_1 \sin q_2$	$r \sin q_1 \sin q_2$	$r \cos q_2$	$q_1 = \varphi, q_2 = \theta$
c	$\rho \cos q_1$	$\rho \sin q_1$	$q_2$	$q_1 = \varphi, q_2 = z$
d	$A q_2 \cos q_1$	$A q_2 \sin q_1$	$q_2$	$q_1 = \varphi, q_2 = z$

tabelul 1.3.1 rezultă că în cazul mișcării unei particule pe o suprafață (ca în exemplele citate mai sus) coordonatele carteziane  $\{x_i\}_{i=1}^3 = \{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$  ale particulei se exprimă în funcție de coordonatele generalizate prin relații de forma

$$\dot{x}_i = x_i(q_1, q_2). \quad (1.3.5)$$

Vorbind la modul general putem spune că coordonatele carteziane

$$\{x_i\}_{i=1}^{3N} \equiv \{(x)_1, (y)_1, (z)_1, (x)_2, (y)_2, (z)_2, \dots, (x)_N, (y)_N, (z)_N\}$$

ale unui sistem de  $N$  particule ale căror mișcări sînt supuse la legături exprimate prin  $k$  relații, se pot exprima în funcție de coordonatele generalizate  $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$  sub forma

$$x_i = x_i(q_j) = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}). \quad (1.3.6)$$

## § 1.4. ECUAȚII LAGRANGE

Să revenim la problema descrierii mișcării unui sistem de  $N$  puncte materiale supus la legături bilaterale exprimate prin  $k$  egalități în care sînt implicate coordonatele. Dacă notăm generic cu  $\{x_i\}_{i=1}^{3N} \equiv \{(x)_1, (y)_1, (z)_1, (x)_2, (y)_2, (z)_2, \dots, (x)_N, (y)_N, (z)_N\}$  ansamblul coordonatelor carteziane ale celor  $N$  particule atunci problema studiului menționat se reduce la problema studiului sistemului de ecuații diferențiale

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m_n \ddot{x}_n = F_n \quad (n = 1, 2, \dots, 3N) \quad (1.4.1)$$

(cu  $m_1 = (m)_1 = (m)_2 = (m)_3$  masa primei particule, ș.a.m.d.) în condițiile cînd mai avem satisfăcute relațiile

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.4.2)$$



care descriu legăturile bilaterale. După cum am menționat și în paragraful precedent încorporarea relațiilor (1.4.2) în ecuațiile de mișcare (1.4.1) trebuie făcută prin intermediul unor forțe care exprimă acțiunea legăturilor asupra sistemului de particule. Expresia analitică concretă a respectivelor forțe este însă în general greu de stabilit și de aceea studiul mișcărilor sistemului cu ajutorul ecuațiilor (1.4.1) implică dificultăți. În continuare vom prezenta o modalitate de studiu a mișcărilor sistemului care să evite dificultățile menționate.

Date fiind relațiile (1.4.2) așa cum am precizat și în paragraful precedent pentru a caracteriza complet starea sistemului putem folosi un set de coordonate generalizate  $\{q_j\}_{j=1}^s$  ( $s = 3N - k$ ). Coordonatele carteziene  $\{x_n\}_{n=1}^{3N}$  ale particulelor se pot exprima în funcție de coordonatele generalizate  $\{q_j\}_{j=1}^s$  prin relații de forma

$$x_n = x_n(q_j) = x_n(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (n = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.4.3)$$

Atunci problema descrierii mișcărilor sistemului cu ansamblul relațiilor (1.4.1) și (1.4.2) poate fi formulată ca o problemă a descrierii mișcărilor respective în funcție de coordonatele generalizate. Din (1.4.3) prin derivare în raport cu timpul se obține

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \ddot{x}_n = \sum_{i,j=1}^s \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \ddot{q}_j \quad (1.4.4)$$

unde  $\dot{q}_j = (dq_j/dt)$  și  $\ddot{q}_j = (d^2q_j/dt^2)$  reprezintă vitezele și accelerațiile generalizate. Introducând cea de a doua din relațiile (1.4.4) în (1.4.1), amplificând cu  $\partial x_n / \partial q_e$  și însumând după indicele  $n$  obținem

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \left[ \frac{\partial x_n}{\partial q_e} \sum_{i,j=1}^s \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_e} \sum_{i=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \ddot{q}_i \right] = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_e} = Q_e \quad (1.4.5)$$

Mărimea

$$Q_e = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_e} \quad (1.4.6)$$

o numim *forță generalizată* corespunzătoare (asociată) coordonatei generalizate  $q_e$ . Pentru a justifica această denumire este suficient să calculăm lucrul mecanic  $\delta \mathcal{A}$  corespunzător unor schimbări infinitezimale în pozițiile particulelor, schimbări descrise de deplasările infinitezimale  $dx_i$  sau, echivalent, de variațiile infinitezimale  $dq_i$ . Ținând cont de (1.4.3) și de (1.4.5) lucrul respectiv se poate scrie sub forma

$$\delta \mathcal{A} = \sum_{n=1}^{3N} F_n dx_n = \sum_{n=1}^{3N} \sum_{l=1}^s F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_l} dq_l = \sum_{l=1}^s Q_l dq_l. \quad (1.4.7)$$



Această ultimă relație arată că întrucît  $Q_i \cdot dq_i$  reprezintă un lucru mecanic elementar este justificat să denumim pe  $Q_i$  forță generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate  $q_i$ .

Energia cinetică  $T$  a sistemului de particule se poate scrie sub forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{i,j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (1.4.8)$$

Din această relație putem scrie

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.4.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_j + \sum_{n=1}^{3N} m_n \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \ddot{q}_j. \quad (1.4.11)$$

Se vede acum ușor că din (1.4.5), (1.4.9) și (1.4.11) rezultă relațiile

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (1.4.12)$$

Acestea sînt tocmai *ecuațiile Lagrange*. Ele sînt ecuațiile de mișcare ale sistemului de particule scrise în funcție de coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$ . Desigur că energia cinetică  $T$  și forțele generalizate  $\{Q_i\}_{i=1}^s$  trebuie în acest caz scrise ca funcții de coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și de vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$ . O proprietate remarcabilă a ecuațiilor Lagrange este aceea că ele au aceeași formă analitică de exprimare indiferent de setul de coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  cu ajutorul căruia se descrie starea sistemului. În particular, în cazul unui sistem nesupus nici unei legături (deci pentru care numărul  $k$  al ecuațiilor de legătură (1.4.2) este nul) ecuațiile Lagrange au aceeași formă de exprimare (1.4.12) chiar și cînd pentru descrierea sistemului drept coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  ( $s = 3N - k = 3N$ ) folosim coordonatele carteziane  $\{x_n\}_{n=1}^{3N}$ .

În cazul cînd forțele  $F_n$  ce acționează asupra particulelor din sistem sînt conservative se poate scrie

$$F_n = - \frac{\partial V}{\partial x_n} \quad (1.4.13)$$



unde  $V = V(x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$  reprezintă energia potențială a sistemului de particule scrisă ca funcție de coordonatele carteziane  $\{x_n\}_{n=1}^{3N}$ . Ținând cont de (1.4.3) se vede că putem scrie energia potențială  $V$  ca funcție de coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  sub forma

$$V = V(x_n(q_i)) = V(q_i). \quad (1.4.14)$$

Ținând cont de (1.4.13) și (1.4.14) forța  $Q_i$  definită de (1.4.6) se poate scrie sub forma

$$Q_i = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} = - \sum_n \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.4.15)$$

Deci se vede că în cazul când particulele sînt supuse acțiunii unor forțe  $\{F_n\}_{n=1}^{3N}$  de tip conservativ, forța generalizată  $Q_i$  se poate exprima ca derivata parțială a energiei potențiale  $V$  în raport cu coordonata generalizată  $q_i$ , luată cu semn schimbat.

Introducînd (1.4.15) în (1.4.12) și ținînd cont de faptul că în cazul conservativ energia potențială  $V$  nu depinde de vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$ , ecuațiile (1.4.12) se transcriu în forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.4.16)$$

unde

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (1.4.17)$$

Mărimea  $\mathcal{L}$  poartă denumirea de *lagrangeian* (sau funcție Lagrange) a sistemului de particule. Ecuațiile (1.4.16) reprezintă ecuațiile Lagrange pentru cazul când particulele se mișcă într-un câmp de forțe conservative.

De notat că atunci când lucrăm cu ecuațiile Lagrange energia cinetică  $T$ , forțele generalizate  $Q_i$ , energia potențială  $V$  și lagrangeianul  $\mathcal{L}$  se scriu ca funcții de coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și de vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$ . Astfel, pentru o particulă constrinsă să se miște pe una din suprafețele reprezentate în fig. 1.3.1, expresia lagrangeianului particulei este dată în tabelul 1.4.1.

Ecuațiile Lagrange din punct de vedere matematic sînt ecuații diferențiale de ordinul doi în raport cu coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$ . Integrarea acestor ecuații diferențiale conduce la găsirea coordonatelor generalizate ca funcții de timp, adică a funcțiilor  $q_i = q_i(t)$ . Această integrare rezolvă complet problema studiului mișcărilor mecanice ale sistemului de particule, deoarece funcțiile  $q_i = q_i(t)$  odată cunoscute (ceea ce asigură și cunoașterea vitezelor generalizate  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$  ca funcții de timp) asigură definirea univocă a stării mecanice a sistemului. Acest mod de studiu al mișcărilor mecanice, bazat pe ecuațiile Lagrange înlocuiește studiul bazat pe ecuațiile newtoniene (1.4.1) complementate cu relațiile



Tabelul 1.4.1

Situația din fig. 1.3.1.	Coordonatele generalizate	Lagrangeianul unei particule de masă $m$ ce se mișcă pe suprafața din fig. 1.3.1.
a	$q_1 = x, q_2 = y$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2) \quad (1.4.18)$
	sau $q_1 = \rho, q_2 = \varphi$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2) \quad (1.4.19)$
b	$q_1 = \varphi, q_2 = \theta$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} r^2 (\dot{q}_1^2 \sin^2 q_2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2) \quad (1.4.20)$
c	$q_1 = \varphi, q_2 = z$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\rho^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2) \quad (1.4.21)$
d	$q_1 = \varphi, q_2 = z$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} A^2 q_2^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m}{2} (A^2 + 1) \dot{q}_2^2 - V(q_1, q_2) \quad (1.4.22)$

(1.4.2), care exprimă legăturile bilaterale. Se observă că în varianta de studiu bazată pe ecuațiile Lagrange nu trebuie adăugate suplimentar relații care să exprime legăturile, cum trebuie făcut în varianta bazată pe ecuațiile Newton. Această particularitate a formalismului ecuațiilor Lagrange se datorește faptului că restricțiile (constrîngerile) impuse de legături sînt incorporate în aparatul matematic al formalismului prin alegerea coordonatelor generalizate. Particularitatea menționată a formalismului ecuațiilor Lagrange (de a nu necesita scrierea unor relații suplimentare care să exprime legăturile) face de multe ori folosirea acestui formalism mai avantajoasă (sub aspectul calculelor matematice) decît formalismul ecuațiilor Newton (în care trebuie incluse întotdeauna relații, suplimentare la ecuațiile Newton, care să exprime legăturile).

Să adăugăm acum încă o observație referitoare la ecuațiile Lagrange. În forma generală (1.4.12) sau în forma conservativă (1.4.16) respectivele ecuații au fost deduse în ipoteza că legăturile la care este supus sistemul sînt staționare (adică funcțiile  $f_j = f_j(x_n)$  din (1.4.2) și  $x_n = x_n(q_j)$  din (1.4.3) nu depind explicit de timp). Se poate demonstra ușor că ecuațiile Lagrange sînt adevărate și în cazul cînd legăturile sînt nestaționare (deci cînd în locul funcțiilor (1.4.2) și (1.4.3) avem funcțiile  $f_j = f_j(x_n, t)$  și  $x_n = x_n(q_j, t)$  dependente explicit de timp).

Ca și varianta generală (1.4.12) varianta conservativă (1.4.16) a ecuațiilor Lagrange are aceeași formă de exprimare independentă de setul de coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  folosit pentru descrierea stării sistemului de particule. Aceasta face posibilă folosirea ecuațiilor Lagrange conservative (1.4.16) și în cazul sistemelor nesupuse la legături, cu coordonatele carteziane  $\{x_n\}_{n=1}^{3N} = \{(x)_1, (y)_1, (z)_1, (x)_2, (y)_2, (z)_2, \dots, (x)_N, (y)_N, (z)_N\}$



pe post de coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  ( $s = 3N$ ,  $k$  fiind egal cu zero). Într-un asemenea caz ecuațiile Lagrange (1.4.16) se scriu sub forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 3N). \quad (1.4.23)$$

Uneori în locul coordonatelor carteziene  $\{x_n\}_{n=1}^{3N}$  se folosesc coordonatele vectoriale  $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$  reprezentând vectorii de poziție ai particulelor din sistem. Într-o astfel de notație vectorială ecuațiile (1.4.23) se transcriu sub forma;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.4.24)$$

cu  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ . De reținut că fiecare ecuație vectorială de tipul (1.4.24) conține de fapt trei ecuații scalare de tipul (1.4.23). Independența formei ecuațiilor Lagrange de setul de coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  face posibil ca în studiul mișcărilor sistemelor de particule să se folosească cu ușurință și alte tipuri de coordonate decât cele carteziene (de exemplu, coordonate sferice sau cilindrice; vezi fig. 1.1.1). Această posibilitate de alegere a coordonatelor poate fi folosită în vederea simplificării integrării ecuațiilor Lagrange privite ca ecuații diferențiale. Bineînțeles că scrierea ecuațiilor Lagrange în funcție de un set dat de coordonate generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  necesită în primul rând scrierea lagrangeianului sistemului ca funcție de respectivele coordonate. Dăm în tabelul 1.4.2, lagrangeianul unei particule ce execută o mișcare nesupusă nici unei legături, exprimat în coordonate: carteziene, sferice și cilindrice (vezi și fig. 1.1.1 și tabelul 1.1.1). Generalizarea expresiilor respective ale lagrangeianului, pentru cazul unui sistem de mai multe particule este, evident, un simplu exercițiu de calcul.

Tabelul 1.4.2

Tipul de coordonate	Coordonatele generalizate	Lagrangeianul unei particule
Carteziene	$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3) \quad (1.4.25)$
Sferice	$q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \theta$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_3 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3) \quad (1.4.26)$
Cilindrice	$q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$	$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3) \quad (1.4.27)$



Să facem acum câteva observații asupra mărimilor  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ . Din (1.4.25) se vede că mărimea

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 = m\dot{x} = mv_x = p_x \quad (1.4.28)$$

are semnificație de impuls (mai exact reprezintă componenta  $x$  a impulsului cartezian). De aceea, prin analogie, mărimea

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.4.29)$$

se numește *impuls generalizat* conjugat cu coordonata generalizată  $q_i$ . În conformitate cu această definiție pentru o particulă ce se mișcă în prezența legăturilor reprezentate în figura 1.3.1 impulsurile generalizate sînt date în tabelul 1.4.3. (vezi și tabelul 1.4.1). În tabelul 1.4.4 sînt date impulsurile generalizate pentru o particulă nesupusă nici unor legături, a cărei poziție este dată cu ajutorul a diferite seturi de coordonate generalizate: carteziene, sferice, cilindrice (vezi și tabelul 1.4.2). (În tabelul 1.4.4 pe lîngă notațiile  $\{p_i\}_{i=1}^3$  ale impulsurilor generalizate s-au indicat și notațiile  $\{p_\alpha\}$  ( $\alpha = x, y, z, r, \theta, \varphi, \rho$ ) folosite în mod frecvent pentru respectivele impulsuri).

Din tabelele 1.4.3 și 1.4.4 se vede că impulsurile generalizate  $\{p_i\}$  nu au numai semnificații (și dimensiuni) de impulsuri obișnuite (cum sînt de exemplu  $\{p_i\}_{i=1}^3$  din (1.4.35) sau  $p_1$  din (1.4.36)), ci și semnificații (și dimensiuni) de moment cinetic cum sînt de exemplu  $p_2$  și  $p_3$  din (1.4.36). Vorbind la modul general dacă coordonata generalizată  $q_i$  are semni i-

Tabelul 1.4.3

Situația din fig. 1.3.1	Coordonatele generalizate	Impulsurile generalizate
a	$q_1 = x, q_2 = y$ sau	$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{x}, p_2 = m\dot{q}_2 = m\dot{y} \quad (1.4.30)$
	$q_1 = \rho, q_2 = \varphi$	$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{\rho}, p_2 = m\dot{q}_1^2 \cdot \dot{q}_1 = m\rho^2\dot{\varphi} \quad (1.4.31)$
b	$q_1 = \varphi, q_2 = \theta$	$p_1 = mr^2\dot{q}_1 \sin^2 q_2 = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta$ $p_2 = mr^2\dot{q}_2 = mr^2\dot{\theta} \quad (1.4.32)$
c	$q_1 = \varphi, q_2 = z$	$p_1 = m\rho^2\dot{q}_1 = m\rho^2\dot{\varphi}, p_2 = m\dot{q}_2 = m\dot{z} \quad (1.4.33)$
d	$q_1 = \varphi, q_2 = z$	$p_1 = mA^2\dot{q}_1^2 \dot{q}_1 = mA^2z^2\dot{\varphi}, A = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{const.}$ $p_2 = m(A^2 + 1)\dot{q}_2 = m(A^2 + 1)\dot{z} \quad (1.4.34)$



Tabelul 1.4.4

Tipul de coordonate	Coordonatele generalizate	Impulsurile generalizate
Carteziene	$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$	$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{x} = p_x,$ $p_2 = m\dot{q}_2 = m\dot{y} = p_y$ $p_3 = m\dot{q}_3 = m\dot{z} = p_z$
Sferice	$q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \theta$	$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{r} = p_r$ $p_2 = m\dot{q}_1^2 \dot{q}_2 \sin q_3 = mr^2 \dot{\varphi} \sin \theta = p_\varphi$ $p_3 = m\dot{q}_1^2 \dot{q}_3 = mr^2 \dot{\theta} = p_\theta$
Cilindrice	$q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$	$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{\rho} = p_\rho,$ $p_2 = m\dot{q}_1^2 \dot{q}_2 = mr^2 \dot{\varphi} = p_\varphi$ $p_3 = m\dot{q}_3 = m\dot{z} = p_z$

cație de distanță (dimensiune de lungime), impulsul conjugat cu ea  $p_i$  are semnificația (dimensiunea) de impuls obișnuit, iar dacă  $q_i$  are semnificația (dimensiunea) de unghi,  $p_i$  are semnificația (dimensiunea) de moment cinetic. Dacă  $q_i$  are o altă semnificație (decît cele menționate),  $p_i$  are și el, în mod corespunzător, altă semnificație.

## § 1.5. ECUAȚIILE HAMILTON ȘI PARANTEZELE POISSON

Am văzut în paragraful precedent că mișcările mecanice ale unui sistem de particule pot fi descrise cu ajutorul ecuațiilor Lagrange. Aceasta presupune însă să se opereze cu coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și cu vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$  pentru a descrie starea sistemului. Dar această variantă nu este singura posibilă pentru a descrie starea mecanică a unui sistem de particule. De exemplu în loc să folosim coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$  pentru descrierea stării unui sistem de particule se pot folosi coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și impulsurile generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$  (definite în sensul relațiilor (1.4.29)). Atunci ecuațiile care descriu mișcarea sistemului trebuie formulate în termenii variabilelor  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și  $\{p_i\}_{i=1}^s$ . Vom urmări în continuare să prezentăm această formulare a ecuațiilor de mișcare.

Lagrangeianul  $\mathcal{L}$  al unui sistem aflat într-un câmp de forțe externe staționare (independente de timp) este o funcție de coordonatele generali-



zate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și de vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}$  cu ajutorul cărora descriem starea sistemului. Deci se poate scrie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.5.1)$$

și respectiv

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (1.5.2)$$

Ținând cont de relațiile (1.4.16) și (1.4.29) această relație se transcrie sub forma

$$[d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^s \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^s p_i d\dot{q}_i \quad (1.5.3)$$

Adăugînd și scăzînd în această relație termenul  $\sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i$  se obține

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \dot{p}_i dq_i + d \left( \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i \quad (1.5.4)$$

sau

$$d \left( \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = - \sum_{i=1}^s \dot{p}_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i. \quad (1.5.5)$$

Mărimea

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (1.5.6)$$

care apare în (1.5.5) sub semnul de diferențiere se numește *hamiltonian* (sau funcție Hamilton) a sistemului de particule. Luînd hamiltonianul ca funcție de coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și de impulsurile generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$ , adică

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i) \quad (1.5.7)$$

diferențiala totală a lui  $\mathcal{H}$  se poate scrie sub forma

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i. \quad (1.5.8)$$

Din relațiile (1.5.5)–(1.5.8) rezultă ecuațiile

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}. \quad (1.5.9)$$



Acestea sînt *ecuațiile Hamilton* sau *ecuațiile canonice* ale mișcării. Ele reprezintă ecuațiile căutate ale mișcării în sensul că descriu mișcările mecanice ale sistemului în termenii variabilelor  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și  $\{p_i\}_{i=1}^s$ . Pentru un sistem cu  $s$  grade de libertate ecuațiile Hamilton (1.5.9) reprezintă un sistem de  $2s$  ecuații diferențiale de ordinul întâi cu  $2s$  funcții de timp necunoscute:  $q_i = q_i(t)$ ,  $p_i = p_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Cele  $2s$  ecuații Hamilton de ordinul întâi înlocuiesc cele  $s$  ecuații Lagrange — care sînt ecuații diferențiale de ordinul doi.

Să arătăm în continuare că hamiltonianul unui sistem de particule se poate exprima cu ajutorul energiilor cinetică și potențială ale sistemului respectiv. Ținînd cont de relațiile (1.5.7), (1.4.8) și (1.4.17) se poate scrie

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) \dot{q}_i - (T - V) = \\ &= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + V = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i - T + V = \\ &= \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - T + V = 2T - T + V = T + V.\end{aligned}\quad (1.5.10)$$

Deci se obține

$$\mathcal{H} = T + V. \quad (1.5.11)$$

Această relație exprimă hamiltonianul unui sistem de particule ca suma energiilor cinetică și potențială a respectivului sistem. Deci hamiltonianul este tocmai funcția energiei totale a sistemului. De precizat că hamiltonianul  $\mathcal{H}$  al unui sistem este o funcție de coordonatele generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$  și de impulsurile generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$ . Astfel, ținînd cont de (1.4.25)–(1.4.27) și (1.4.35)–(1.4.37), hamiltonianul unei particule nesupusă nici unei legături are următoarele expresii:

— în coordonate carteziene

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3) \quad (1.5.12)$$

— în coordonate sferice

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2 \sin^2 q_3} + \frac{p_3^2}{q_1^2} \right) + V(q_1, q_2, q_3) \quad (1.5.13)$$

— în coordonate cilindrice

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + p_3^2 \right) + V(q_1, q_2, q_3). \quad (1.5.14)$$



Legat de folosirea, pentru descrierea mișcărilor mecanice, a coordonatelor generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și a impulsurilor generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$  în mecanică se definesc următoarele spații generalizate :

— *spațiul configurațiilor* : un spațiu cu  $s$  dimensiuni, ale cărui coordonate de bază sînt coordonatele generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  ;

— *spațiul impulsurilor* : un spațiu cu  $s$  dimensiuni, ale cărui coordonate de bază sînt impulsurile generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$  ;

— *spațiul fazelor* (sau spațiul fazic al lui Gibbs) : un spațiu cu  $2s$  dimensiuni, ale cărui coordonate de bază sînt constituite de ansamblul coordonatelor generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^s$  și al impulsurilor generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^s$ .

În limbaj matematic spațiul fazelor este un produs direct al spațiului configurațiilor cu spațiul impulsurilor. În spațiul fazelor starea mecanică a unui sistem de particule este definită de coordonatele unui punct numit *punct reprezentativ* (sau fază). Evoluției în timp a stării mecanice a sistemului îi corespunde o deplasare a punctului reprezentativ în spațiul fazelor, care astfel descrie o curbă numită *traietorie fazică* (sau *traietorie dinamică*).

Dacă privim hamiltonianul  $\mathcal{H}$  al unui sistem de particule ca fiind definit drept suma energiilor cinetică și potențială ale sistemului, atunci în caz general (inclusiv cel cînd sistemul se află într-un câmp de forțe externe dependente de timp)  $\mathcal{H}$  este funcție de coordonatele  $\{q_i\}_{i=1}^s$  de impulsurile  $\{p_i\}_{i=1}^s$  și de timpul  $t$ , adică

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t). \quad (1.5.15)$$

De aici se poate scrie

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (1.5.16)$$

Ținînd cont de ecuațiile Hamilton (1.5.9) din această relație se obține

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (1.5.17)$$

Această relație arată că dacă hamiltonianul  $\mathcal{H}$  nu depinde explicit de timp ( $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0$ ) rezultă relația

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad (1.5.18)$$

care reprezintă legea de conservare a energiei.

Dacă o mărime fizică  $A$  referitoare la un sistem de particule este definită ca o funcție de forma  $A = A(q_i, p_i, t)$  atunci se poate scrie

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (1.5.19)$$



Dacă se exprimă mărimile  $\{\dot{q}_i\}_{i=1}^s$  și  $\{\dot{p}_i\}_{i=1}^s$  din ecuațiile Hamilton (1.5.9), relația (1.5.19) se transcrie sub forma

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right). \quad (1.5.20)$$

Expresia

$$[A, B]_- \equiv \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (1.5.21)$$

se numește paranteză Poisson a funcțiilor  $A$  și  $B$ . Cu notația (1.5.21) relația (1.5.20) se transcrie sub forma

$$\frac{d}{dt} A = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, \mathcal{H}]_- \quad (1.5.22)$$

De aici se vede că dacă mărimea fizică  $A$  referitoare la un sistem de particule nu depinde explicit de timp ( $\partial A / \partial t = 0$ ) ea se conservă ( $dA/dt = 0$ ) dacă paranteza Poisson a ei cu hamiltonianul sistemului este nulă (adică dacă  $[A, \mathcal{H}]_- = 0$ ).

Parantezele Poisson definite în sensul relației (1.5.21) au următoarele proprietăți mai importante:

— *antisimetria*

$$[A, B]_- = -[B, A] \quad (1.5.23)$$

— *liniaritate* ( $\lambda$  și  $\eta$  constante)

$$[\lambda A + \eta B, C]_- = \lambda[A, C]_- + \eta[B, C]_- \quad (1.5.24)$$

— *identitatea Jacobi*

$$[A, [B, C]_-]_- + [B, [C, A]_-]_- + [C, [A, B]_-]_- = 0 \quad (1.5.25)$$

— *derivabilitatea*

$$\frac{d}{dt} [A, B]_- = \left[ \frac{dA}{dt}, B \right]_- + \left[ A, \frac{dB}{dt} \right]_- \quad (1.5.26)$$

Demonstrarea proprietăților amintite ale parantezelor Poisson nu reprezintă (ca dificultate) decât un simplu exercițiu de calcul diferențial și de aceea o lăsăm în seama cititorilor interesați.

Dacă în (1.5.21) drept mărime  $B$  luăm coordonata  $q_i$  respectiv impulsul  $p_i$ , se obțin relațiile

$$[A, q_i]_- = -\frac{\partial A}{\partial p_i}, \quad [A, p_i]_- = \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad (1.5.27)$$



Luînd în considerare aceste relații cu  $A = \mathcal{H}$  (hamiltonianul) și avînd în vedere (1.5.22) se vede că ecuațiile Hamilton (1.5.9) se pot scrie și sub forma :

$$\dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}]_-, \dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}]_-. \quad (1.5.28)$$

## § 1.6. PRINCIPIUL MINIMEI ACȚIUNI

În § 1.1 am văzut că studiul mișcărilor mecanice ale sistemelor de particule poate fi făcut cu ajutorul legilor lui Newton — rolul central jucîndu-l ecuațiile diferențiale care decurg din legea a doua a lui Newton. Am arătat apoi în § 1.4 și în § 1.5 că respectivul studiu se poate face și cu ajutorul formalismului ecuațiilor Lagrange, respectiv al ecuațiilor Hamilton. Desigur că cele trei formalisme — al ecuațiilor Newton, cel al ecuațiilor Lagrange și cel al ecuațiilor Hamilton — sînt echivalente între ele. Din punct de vedere matematic formalismele menționate sînt formalisme diferențiale în sensul că ele reduc problema studiului mișcărilor mecanice la studiul proprietăților și soluțiilor unor ecuații diferențiale pe care le satisfac coordonatele respectiv impulsurile privite ca funcții de timp. Desigur că forma concretă a ecuațiilor diferențiale respective depinde de alegerea setului de coordonate cu ajutorul căruia se descrie mișcarea. Acest fapt poate constitui, în anumite situații, un inconvenient din punct de vedere matematic. Însă studiul mișcărilor mecanice poate fi abordat și într-o formulare integrală care este independentă de alegerea setului de coordonate. O astfel de formulare o oferă *principiul minimei acțiuni*. Scopul paragrafului de față îl constituie prezentarea acestui principiu.

Pentru un sistem de particule am văzut că se poate defini lagrangeianul

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \quad (1.6.1)$$

ca funcție de coordonatele generalizate  $\{q_i\}$ , vitezele generalizate  $\{\dot{q}_i\}$  și timpul  $t$ . Coordonatele  $q_i = q_i(t)$  care intră în lagrangeianul  $\mathcal{L}$ , privite ca funcții de timp definesc traiectoriile reale pe care se mișcă sistemul. De aceea, funcțiile  $q_i = q_i(t)$  le vom numi simplu traiectorii reale. În planul  $q_i - t$  traiectoria reală  $q_i = q_i(t)$  este o curbă care descrie (reprezintă) mișcarea reală a sistemului (vezi figura 1.6.1). Desigur că în planul  $q_i - t$  pe lângă traiectoria reală  $q_i = q_i(t)$  mai putem considera mulțimea funcțiilor (curbelor)  $q_i^v = q_i^v(t)$  continue și netede de variabila  $t$  pe care le vom numi *traiectorii virtuale* (virtual posibil a fi realizate, ele fiind compatibile cu legăturile — adică sînt îngăduite de legături — deoarece  $q_i$  reprezintă o coordonată generalizată) (fig. 1.6.1). Evident că traiectoria reală  $q_i = q_i(t)$  este un element al mulțimii traiectoriilor virtuale  $q_i^v = q_i^v(t)$ .



Dacă în expresia (1.6.1) a lagrangeianului înlocuim formal traiectoriile reale  $q_i$  cu traiectoriile virtuale  $q_i^v$  și integrăm expresia respectivă după variabila timp, obținem funcționala

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i^v(t), \dot{q}_i^v(t), t) dt \quad (1.6.2)$$

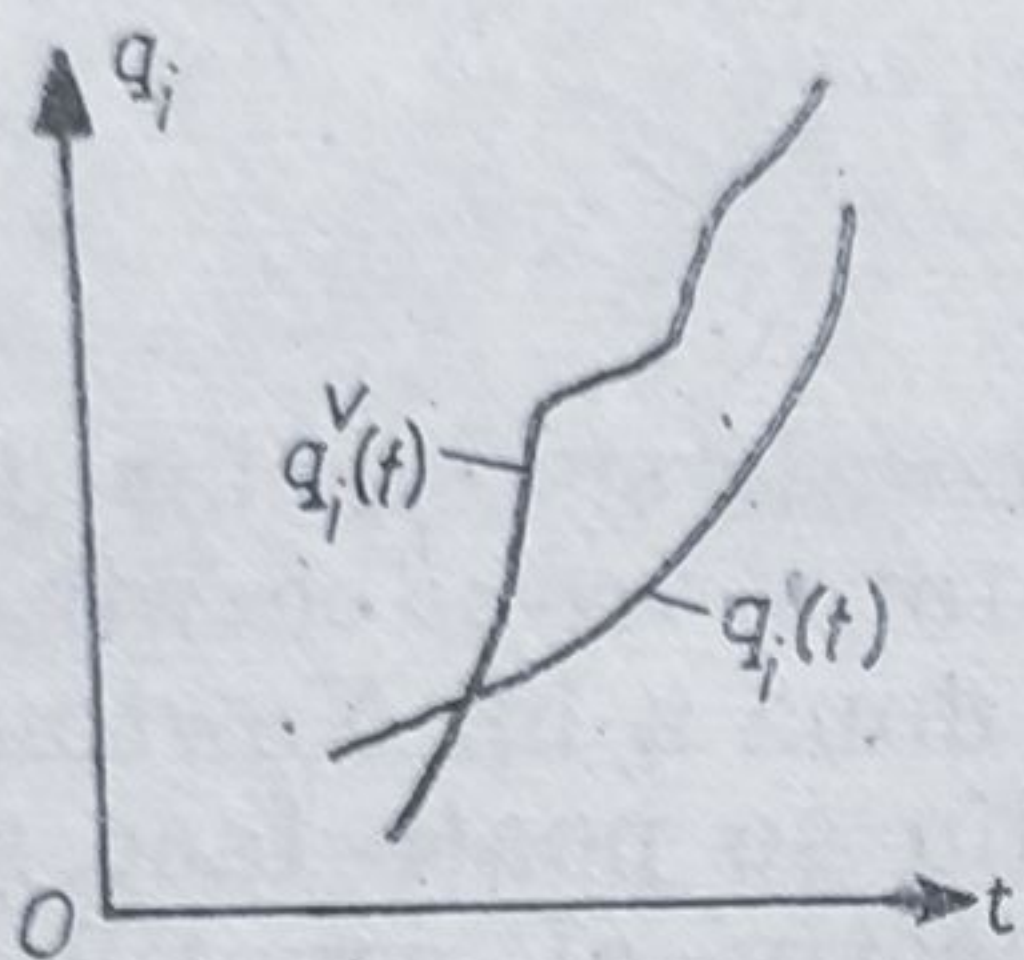


Fig. 1.6.1

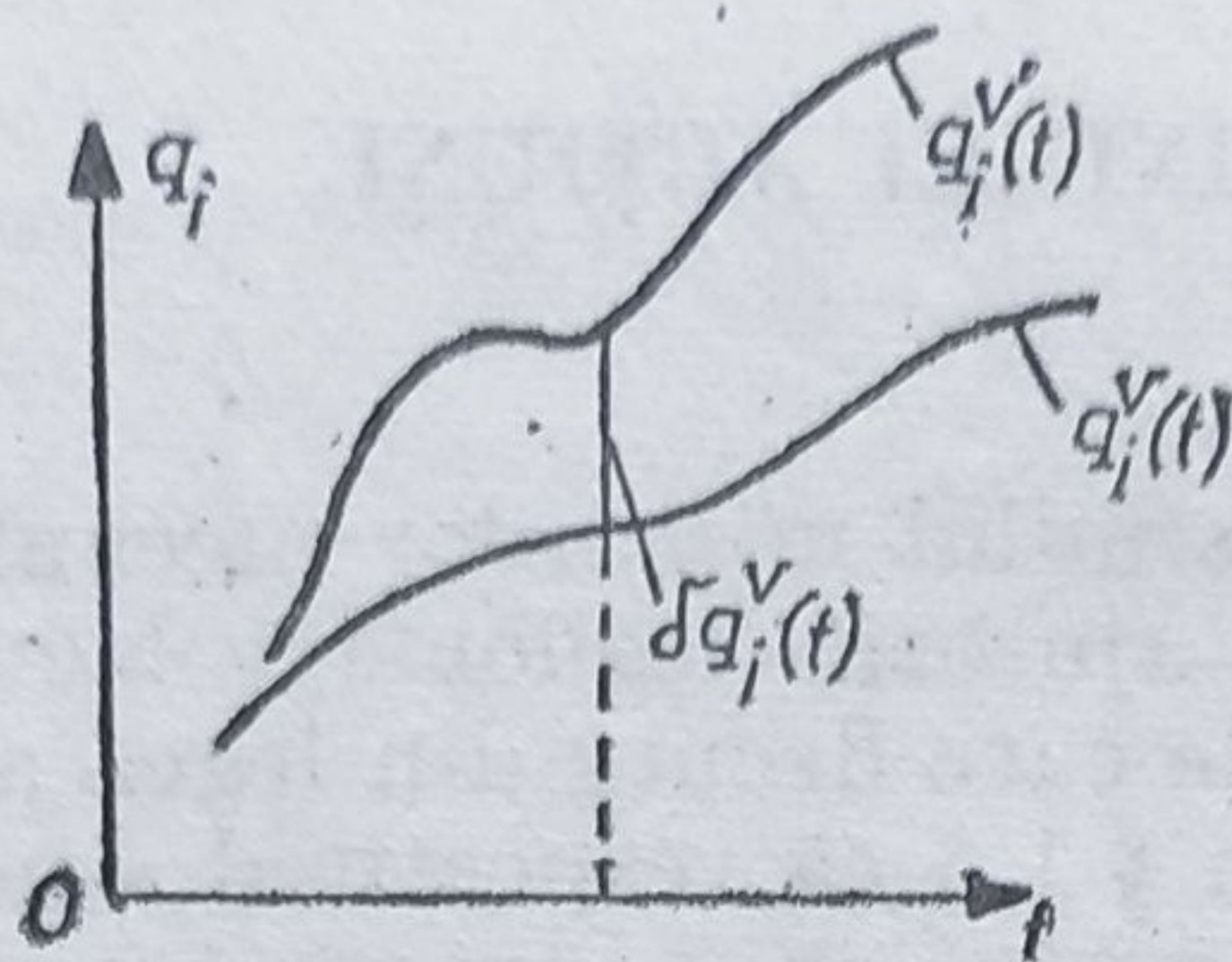


Fig. 1.6.2

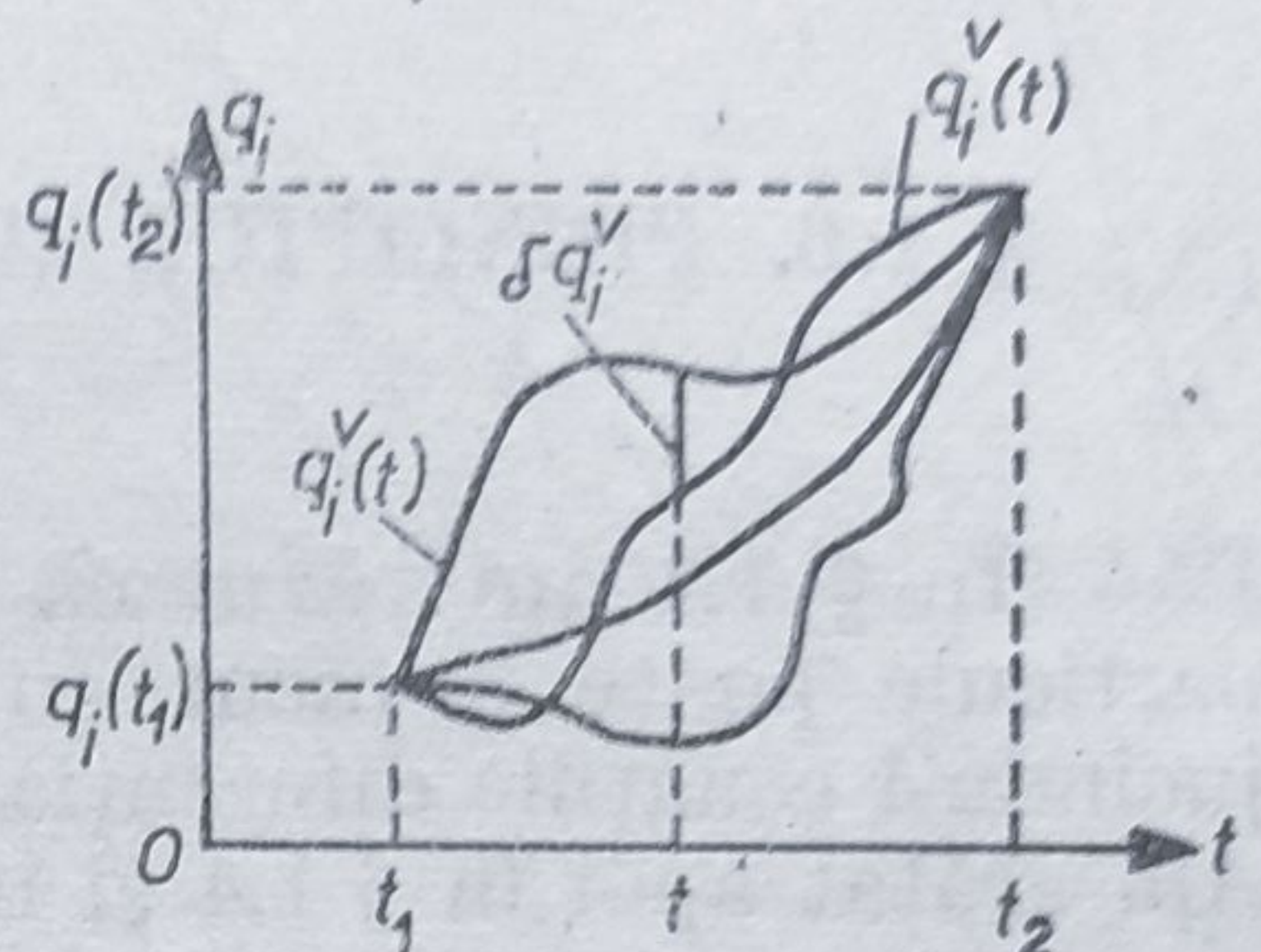


Fig. 1.6.3

numită *acțiunea sistemului*. Evident că acțiunea  $\mathcal{S}$  depinde de traiectoriile virtuale  $q_i^v$ . Vom arăta că pe traiectoria reală care, la momentele  $t_1$  și  $t_2$ , trece prin două puncte date  $q_i(t_1)$  și  $q_i(t_2)$  acțiunea  $\mathcal{S}$  are o valoare minimă în comparație cu valorile ei pentru traiectoriile virtuale care la aceleași momente  $t_1$  și  $t_2$  trec prin aceleași puncte  $q_i(t_1)$  și  $q_i(t_2)$ . Pentru a demonstra această afirmație, se poate proceda în modul următor: fie  $q_i^v(t)$  și  $q_i^{v'}(t)$  două traiectorii virtuale infinitezimal apropiate (învecinate). Diferența

$$\delta q_i^v = \delta q_i^v(t) = q_i^{v'}(t) - q_i^v(t) \quad (1.6.3)$$

se numește *variația* lui  $q_i^v(t)$ . Deoarece traiectoriile virtuale învecinate au forme în general diferite (fig. 1.6.2) vitezele virtuale  $\dot{q}_i^v(t)$  vor avea valori diferite de-a lungul diferitelor traiectorii. De aceea pe lângă variația  $\delta q_i^v$  putem vorbi și de variația

$$\delta \dot{q}_i^v = \delta \dot{q}_i^v(t) = \dot{q}_i^{v'}(t) - \dot{q}_i^v(t). \quad (1.6.4)$$

Evident că se poate scrie

$$\frac{d}{dt} \delta q_i^v = \frac{d}{dt} [q_i^{v'}(t) - q_i^v(t)] = \dot{q}_i^{v'}(t) - \dot{q}_i^v(t) = \delta \dot{q}_i^v \quad (1.6.5)$$

Variațiilor infinitezimale  $\{\delta q_i^v\}_{i=1}^s$  și  $\{\delta \dot{q}_i^v\}_{i=1}^s$  le corespunde variația

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}(q_i^v, \dot{q}_i^v) = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} \delta q_i^v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \delta \dot{q}_i^v \right] \quad (1.6.6)$$

a funcției  $\mathcal{L}(q_i^v, \dot{q}_i^v)$  și respectiv variația

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_i^v, \dot{q}_i^v) dt \quad (1.6.7)$$



a acțiunii. Ținând cont de (1.6.5) și (1.6.6) variația acțiunii (1.6.7) se transcrie sub forma

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} \delta q_i^v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \delta \dot{q}_i^v \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \delta q_i^v \right] + \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \right) \right] \delta q_i^v \right\} dt = \\ &= \left[ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \delta q_i^v \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \right) \right] \delta q_i^v dt. \quad (1.6.8)\end{aligned}$$

Fie  $q_i(t_1)$  și  $q_i(t_2)$  punctele prin care trece traiectoria reală la momentele  $t_1$  și  $t_2$ . Să considerăm că mulțimea traiectoriilor virtuale  $q_i^v(t)$  este formată din traiectorii care la momentele  $t_1$  și  $t_2$  trec toate prin punctele  $q(t_1)$  și  $q(t_2)$  (fig. 1.6.3). Evident că pentru o astfel de alegere a traiectoriilor virtuale  $q_i^v(t)$  au loc relațiile

$$\delta q_i^v(t_1) = 0, \quad \delta q_i^v(t_2) = 0.$$

Atunci variația acțiunii  $\delta \mathcal{S}$  dată de (1.6.8) capătă forma

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \right) \right] \delta q_i^v dt. \quad (1.6.9)$$

Pe traiectoriile reale  $q_i(t)$  mișcarea sistemului satisface ecuațiile Lagrange (1.4.16) și deci se poate scrie

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^v} \right) \right]_{q_i^v(t) = q_i(t)} = 0 \quad (1.6.10)$$

Atunci din (1.6.9) rezultă relația

$$[\delta \mathcal{S}]_{q_i^v = q_i} = 0 \quad (1.6.11)$$

care arată că variația acțiunii devine nulă când traiectoriile virtuale coincid cu traiectoriile reale. Dar aceasta nu înseamnă decât că pe traiectoriile reale acțiunea  $\mathcal{S}$  are o valoare staționară (valoare maximă, minimă sau de inflexiune). Se demonstrează că de obicei, pentru majoritatea sistemelor mecanice de interes practic valoarea respectivă este o valoare minimă. De aceea relația (1.6.11) este cunoscută și sub denumirea de principiul minimei acțiuni. Acest principiu arată că acțiunea  $\mathcal{S}$ , definită în sensul relației (1.6.2) pe mulțimea traiectoriilor virtuale  $q_i^v(t)$  care la momentele  $t_1$  și  $t_2$  trec prin punctele  $q_i(t_1)$  și  $q_i(t_2)$ , are o valoare minimă pentru traiectoriile reale  $q_i(t)$  care la aceleași momente trec prin aceleași puncte (valoare



minimă în comparație cu valorile acțiunii  $\mathcal{S}$  pentru restul traiectoriilor pe care ea este definită).

Mai sus am arătat că ecuațiile Lagrange implică principiul minimei acțiuni. Această legătură poate fi însă „citită” și în sens invers și anume: dacă în (1.6.9) punem condiția  $[\delta \mathcal{S}]_{q_i^v = q_i} = 0$ , adică admitem că pe traiectoriile reale acțiunea are un minim, atunci — deoarece pentru  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $\delta q_i^v$  sînt mărimi complet arbitrare — din condiția menționată rezultă relațiile (1.6.10), adică faptul că pe traiectoriile reale sînt satisfăcute ecuațiile Lagrange. Această observație nu face decît să sublinieze echivalența între ecuațiile Lagrange și principiul minimei acțiuni. În acest context trebuie notat că ecuațiile Lagrange (ca și ecuațiile Newton sau ecuațiile Hamilton) din punct de vedere matematic sînt ecuații diferențiale. În forma lor detaliată aceste ecuații diferențiale depind de alegerea concretă a sistemului de coordonate  $\{q_i\}$  cu ajutorul cărora se descriu mișcările mecanice ale sistemului. Pe de altă parte, integrala (1.6.2) prin care este definită acțiunea  $\mathcal{S}$  și principiul minimei acțiuni exprimat prin relația (1.6.11) sînt independente de alegerea setului de coordonate  $\{q_i\}$  cu ajutorul căruia se descriu mișcările sistemului. Această proprietate se impune deci ca un avantaj al folosirii acțiunii și principiului minimei acțiuni în descrierea mișcărilor mecanice.

Să consemnăm în continuare unele relații de legătură între acțiunea  $\mathcal{S}$  și mărimi ca impulsurile  $\{p_i\}$  și hamiltonianul  $\mathcal{H}$  ce caracterizează mișcările mecanice ale unui sistem de particule. Vom considera în acest sens mulțimea traiectoriilor reale  $\{q_i(t)\}$  care la momentul  $t_1$  trec prin același punct  $q_i(t_1)$  și care la un moment ulterior  $t_2$  evident trec prin puncte diferite  $q_i(t_2)$ ,  $q_i'(t_2)$ ,  $q_i''(t_2)$  etc. (fig. 1.6.4). Vom defini acțiunea  $\mathcal{S}$  pe mulțimea acestor traiectorii reale prin relația

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt. \quad (1.6.12)$$

În mod cu totul analog cu (1.6.8) se poate scrie relația

$$\delta \mathcal{S} = \left[ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt. \quad (1.6.13)$$

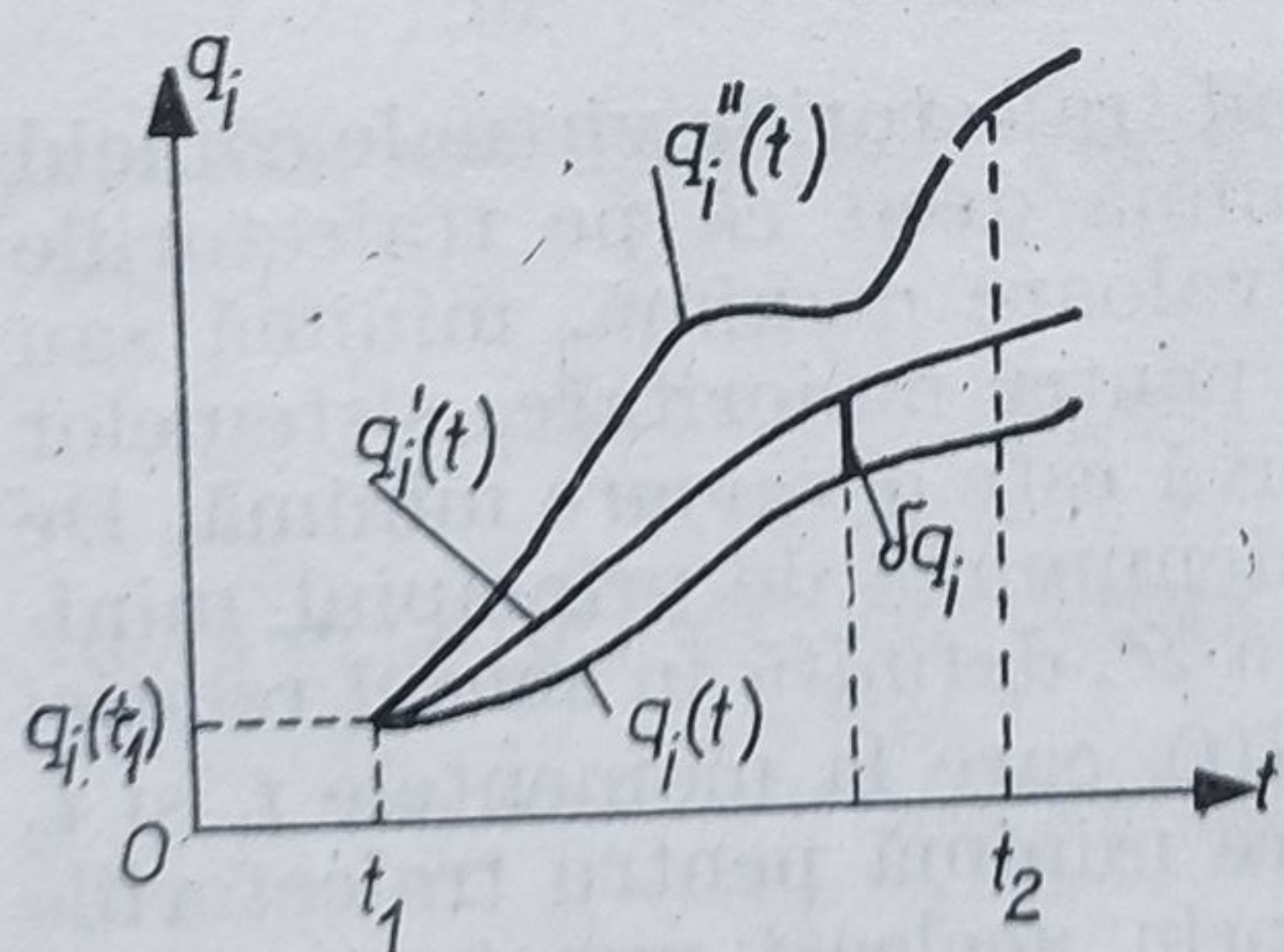


Fig. 1.6.4

În cazul considerat avem

$$\delta q_i(t_1) = 0, \quad \delta q_i(t_2) = \delta q_i \neq 0 \quad (1.6.14)$$

și, în plus,  $q_i(t)$  fiind traiectorii reale, pe ele sînt satisfăcute ecuațiile Lagrange (1.4.16) și deci termenul al doilea din membrul drept al lui (1.6.13) este nul. Atunci din (1.6.13) se obține

$$\delta \mathcal{S} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_i p_i \cdot \delta q_i \quad (1.6.15)$$



$p_i = (\partial \mathcal{L} / \partial q_i)$  fiind, după cum se știe, impulsurile generalizate. Din (1.6.15) rezultă că

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = p_i \quad (1.6.16)$$

adică derivatele parțiale ale acțiunii în raport cu coordonatele generalizate sînt egale cu impulsurile generalizate.

Dacă se consideră  $t_1$  fix și  $t_2 = t$  variabil, acțiunea  $\mathcal{S}$  definită în sensul relației (1.6.12) este o funcție explicită de timp și din (1.6.12) se poate scrie

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \mathcal{L}. \quad (1.6.17)$$

Pe de altă parte, întrucît  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_i, t)$  și ținînd cont de (1.6.16) se pot scrie relațiile

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i. \quad (1.6.18)$$

Atunci, avînd în vedere (1.6.17) și (1.5.6), se obține

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{S}}{dt} - \sum_i p_i \dot{q}_i = \mathcal{L} - \sum_i p_i \dot{q}_i = -\mathcal{H} \quad (1.6.19)$$

adică

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H}. \quad (1.6.20)$$

Această relație arată că derivata parțială în raport cu timpul a acțiunii este egală și de semn contrar cu hamiltonianul.

Să considerăm un sistem a cărui energie totală (cinetică + potențială) se conservă deci pentru care se poate scrie

$$\mathcal{H} = E = \text{const.} \quad (1.6.21)$$

Fie  $q_i^v(t)$  mulțimea traiectoriilor virtuale compatibile cu (1.6.21) (adică cele care satisfac relația  $\mathcal{H}(q_i^v, p_i^v) = E = \text{const.}$ ) și care în plus la un același moment  $t_1$ , pleacă toate din același punct  $q_i^I$  și ajung într-un același punct  $q_i^{II}$  dar la momente diferite (fig. 1.6.5). Pe mulțimea acestor traiectorii virtuale definim acțiunea  $\mathcal{S}$  în sensul relației (1.6.2). Aplicînd formal legătura (1.5.6) între  $\mathcal{L}$  și  $\mathcal{H}$  pentru situația considerată se poate scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{t_1}^t \mathcal{L}(q_i^v, \dot{q}_i^v, t) dt = \int_{t_1}^t \left[ \sum_i p_i^v \dot{q}_i^v - \mathcal{H} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^t \sum_i p_i^v \dot{q}_i^v dt - \int_{t_1}^t E dt = \int_{t_1}^t \sum_i p_i^v dq_i^v - E(t - t_1) \end{aligned} \quad (1.6.22)$$



unde  $t$  este variabil (vezi figura 1.6.5). Variația  $\delta \mathcal{S}$  a acțiunii  $\mathcal{S}$  definită de (1.6.22) este dată de relația

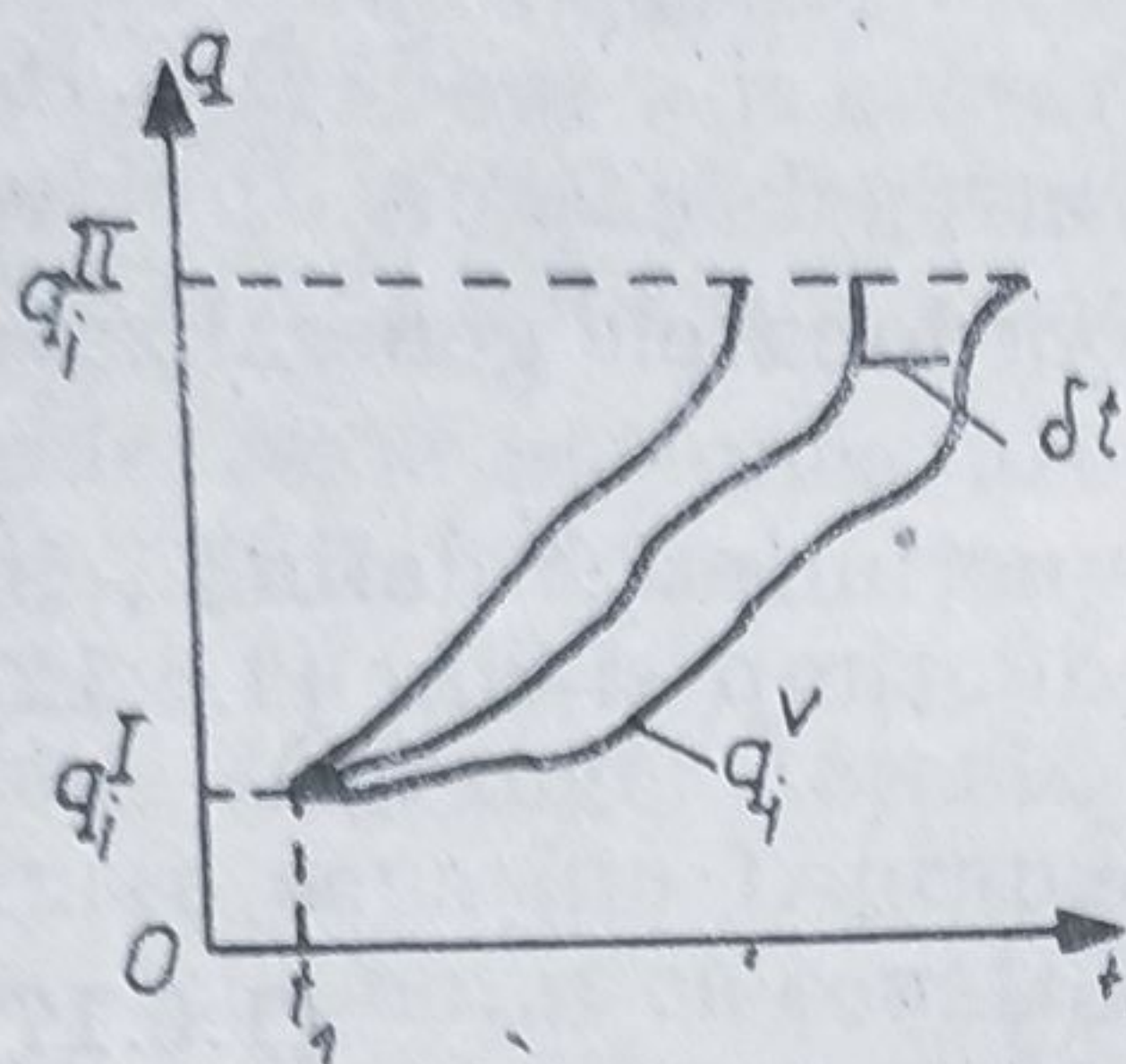


Fig. 1.6.5

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i^v \delta q_i^v - E \delta t. \quad (1.6.23)$$

Pe de altă parte, privind  $\mathcal{S}$  ca funcție de coordonatele finale  $q_i^{II}$  și timp, adică  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_i^{II}, t)$  se poate scrie

$$\delta \mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \delta t = - \mathcal{H} \delta t = - E \delta t \quad (1.6.24)$$

deoarece coordonatele finale  $q_i^{II}$  sînt fixe și nu variază. Impunem acum condiția că pe traiectoria reală acțiunea  $\mathcal{S}$  să aibă un minim, adică să fie satisfăcută relația  $[\delta \mathcal{S}]_{q_i^v = q_i} = 0$ . Atunci din (1.6.23) și (1.6.24) rezultă că pentru traiectoria reală a unui sistem a cărui energie totală se conservă se poate scrie

$$\left[ \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i^v dq_i^v \right]_{q_i^v = q_i} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i dq_i = 0. \quad (1.6.24)$$

Acest rezultat arată că un sistem ce-și conservă energia se mișcă pe o astfel de traiectorie reală care face minimă integrala expresiei  $\sum_i p_i dq_i$ .

Să aplicăm rezultatul (1.6.24) la cazul mișcării unei particule într-un câmp de energie potențială  $V(\mathbf{r})$  și nesupusă nici unui fel de legături. Pentru o astfel de particulă avem

$$\sum_i p dq_i = p_x dx + p_y dy + p_z dz = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = p \cdot ds \quad (1.6.25)$$

$ds = |d\mathbf{r}|$  fiind elementul de arc al traiectoriei particulei, iar  $p = |\mathbf{p}|$  modulul impulsului (de notat că  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  și  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  sînt vectori paraleli). Pentru particula în cauză se pot scrie relațiile

$$E = T + V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad p = |\mathbf{p}| = \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}. \quad (1.6.26)$$

Introducînd (1.6.25) și (1.6.26) în (1.6.24) se obține relația

$$\delta \int_1^2 \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} ds = 0. \quad (1.6.27)$$

Această relație arată că între punctele 1 și 2 particula se mișcă pe o astfel de traiectorie încît integrala expresiei  $\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}$  de-a lungul respecti-



vei traiectorii are o valoare minimă în raport cu integrala aceleiași expresii pe alte traiectorii virtuale. În cazul când particula se mișcă în absența vreunui câmp de forțe ( $V = 0$ ), întrucât  $E = \text{const.}$ , din (1.6.27) se obține

$$\delta \int_1^2 ds = 0. \quad (1.6.28)$$

Cum integrala reprezintă lungimea traiectoriei pe care se mișcă particula, înseamnă că între punctele 1 și 2 se mișcă pe drumul cel mai scurt, adică pe o dreaptă.

Ca o ultimă remarcă notăm că o relație analogă cu (1.6.27) se întâlnește în optică (principiul lui Fermat — vezi cap. VII), unde în locul factorului  $\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}$  apare indicele de refracție al mediului  $n(\mathbf{r})$  ca funcție de punct, iar în loc de traiectoria unei particule avem de a face cu traiectoria unei raze de lumină.

## § 1.7. OSCILAȚII LINIARE

Foarte frecvent în mecanică se întâlnesc situații în care sisteme cu unul sau mai multe grade de libertate execută mișcări în decursul cărora coordonatele sistemului tot timpul nu se abat decît foarte puțin față de anumite valori ale lor — valori ce caracterizează o stare de echilibru a sistemului. Astfel de mișcări se numesc *mișcări oscilatorii* sau simplu *oscilații*. Sistemele mecanice care execută mișcări oscilatorii au energie potențială care prezintă un minim în starea de echilibru. Depărtarea sistemului față de această stare duce la apariția unor forțe conservative care tind să readucă sistemul spre starea de echilibru. Dacă forțele conservative menționate sînt proporționale cu puterea întâi a abaterilor coordonatelor față de valorile de echilibru oscilațiile se numesc *liniare*, iar dacă respectivele forțe sînt proporționale cu puteri superioare (2, 3, ...) ale abaterilor coordonatelor față de valorile de echilibru oscilațiile se numesc *neliniare*. Dacă sistemul care execută mișcări oscilatorii este supus numai forțelor conservative amintite mai sus se spune că mișcările lui sînt *oscilații libere*. Dacă, pe lângă respectivele forțe conservative, sistemul este supus și acțiunii unor forțe neconservative exterioare (care pot fi pasive sau active) se spune că mișcările lui sînt *oscilații forțate*. În acest paragraf vom prezenta cîteva considerații asupra oscilațiilor liniare libere și forțate.

### 1.7.1. OSCILAȚII LINIARE LIBERE ALE SISTEMELOR CU UN GRAD DE LIBERTATE

Ne vom referi la început la cazul cel mai simplu al unui sistem cu un singur grad de libertate descris de coordonata generalizată  $q$ , care



execută oscilații libere. Un astfel de sistem este în echilibru stabil pentru o valoare  $q_0$  a lui  $q$ , când energia lui potențială  $V(q)$  are o valoare minimă  $V_0 = V(q_0)$ . Vom alege  $q_0 = 0$  și  $V_0 = 0$  (fig. 1.7.1), fără ca prin aceasta să afectăm generalitatea considerațiilor pe care le vom prezenta în continuare. Echilibrul în  $q = q_0 = 0$  este stabil în sensul că o depărtare a sistemului de la poziția de echilibru este însoțită de apariția unei

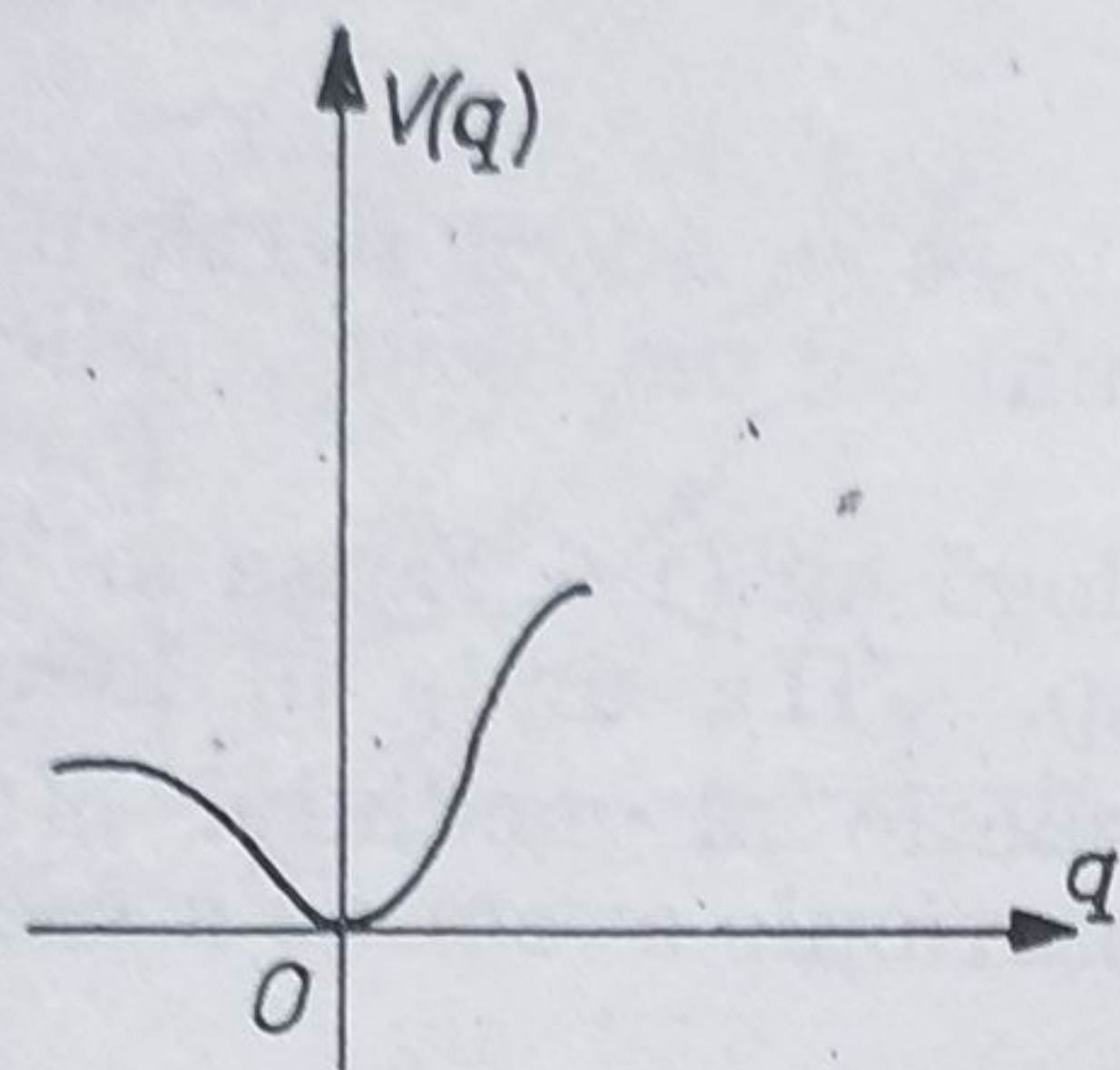


Fig. 1.7.1

forțe generalizate  $Q = - \frac{\partial V}{\partial q}$ , care tinde să readucă sistemul în poziția de echilibru.

Să dăm două exemple concrete de sisteme mecanice de genul amintit. Primul exemplu îl constituie o particulă de masă  $m$ , obligată să se miște pe o traiectorie curbilinie  $y = f(x)$ , situată într-un plan vertical  $xOy$ , fiind supusă simultan acțiunii câmpului gravitațional de la suprafața Pământului și acțiunii unui resort elastic de constantă  $k$  (fig. 1.7.2). Fizic un astfel de sistem se poate realiza, de exemplu, cu ajutorul unei mărgele (particula) obligată să se miște fără frecare de-a lungul unei sîrme corespunzător îndoită, mărgeaua fiind totodată „lipită” în capătul unui resort, care are celălalt capăt fixat într-un punct). Coordonata generalizată a particulei va fi  $q = x$  (adică tocmai coordonata carteziană  $x$ ). Referitor la curba  $y = f(x) = f(q)$  vom admite că satisface condițiile  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  și  $f''(0) > 0$  (cu  $f' = df/dq$  și  $f'' = d^2f/dq^2$ ). Resortul elastic îl presupunem a fi fixat cu un capăt în punctul de coordonate  $(0, l)$  de pe axa  $Oy$  și avînd starea de echilibru (în care nu este nici întins nici comprimat) pentru coordonata  $q = 0$  a particulei (fig. 1.7.2). Energia potențială a particulei menționate este dată de expresia

$$V(q) = m g f(q) + \frac{k}{2} [l - \sqrt{q^2 + (f(q) - l)^2}]^2 \quad (1.7.1)$$

iar energia ei cinetică este

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [1 + f'(q)] \dot{q}^2. \quad (1.7.2)$$

Al doilea exemplu este pendulul fizic. Acesta constă dintr-un corp solid absolut rigid (complet nedeformabil), situat în câmpul atracției gravitaționale de la suprafața Pământului și care poate oscila, într-un plan vertical, în jurul unei axe orizontale ce trece printr-un punct  $O$  aflat la distanța  $R$  de centrul de inerție  $C$  (fig. 1.7.3).

Solidul respectiv are un singur grad de libertate căruia îi asociem coordonata generalizată  $q = \varphi$ ,  $\varphi$  reprezentînd unghiul de deviere față de verticală a segmentului  $OC$ . Energia potențială a sistemului considerat (solidul) este

$$V(q) = Mgh = MgR(1 - \cos q) \quad (1.7.3)$$



$M$  fiind masa totală a solidului. Pentru a calcula energia cinetică vom considera solidul ca fiind alcătuit dintr-o mulțime de particule  $P_i$  de mase  $m_i$  situate la distanțele  $r_i$  față de axa ce trece prin  $O$ . Atunci energia cinetică a solidului în cauză se poate scrie sub forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{q} = \frac{1}{2} J \dot{q}^2 \quad (1.7.4)$$

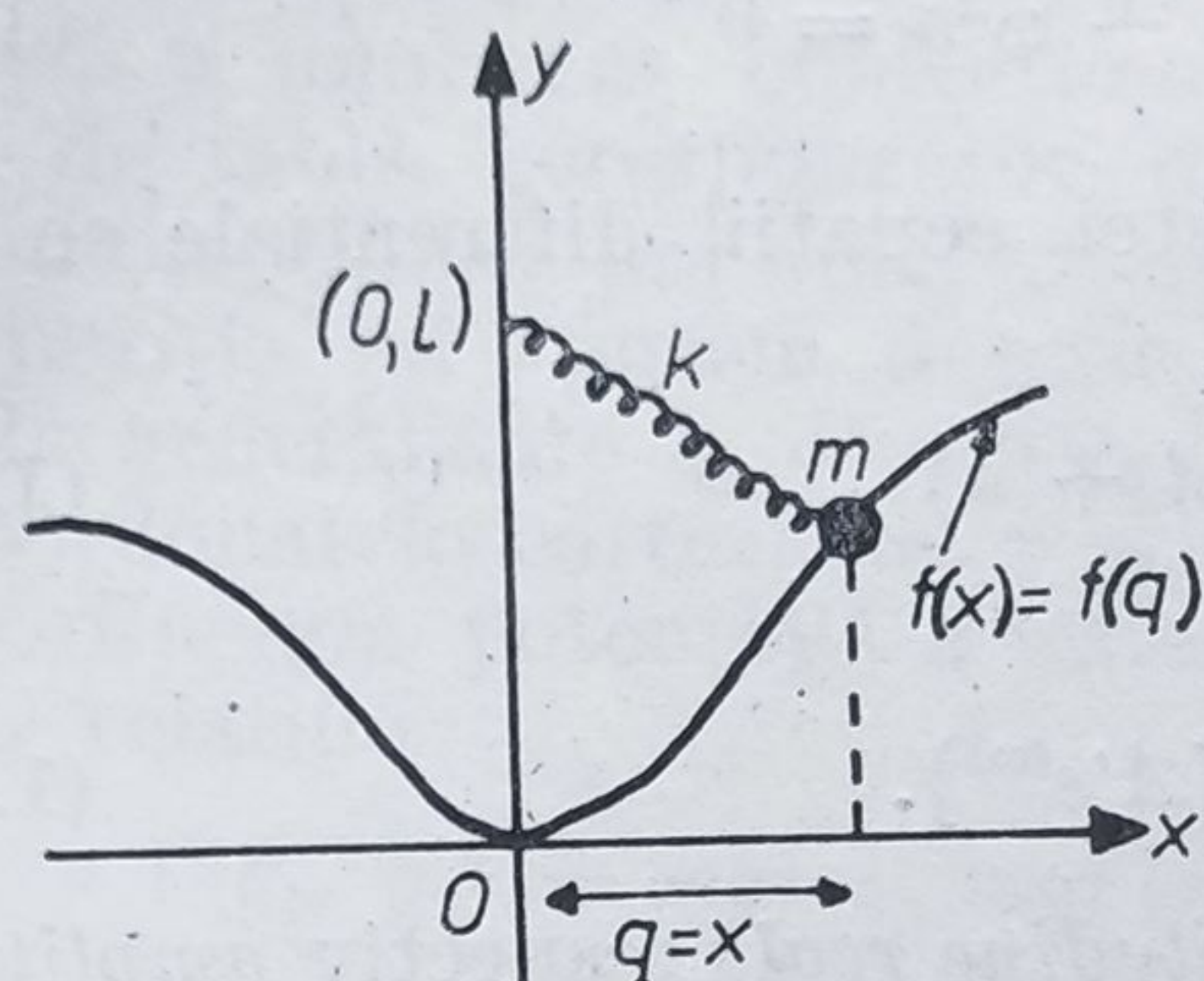


Fig. 1.7.2

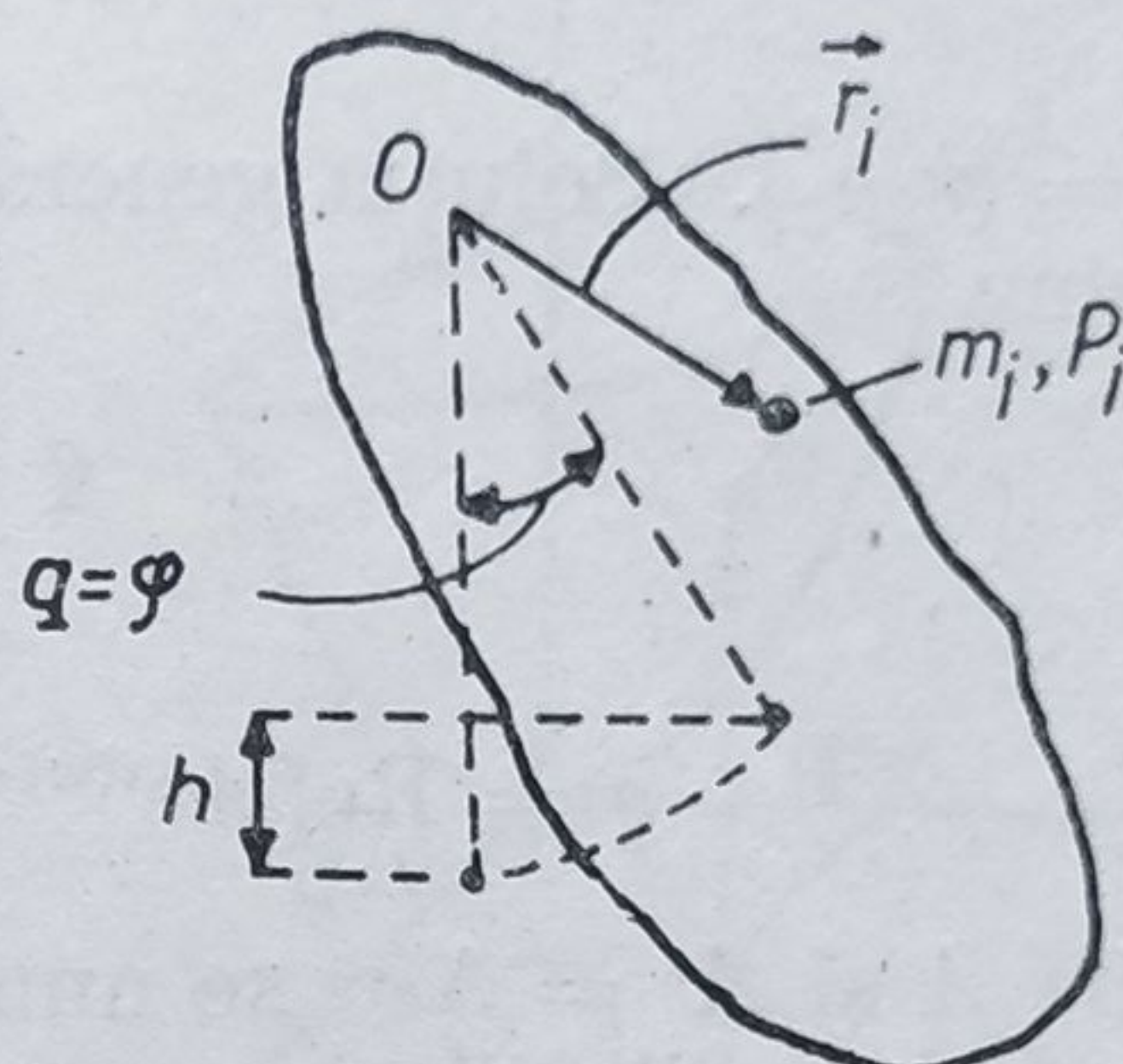


Fig. 1.7.3

unde  $J = \sum_i m_i r_i^2$  reprezintă momentul de inerție al solidului în raport cu axa ce trece prin  $O$ . (Desigur că la limită particulele trebuie luate ca fiind porțiuni infinitezimale ale solidului și atunci suma care îl exprimă pe  $J$  trebuie înlocuită cu o integrală volumică.)

Revenind la problema generală a unui sistem cu un singur grad de libertate, deci descris printr-o singură coordonată generalizată  $q$ , sistem care execută oscilații în jurul poziției de echilibru  $q = 0$ , putem spune că acesta are energia potențială de forma

$$V = V(q) \text{ cu } V(0) = 0 \text{ și } (\partial V / \partial q)_{q=0} = 0 \quad (1.7.5)$$

și energia cinetică de forma

$$T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2. \quad (1.7.6)$$

În limitele oscilațiilor mici în decursul cărora mișcarea sistemului se caracterizează prin valori ale lui  $q$ , care sînt abateri mici față de poziția de echilibru, se poate scrie (ținînd cont de (1.7.5))

$$V(q) = V(0) + V'(0)q + \frac{1}{2} V''(0)q^2 + \dots \approx \frac{1}{2} V''(0)q^2 = \frac{1}{2} kq^2 \quad (1.7.7)$$

$$a(q) = a(0) + a'(0)q + \dots \approx a(0) = a_0 \quad (1.7.8)$$

unde s-au folosit notațiile  $f'(0) = (\partial f / \partial q)_{q=0}$ ,  $f''(0) = (\partial^2 f / \partial q^2)_{q=0}$ . Ținînd



cont de (1.7.5)–(1.7.8) se găsește că lagrangeianul sistemului considerat are expresia

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad (1.7.9)$$

Corespunzător acestui lagrangian avem o ecuație Lagrange de tipul (1.4.16), care capătă forma ecuației diferențiale

$$a_0 \ddot{q} + kq = 0 \text{ sau } \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (1.7.10)$$

cu  $\omega^2 = (k/a_0)$ . Soluția generală a acestei ecuații diferențiale se scrie sub forma

$$q = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.7.11)$$

sau

$$q = \operatorname{Re}\{Ae^{i(\omega t + \alpha)}\} = \operatorname{Re}\{A'e^{i\omega t}\}. \quad (1.7.12)$$

Mărimile  $A$  și  $A' = Ae^{i\alpha}$  se numesc *amplitudine reală* respectiv *amplitudine complexă* ale oscilațiilor;  $\alpha$  se numește *fază inițială* a oscilațiilor,  $\omega$  — *pulsatie* sau *frecvență unghiulară* a oscilațiilor (fiind legată de frecvența  $\nu$  respectiv perioada  $\mathcal{T}$  ale oscilațiilor prin relațiile  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/\mathcal{T}$ ). Mărimile  $A'$  și  $\alpha$  din (1.7.11), privită ca soluție a ecuației diferențiale (1.7.10), sînt constante de integrare care se determină din condițiile inițiale ale problemei (care, de regulă, se dau prin indicarea valorilor  $q(0)$  și  $\dot{q}(0)$  ale coordonatei și vitezei generalizate la momentul inițial ( $t = 0$ )).

Mișcările de tipul celor menționate mai sus se numesc *oscilații liniare libere*. De notat că oscilațiile de tipul respectiv apar în situațiile cînd primul termen nenul în dezvoltarea lui  $V(q)$  în serie după puterile lui  $q$  este termenul în  $q^2$  și deci forța generalizată  $Q = -(\partial V/\partial q)$  este în primă aproximație de forma  $Q = -kq$  (adică  $Q$  depinde liniar de  $q$ , de unde și denumirea de oscilații liniare). Dacă, pe lîngă condițiile (1.7.5), energia potențială  $V(q)$  mai satisface și condiția  $V''(0) = 0$  atunci în dezvoltarea în serie a lui  $V(q)$  după puterile lui  $q$  primul termen nenul care apare este proporțional cu  $q^n$  ( $n \geq 3$ ). În asemenea caz mișcările sistemului în vecinătatea poziției de echilibru se numesc oscilații neliniare. Acest tip de oscilații nu va fi luat în discuție în volumul de față.

### 1.7.2. OSCILAȚII LINIARE LIBERE ALE SISTEMELOR CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE. MODURI NORMALE DE OSCILAȚIE

Vom discuta unele probleme referitoare la oscilațiile liniare libere ale sistemelor cu mai multe grade de libertate pe exemplul simplu al unui sistem cu două grade de libertate. Fie în acest sens o particulă de masă  $m$ , care se mișcă în câmpul gravitațional de la suprafața Pămîntului în vecină-



tatea originii  $O(0, 0, 0)$  pe o suprafață  $z = f(x, y)$ , care are următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \quad f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0 \\ f''_{xx}(0, 0) &> 0, \quad f''_{xy}(0, 0) > 0, \quad f''_{yy}(0, 0) > 0 \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

unde, ca exemplu,  $f'_x$  și  $f''_{xy}$  semnifică derivatele de ordinul întâi respectiv doi în comparație cu  $x$  respectiv cu  $x$  și  $y$  (fig. 1.7.4). (Fizic un sistem de genul celui menționat se poate realiza punând o particulă să se miște pe suprafața interioară a unui vas confecționat dintr-o bucată de tablă corespunzător deformată.) Sistemul menționat are două grade de libertate și poziția lui o putem descrie prin coordonatele generalizate  $q_1 = x$  și  $q_2 = y$  (adică prin coordonatele carteziene  $x$  și  $y$  ale particulei). Energia potențială a sistemului este dată de relațiile

$$\begin{aligned} V &= V(q_1, q_2) = mgz = mgf(x, y) = \\ &= mgf(q_1, q_2) \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

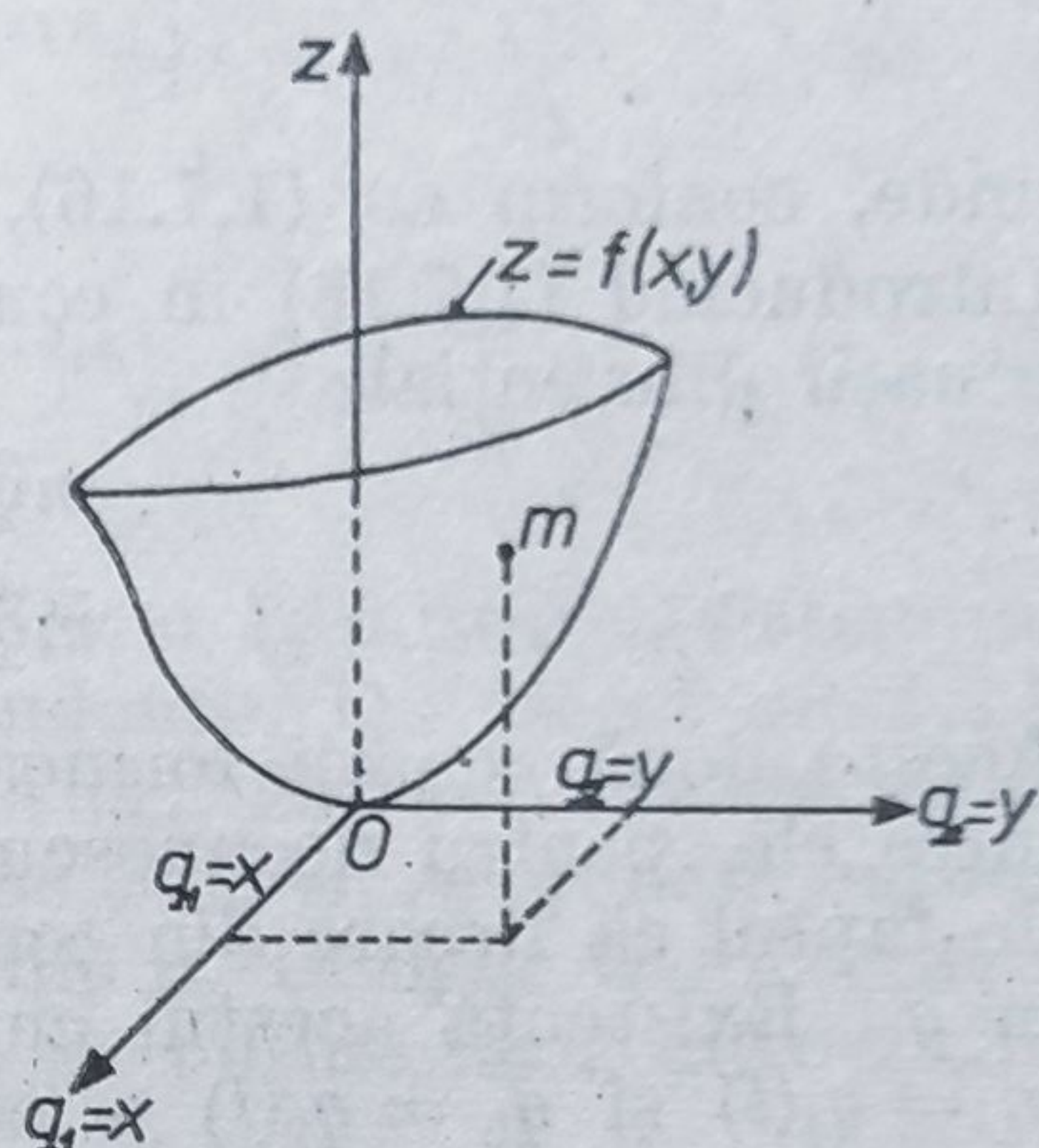


Fig. 1.7.4

iar energia sa cinetică este dată de relațiile

$$\begin{aligned} T &= T(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + [f'_{q_1}(q_1, q_2)\dot{q}_1 + f'_{q_2}(q_1, q_2)\dot{q}_2]^2 \} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(q_1, q_2) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

unde expresiile coeficienților  $a_{ij}(q_1, q_2)$  se pot stabili ușor prin identificarea termenilor.

În cazul oscilațiilor mici, în decursul cărora valorile lui  $q_1$  și  $q_2$  rămân abateri mici față de poziția de echilibru  $(q_{10}, q_{20}) = (0, 0)$  ținând cont de (1.7.13)–(1.7.15), se poate scrie

$$\begin{aligned} V(q_1, q_2) &= V(0, 0) + \sum_{i=1}^2 V'_{q_i}(0, 0)q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 V''_{q_i q_j}(0, 0)q_i q_j + \dots \\ &\cong \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 V''_{q_i q_j}(0, 0)q_i q_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 k_{ij} q_i q_j \end{aligned} \quad (1.7.16)$$



și respectiv

$$a_{ij}(q_1, q_2) \approx a_{ij}(0, 0) = a_{ij}^0 = m\delta_{ij} \quad (1.7.17)$$

unde  $\delta_{ij}$  este egal cu 1 respectiv 0 pentru  $i = j$  respectiv  $i \neq j$ . Din (1.7.14)–(1.7.17) rezultă că în aproximația oscilațiilor mici lagrangeianul sistemului este

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 k_{ij} q_i q_j \quad (1.7.18)$$

unde, conform cu (1.7.16), avem  $k_{ij} = V''_{q_i q_j}(0, 0)$ .

Introducînd (1.7.18) în ecuațiile Lagrange (1.4.16) obținem următoarele ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

Aceste două ecuații formează un sistem de ecuații diferențiale cuplate între ele, pentru necunoscutele  $q_1 = q_1(t)$  și  $q_2 = q_2(t)$ . Cuplajul este dat de faptul că fiecare din ecuații conține atât termeni în  $q_1$ , cât și termeni în  $q_2$ . Existența acestui cuplaj în general face dificilă aflarea soluțiilor  $q_1 = q_1(t)$  și  $q_2 = q_2(t)$  a ecuațiilor (1.7.19) (adică integrarea ecuațiilor respective). Pentru a evita o asemenea dificultate descrierea sistemului poate fi transferată din coordonatele  $\{q_1, q_2\}$  în alte două coordonate  $\{\xi_1, \xi_2\}$  prin intermediul transformărilor liniare

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \\ q_2 &= \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

(fig. 1.7.5). Dacă alegem pentru parametrul  $\theta$  (unghiul dintre  $Oq_1$  și  $O\xi_1$ ) valoarea particulară

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2(k_{12} + k_{21})}{k_{11} - k_{22}} \right] \quad (1.7.21)$$

și introducînd (1.7.20) în (1.7.18), obținem

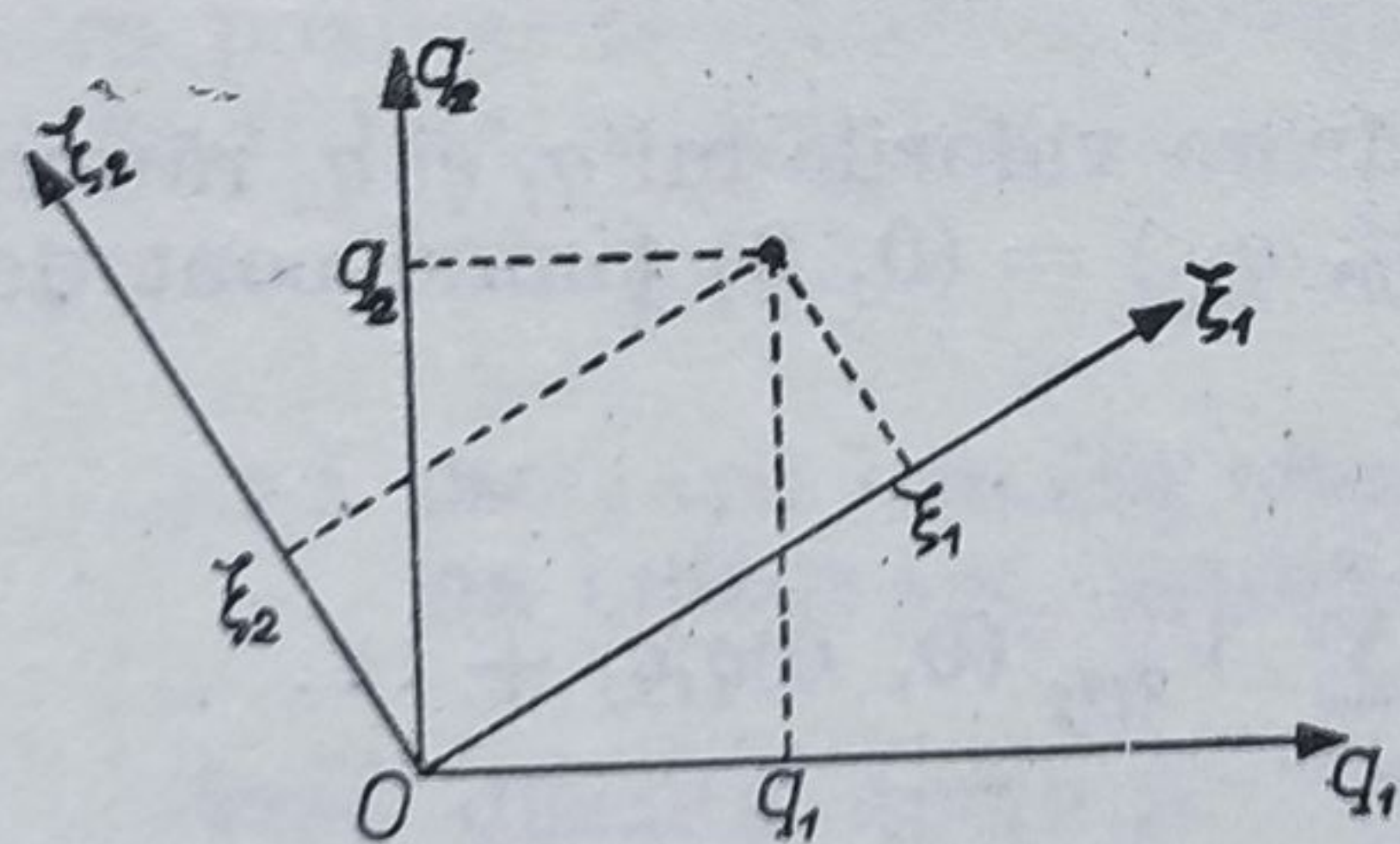


Fig. 1.7.5

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \\ &- \frac{1}{2} (\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2) \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

cu

$$\begin{aligned} \beta_1 &= k_{11} \cos^2 \theta + (k_{12} + k_{21}) \sin \theta \times \\ &\times \cos \theta + k_{22} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\beta_2 = k_{11} \sin^2 \theta - (k_{12} + k_{21}) \sin \theta \cos \theta + k_{22} \cos^2 \theta. \quad (1.7.23)$$



Introducând (1.7.22) în ecuațiile Lagrange (1.4.16) obținem ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 + \beta_1\xi_1 &= 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + \beta_2\xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.24)$$

Similar cu (1.7.10), aceste ecuații diferențiale au soluțiile

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) = \operatorname{Re}\{A_1 e^{i(\omega_1 t + \alpha_1)}\}, \quad \omega_1^2 = \frac{\beta_1}{m} \\ \xi_2 &= A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \operatorname{Re}\{A_2 e^{i(\omega_2 t + \alpha_2)}\}, \quad \omega_2^2 = \frac{\beta_2}{m}. \end{aligned} \quad (1.7.25)$$

Aceste soluții arată că în termenii variabilelor  $\xi_1$  și  $\xi_2$  mișcarea sistemului se descrie ca două oscilații armonice independente. Din acest motiv,  $\xi_1$  și  $\xi_2$  se numesc *coordonate normale*, oscilațiile (1.7.25) descrise de ele se numesc *moduri normale de oscilație*, iar mărimile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  se numesc *pulsatii principale* (sau *naturale*) ale oscilațiilor sistemului. Desigur că descrierea oscilațiilor în termenii coordonatelor  $q_1$  și  $q_2$  se obține ușor introducând (1.7.25) și (1.7.21) în (1.7.20).

Vorbind despre cazul general al oscilațiilor unui sistem cu  $n$  grade de libertate se poate demonstra că întotdeauna se poate găsi (prin transformări liniare care generalizează (1.7.20) un set de coordonate normale  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  în termenii cărora oscilațiile sistemului sînt descrise ca un ansamblu de moduri normale de oscilație independente (necuplate) între ele.

### 1.7.3 OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE

În multe situații de interes practic oscilațiile mici nu se desfășoară în condițiile idealizate în care, după cum am arătat mai sus, se desfășoară oscilațiile liniare libere. Astfel sînt situațiile cînd nu toate forțele care acționează asupra sistemelor mecanice derivă dintr-o funcție de energie potențială  $V$ . Așa sînt forțele de frecare sau forțele active exterioare, dependente de timp. Prezența forțelor de frecare are ca efect în general amortizarea oscilațiilor (micșorarea în timp a amplitudinii lor) pe cînd prezența forțelor active externe duce la obligarea sistemului să execute anumite mișcări forțate sau întreținute (desfășurate după ritmurile specifice forțelor exterioare).

Pentru concretizarea discuțiilor vom considera cazul unui sistem mecanic cu un singur grad de libertate, descris cu ajutorul coordonatei



generalizate  $q$ , supus acțiunii unei forțe cvasielastice  $Q_e = -kq$  (ce derivă din potențialul  $V(q) = \frac{1}{2} kq^2$ ), unei forțe de frecare  $Q_f$  și unei forțe active exterioare dependentă de timp  $Q_a = Q_a(t)$ ). Forța de frecare apare în general datorită interacțiunii corpului în mișcare cu mediile materiale în care se mișcă, interacțiuni care tind să încetinească mișcarea. Ca rezultat al interacțiunii respective energia mecanică a corpului se transformă în căldură (energie a mișcărilor termice — vezi capitolele IV și V), adică se *disipează*. Acest lucru face în general dificilă descrierea mecanică a interacțiunii corpului cu mediul înconjurător. Totuși, pentru cazurile când oscilațiile libere ale sistemului mecanic sînt caracterizate prin frecvențe proprii mult mai mici decît frecvențele mișcărilor moleculare în procesul de disipare a energiei, interacțiunea sistemului mecanic cu mediul înconjurător poate fi descrisă într-un limbaj mecanic relativ simplu. Astfel experiența arată că dacă viteza generalizată  $\dot{q}$  a mișcării sistemului în raport cu mediul înconjurător este mică, acțiunea mediului asupra sistemului poate fi descrisă printr-o forță de frecare de forma  $Q_1 = -\alpha\dot{q}$  ( $\alpha > 0$ ) opusă ca semn vitezei  $\dot{q}$ . Forța activă externă  $Q_a$  în multe cazuri de interes practic este o forță periodică de timp de forma  $Q_a(t) = Q_0 \cos \omega t$ .

Pentru un sistem supus acțiunii forțelor de tipurile menționate, în condițiile unor oscilații mici, ecuația Lagrange (1.4.12) capătă forma

$$a_0 \ddot{q} = Q_e + Q_f + Q_a = -kq - \alpha\dot{q} + Q_0 \cos \omega t. \quad (1.7.26)$$

Introducînd notațiile  $\alpha/a_0 = 2\delta$ ,  $k/a_0 = \omega_0^2$  și  $Q_0/a_0 = \beta$  această ecuație se transcrie în forma

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \beta \cos \omega t. \quad (1.7.27)$$

Se vede ușor că această ecuație pentru  $\lambda = 0$  și  $\beta = 0$  (adică în absența forței de frecare  $Q_f$  și a forței active  $Q_a$ ) este o ecuație a oscilațiilor libere de tipul (1.7.10) sau (1.7.25). De aici rezultă că  $\omega_0$  în (1.7.27) are semnificație de pulsație a oscilațiilor libere sau *pulsație proprie* a sistemului. Spre deosebire de  $\omega_0$  mărimea  $\omega$  din termenul drept al lui (1.7.27) reprezintă pulsația forței exterioare.

Ecuația (1.7.27) este o ecuație diferențială neomogenă. Soluția generală a ei se scrie ca o sumă între soluția generală a ecuației omogene

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1.7.28)$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene (1.7.27). Pentru a găsi soluția generală a lui (1.7.28) se ia  $q$  de forma  $q = e^{rt}$  și se găsește că  $r$  satisface ecuația caracteristică

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.7.29)$$

cu rădăcinile

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.7.30)$$



Deci soluția ecuației (1.7.28) este

$$q = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (1.7.31)$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sînt două constante arbitrare.

De notat aici că soluția (1.7.31) a ecuației (1.7.28) se discută pentru mai multe cazuri și anume: (i) cînd  $\delta < \omega_0$ , (ii) cînd  $\delta > \omega_0$  și (iii) cînd  $\delta = \omega_0$ . În primul caz se vede din (1.7.30) că rădăcinile  $r_1$  și  $r_2$  ale ecuației caracteristice (1.7.29) sînt mărimi complexe (conjugate între ele) și soluția (1.7.31) se poate scrie sub forma

$$q = e^{-\delta t} (C_1 e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} + C_2 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}) \quad (1.7.32)$$

Dacă de aici se ia numai partea reală a membrului drept atunci soluția ecuației diferențiale (1.7.28) se scrie sub forma

$$q = e^{-\delta t} b \cos[t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \varphi] \quad (1.7.33)$$

unde  $b$  și  $\varphi$  sînt două constante arbitrare. O mișcare descrisă de (1.7.33) se numește *oscilație amortizată* sau *oscilație neîntreținută*. Ea constă dintr-o oscilație armonică a cărei amplitudine descrește exponențial cu timpul. Se vede că pulsația  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  a oscilațiilor forțate este mai mică decît pulsația proprie  $\omega_0$  a oscilațiilor libere (în absența frecării).

Cazurile cu  $\delta > \omega_0$  și respectiv  $\delta = \omega_0$  în soluția (1.7.31) descriu mișcări *amortizate aperiodice*, mișcări pe care nu le vom discuta în detaliu aici.

Să revenim acum la problema căutării soluției generale a ecuației (1.7.27). Vom căuta această soluție pentru cazul  $\delta < \omega_0$ . Soluția căutată o vom găsi adăugînd la soluția generală (1.7.33) a ecuației (1.7.28) o soluție particulară de forma

$$q_1(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (1.7.34)$$

a ecuației neomogene (1.7.27). De notat că în (1.7.34) componentele  $B \cos \omega t$  și  $A \sin \omega t$  reprezintă oscilații în fază respectiv defazată cu  $-\pi/2$  față de forța activă externă  $Q_a = Q_0 \cos \omega t$ . Introducînd (1.7.34) în (1.7.27) se obține

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + 2A\delta\omega \cos \omega t - 2B\delta\omega \sin \omega t + \\ & + A\omega_0^2 \sin \omega t + B\omega_0^2 \cos \omega t - \beta \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (1.7.35)$$

Pentru ca această relație să fie satisfăcută indiferent de valorile lui  $t$  trebuie ca sumele coeficienților lui  $\sin \omega t$  și a coeficienților lui  $\cos \omega t$  să fie nule. De aici rezultă ecuațiile

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2B\delta\omega &= 0 \\ 2A\delta\omega + B(\omega_0^2 - \omega^2) &= \beta. \end{aligned} \quad (1.7.36)$$



Din acest sistem de ecuații se obțin

$$A = \beta \frac{2\delta\omega}{(\omega - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \equiv A_A \quad (1.7.37)$$

$$B = \beta \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \equiv A_D. \quad (1.7.38)$$

Constantele  $A_A$  și  $A_D$  se numesc *amplitudine de absorbție* respectiv *amplitudine de dispersie* (pentru justificarea acestor denumiri vezi mai jos).

Din cele de mai sus rezultă că soluția generală a ecuației (1.7.27), în condițiile în care  $\delta < \omega_0$ , este de forma

$$q(t) = be^{-\delta t} \cos[t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \varphi] + A_A \sin \omega t + A_D \cos \omega t. \quad (1.7.39)$$

Deoarece aici primul termen din expresia lui  $q(t)$  descrește exponențial cu timpul el poate fi neglijat după un interval de timp suficient de lung de la începutul mișcării. După un astfel de interval de timp mișcarea sistemului este descrisă, cu o foarte bună aproximație, de către funcția

$$q(t) = A_A \sin \omega t + A_D \cos \omega t \quad (1.7.40)$$

sau 
$$q(t) = A \cos(\omega t - \Phi) \quad (1.7.41)$$

cu 
$$A = \sqrt{A_A^2 + A_D^2} = \beta[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{-1/2}$$

$$\Phi = \arctg \frac{A_A}{A_D} = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.7.42)$$

Relația (1.7.41) arată că după un interval de timp suficient de lung de la începutul mișcării, mișcarea care rămâne este o oscilație cu pulsația  $\omega$  a forței externe. O asemenea mișcare se numește *oscilație întreținută* (sau forțată). De consemnat că oscilația forțată este defazată în urmă cu  $\Phi$  față de forța activă externă  $Q_a = Q_0 \cos \omega t$ .

Din (1.7.42) se vede că amplitudinea  $A$  a oscilațiilor forțate este o funcție  $A = A(\omega)$  de pulsația  $\omega$  a forței active exterioare. Valoarea  $\omega_r$  a lui  $\omega$  pentru care funcția  $A(\omega)$  își atinge maximum se numește *pulsație de rezonanță*. Evident că  $\omega_r$  este rădăcina ecuației

$$\left( \frac{dA}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_r} = 0. \quad (1.7.43)$$

Introducând în această ecuație (1.7.42) obținem

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (1.7.44)$$



Evident că valoarea maximă a lui  $A$  va fi

$$A_{max} = A(\omega_r) = \frac{\beta}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (1.7.45)$$

Din această relație se vede că amplitudinea maximă a oscilațiilor întreținute este cu atît mai mare cu cît constanta  $\delta$  (deci forța de frecare) este mai mică.

Să prezentăm acum cîteva mărimi energetice legate de oscilațiile forțate. Puterea instantanee absorbită de sistem de la forța exterioară o putem scrie, ținînd cont de (1.4.7), sub forma

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \frac{d\mathcal{A}_A}{dt} = Q_a \frac{dq}{dt} = Q_a \cdot \dot{q} = \\ &= Q_0 \cos \omega t [\omega A_A \cos \omega t - \omega A_D \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (1.7.46)$$

Introducînd valoarea medie pe un interval de timp egal cu perioada  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$  a forței active prin relația

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{t_0}^{t_0 + \mathcal{T}} F(t) dt \quad (1.7.47)$$

obținem pentru puterea medie, absorbită în decursul unei perioade următoarea expresie

$$P_A = \langle P_A(t) \rangle = Q_0 \omega A_A \langle \cos^2 \omega t \rangle - Q_0 \omega A_D \langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle. \quad (1.7.48)$$

Cu media definită în sensul relației (1.7.47) avem

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = 0. \quad (1.7.49)$$

Astfel se obține că *puterea medie* absorbită de la forța activă externă în decurs de o perioadă  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$  este dată de expresiile

$$P_A = \frac{1}{2} [Q_0 \omega A_A = \frac{1}{2} Q_0 \beta \frac{2\delta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}]. \quad (1.7.50)$$

Evident că în regimul de oscilații întreținute sistemul disipează energia absorbită (de la forța activă exterioară) sub formă de căldură prin intermediul forței de frecare  $Q_f = -\alpha\dot{q}$ . Ținînd cont de (1.4.7) și (1.7.40) se vede că puterea disipată instantanee este dată de

$$P_D(t) = \frac{d\mathcal{A}_D}{dt} = -Q_f \cdot \frac{dq}{dt} = \alpha\dot{q}^2 = 2a_0\delta[\omega A_A \sin \omega t - \omega A_D \cos \omega t]^2. \quad (1.7.51)$$



De aici se vede că puterea disipată instantanee  $P_D(t)$  diferă de puterea absorbită instantanee  $P_A(t)$  (definită de (1.7.46)). Dacă ne referim la medii în timp în sensul relației (1.7.47), ținând cont de (1.7.49) și (1.7.51), obținem pentru *puterea medie disipată*  $P_D$  expresia

$$P_D = \langle P_D(t) \rangle = a_0 \delta \omega^2 [A_A^2 + A_D^2] = a_0 \delta \omega^2 A^2. \quad (1.7.52)$$

Ținând cont de (1.8.42), (1.8.50) și (1.8.52) se vede ușor că se poate scrie

$$P_A = P_D = P(\omega) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{a_0} \frac{2\delta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad (1.7.53)$$

adică puterea medie absorbită de un sistem ce oscilează forțat este egală cu puterea medie disipată de respectivul sistem. Din (1.7.53) se vede ușor că valoarea maximă a puterii medii  $P(\omega)$  se atinge pentru cazul când  $\omega = \omega_0$  (adică atunci când pulsația forței active externe este egală cu pulsația proprie a sistemului). Funcția  $P = P(\omega)$  se numește și curbă de rezonanță (fig. 1.7.6).

Legat de oscilațiile forțate ale unui sistem uneori este important să se cunoască energia medie (în timp) a lui. Această energie este dată de

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} a_0 \langle \dot{q}^2 \rangle + \frac{1}{2} k \langle q^2 \rangle. \quad (1.7.54)$$

Ținând cont de notațiile introduse în (1.7.27) precum și de relațiile (1.7.37), (1.7.38), (1.7.40) și (1.7.49) se obține pentru  $\langle E \rangle$  expresia

$$\langle E \rangle = E(\omega) = \frac{Q_0^2}{4a_0} \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}. \quad (1.7.55)$$

În legătură cu funcția  $P(\omega)$  definită de (1.7.53) se definește și așa numita *lărgime a liniei* (sau lărgime a curbei de rezonanță) ca fiind intervalul  $\Delta\omega_{rez} = \omega_2 - \omega_1$ , între pulsațiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  pentru care puterea  $P(\omega)$  este jumătate din puterea maximă  $P(\omega_0)$ . Deci  $\omega_{1,2}$  sînt rădăcinile ecuației

$$P(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} P(\omega_0) \quad (1.7.56)$$

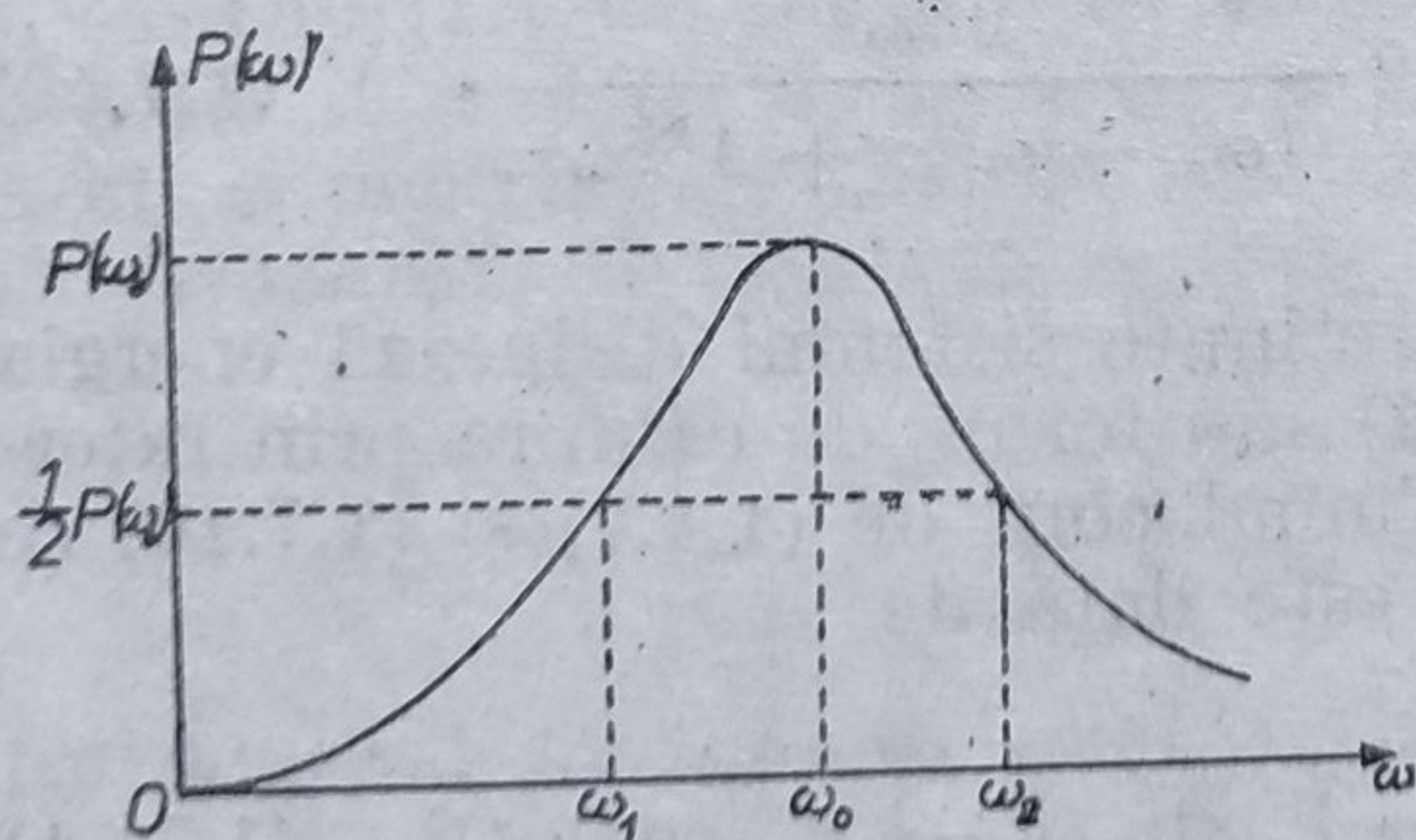


Fig. 1.7.6

Folosind pentru  $P(\omega)$  expresia (1.7.53) se vede ușor că această ecuație are patru rădăcini distincte — două negative și două pozitive. Cele pozitive, care ne interesează în problema dis-



cutată, sînt

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} - \delta, \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} + \delta. \quad (1.7.57)$$

Deci lărgimea liniei este

$$\Delta\omega_{rez} = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta. \quad (1.7.58)$$

Să menționăm acum o relație care leagă lărgimea liniei  $\Delta\omega_{rez}$  de așa numitul *timp de relaxare* (sau timp de amortizare)  $\tau$  al sistemului. Din (1.7.32) se vede că amplitudinea oscilațiilor neîntreținute (în absența forței active exterioare) scade proporțional cu  $e^{-\delta t}$ . Deci pătratul amplitudinii oscilațiilor neîntreținute (mărimă cu care este proporțională energia sistemului — vezi (1.7.54)) scade proporțional cu  $(e^{-\delta t})^2 = e^{-2\delta t}$ .

Atunci se vede ușor că în intervalul de timp  $\tau = \frac{1}{2\delta}$  pătratul amplitudinii oscilațiilor neîntreținute scade de  $e$  ori ( $e^{-2\delta\tau} = e^{-1} = 1/e$ ). Mărimă  $\tau$  se numește *timp de relaxare* (sau timp de amortizare ori constantă de timp) a oscilațiilor neîntreținute (amortizate). Din cele spuse mai sus și din (1.7.58) se vede că între timpul de relaxare  $\tau$  și lărgimea liniei  $\Delta\omega_{rez}$  există următoarea relație simplă

$$\Delta\omega_{rez} \cdot \tau = 1. \quad (1.7.59)$$

Relația (1.7.59) (sau echivalentul ei, relația (1.7.58)) are în multe situații o importanță practică nemijlocită. Aceasta deoarece de multe ori este mai ușor să se determine experimental lărgimea liniei  $\Delta\omega_{rez}$  (din curba  $P(\omega)$ ) și apoi din relațiile (1.7.58) — (1.7.59) să se determine parametrii  $\delta$  sau  $\tau$  ce caracterizează amortizarea sistemului (adică forțele de frecare la care este supus sistemul), decît să se studieze nemijlocit oscilațiile amortizate pentru a determina  $\delta$  sau  $\tau$ .

Dacă notăm cu  $P(\omega_0)$  și  $E(\omega_0)$  valorile lui  $P(\omega)$  din (1.7.53) și respectiv a lui  $E(\omega)$  din (1.7.55) pentru  $\omega = \omega_0$  se vede ușor că se poate scrie

$$P(\omega_0) \cdot \tau = E(\omega_0). \quad (1.7.60)$$

Această relație arată că atunci cînd pulsația  $\omega$  a forței active coincide cu pulsația proprie  $\omega_0$  a sistemului energia medie disipată de sistem într-un interval de timp egal cu timpul de relaxare este egală cu energia medie proprie a sistemului.

Raportul între pulsația proprie  $\omega_0$  și lărgimea liniei  $\Delta\omega_{rez}$  adică mărimă adimensională

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{rez}} \quad (1.7.61)$$

se numește *factor de calitate* al sistemului care execută oscilații întreținute. Din relațiile (1.7.59) — (1.7.61) se vede că se poate scrie

$$Q = \omega_0 \frac{E(\omega_0)}{P(\omega_0)} = 2\pi \frac{E(\omega_0)}{P(\omega_0)\mathcal{T}_0} \quad (1.7.62)$$



Această relație arată că factorul de calitate  $Q$  al sistemului oscilant este egal cu  $2\pi$  înmulțit cu raportul între energia medie a sistemului și energia medie disipată într-o perioadă în condițiile când pulsația  $\omega$  a forței active este egală cu pulsația proprie a sistemului. Datorită expresiei (1.7.62), factorul de calitate  $Q$  este un parametru important folosit în caracterizarea *oscilatorilor* (adică a sistemelor care execută mișcări oscilatorii întreținute). În tabelul de mai jos sînt date, pentru ilustrare, valorile lui  $Q$  pentru cîteva tipuri de oscilatori.

Tabela 1.7.1

Tipul de oscilator	$Q$
Oscilațiile seismice	25—1400
Coarda de vioară	$10^3$
Oscilațiile electronului în atom	$10^7$
Laser	$10^{12}$
Oscilații nucleare (efect Mössbauer)	$3 \cdot 10^{12}$

## § 1.8. MIȘCAREA PARTICULELOR ÎN CÎMPURI DE FORȚE CENTRALE

Un cîmp de forțe centrale se caracterizează prin proprietatea că energia potențială a unei particule într-un astfel de cîmp depinde numai de distanța particulei față de un punct fix numit *centrul cîmpului*. Pentru o particulă plasată într-un astfel de cîmp, dacă se alege originea axelor de coordonate în centrul cîmpului, energia potențială se scrie sub forma

$$V = V(r), \quad r = |\mathbf{r}| \quad (1.8.1)$$

iar forța ce acționează asupra ei este de forma

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.8.2)$$

Momentul acestei forțe față de centrul cîmpului este nul deoarece

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0. \quad (1.8.3)$$

Atunci, conform cu (1.2.24), momentul cinetic al particulei în raport cu centrul cîmpului este constant, adică

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (1.8.4)$$



Avînd în vedere relația (1.2.14) și faptul că masa  $m$  a particulei este constantă, relația (1.8.4) implică faptul că la mișcarea unei particule într-un câmp de forțe centrale viteza areolară este constantă, adică

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \text{const.} \quad (1.8.4.a)$$

Această ultimă afirmație, cînd se referă la mișcarea planetelor, este cunoscută sub denumirea de *legea a doua a lui Kepler*.

Multiplicînd relația (1.8.4) scalar cu  $\vec{r}$  se obține

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

sau

$$xL_x + yL_y + zL_z = 0 \quad (1.8.5)$$

cu  $L_x$ ,  $L_y$  și  $L_z$  constante. Cum relația (1.8.5) reprezintă ecuația unui plan ce trece prin origine înseamnă că mișcarea unei particule într-un câmp de forțe centrale se desfășoară într-un plan ce trece prin centrul câmpului. Acest plan este definit complet în spațiu de vectorii  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{v}$  și, după cum arată relația (1.8.5), este perpendicular pe momentul cinetic  $\mathbf{L}$  al particulei.

Înainte de a trece la discutarea unor probleme legate de mișcarea particulelor în anumite tipuri particulare de câmpuri centrale să menționăm că problema mișcărilor în câmpuri de forțe centrale include și așa numita *problemă a două corpuri*. Această problemă constă în studiul mișcărilor unui sistem format din două particule (de mase  $m_1$  și  $m_2$  și de vectori de poziție  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$ ) nesupuse acțiunii unor forțe externe și care interacționează între ele cu o forță de forma  $\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . După cum am văzut în § 1.2 (formulele (1.2.56)–(1.2.60)), mișcarea sistemului respectiv poate fi descrisă cu ajutorul vectorilor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  și  $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ . Avînd în vedere relațiile (1.2.59) și (1.2.60) ecuațiile Lagrange (1.4.12) ne dau că mișcarea sistemului considerat este descrisă de ecuațiile

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (1.8.6)$$

$$\mu\mathbf{r} = f(r) \cdot \mathbf{r} = - \nabla V(r) \quad (1.8.7)$$

unde  $M = m_1 + m_2$  este masa totală, iar  $\mu = m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$  este masa redusă a sistemului. Relațiile (1.8.6) și (1.8.7) ne arată că mișcările celor două particule sînt echivalente cu un ansamblu de două mișcări: mișcarea liberă a centrului de inerție ( $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ ) și mișcarea unei particule fictive de masă egală cu masa redusă  $\mu$  a sistemului într-un câmp de forțe centrale. În cazul cînd  $m_1 \ll m_2$  după cum se vede din (1.2.57)–(1.2.60) avem  $\mathbf{R} \approx \mathbf{r}_2$  și  $\mu \approx m_1$ . Atunci mișcările descrise de (1.8.6) și (1.8.7) sînt respectiv mișcarea liberă a particulei de masă  $m_2$  și mișcarea particulei de masă  $m_1$  într-un câmp de forțe centrale cu centrul în particula de masă  $m_2$ . Acesta este, de exemplu, cazul mișcării oricăreia dintre planetele (de masă  $m_1$ )



din sistemul solar în jurul Soarelui (de masă  $m_2$ ), deoarece masa tuturor planetelor este cam 1/700 din masa Soarelui.

Să trecem acum să prezentăm câteva detalii referitoare la mișcarea particulelor în câmpuri centrale caracterizate prin energii potențiale de forma

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (1.8.8)$$

unde  $\alpha$  este o constantă pozitivă sau negativă. Astfel de câmpuri sînt întîlnite în cazul interacțiunilor gravitaționale (newtoniene) cînd  $\alpha < 0$  sau a celor electrostatice (coulombiene — vezi cap. VI) cînd  $\alpha > 0$  sau  $\alpha < 0$ . Pentru o particulă de masă  $m$  care se mișcă într-un câmp descris de (1.8.8) se conservă mărimea vectorială

$$\Lambda = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + \frac{m \alpha \mathbf{r}}{r} \quad (1.8.9)$$

unde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  și  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  sînt impulsul respectiv momentul cinetic al particulei. Într-adevăr, avînd în vedere (1.8.4) și relațiile  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} = -\nabla V = \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$ , se vede ușor că se poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \frac{m\alpha}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{m\alpha \mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} = \\ &= \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} + \frac{\alpha}{r} \left[ m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] - \frac{m\alpha \mathbf{r}}{r^2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = \\ &= \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \frac{\alpha}{r} \mathbf{p} - \frac{m\alpha \mathbf{r}}{r^3} \left( \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \\ &= \frac{\alpha}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] + \frac{\alpha}{r} \mathbf{p} - \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \left( \mathbf{r} \cdot m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \\ &= \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{p} \cdot r^2 + \frac{\alpha}{r} \mathbf{p} - \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.10)$$

Din faptul că  $\Lambda = \text{const.}$  se poate obține ecuația traiectoriei particulei. Pentru aceasta se alege un sistem de axe de coordonate  $xOy$  cu originea  $O$  plasată în centrul câmpului cu axa  $Ox$  orientată după vectorul  $\mathbf{p}$  și respectiv axa  $Oy$  orientată după vectorul  $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$  (fig. 1.8.1). Conform cu (1.8.5) vectorul  $\mathbf{r}$  și deci mișcarea particulei se află în planul  $xOy$  astfel ales. De



asemenea, din (1.8.9) se vede atunci că și vectorul  $\Lambda$  se află în planul  $xOy$  menționat (planul mișcării) și are punctul de aplicație în punctul 0 (centrul câmpului). Vectorul  $\Lambda$  fiind constant unghiul  $\varphi$  între  $\mathbf{r}$  și  $\Lambda$  se va modifica în decursul timpului. Având în vedere că  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  din relația (1.8.9) și de pe figura 1.8.1 se pot scrie relațiile

$$\Lambda_x = \frac{m\alpha x}{r}, \quad \Lambda_y = pL + \frac{m\alpha y}{r} \quad (1.8.11)$$

$$\Lambda^2 = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 = \left(\frac{m\alpha}{r}\right)^2 x^2 + \left(\frac{m\alpha}{r}\right)^2 y^2 + p^2 L^2 + 2pL \frac{m\alpha y}{r} =$$

$$= m^2 \alpha^2 + p^2 L^2 + L^2 \frac{2m\alpha}{r} = m^2 \alpha^2 + 2mL^2 \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} \right) =$$

$$= m^2 \alpha^2 + 2mL^2(T + V) = m^2 \alpha^2 + 2mL^2 E = \text{const.} \quad (1.8.12)$$

unde  $T$ ,  $V$  și  $E$  sînt respectiv energiile cinetică, potențială și totală ale particulei.

Folosind expresiile (1.8.11) și figura 1.8.1 se poate stabili ușor ecuația traiectoriei particulei exprimată ca dependență a lui  $r$  de  $\varphi$  (adică a distanței particulei față de centrul câmpului funcție de unghiul  $\varphi$  între  $\mathbf{r}$  și  $\Lambda$ ). Într-adevăr se vede ușor că se poate scrie

$$r\Lambda \cos \varphi = \mathbf{r} \cdot \Lambda = x\Lambda_x + y\Lambda_y = \frac{m\alpha}{r} x^2 + \frac{m\alpha}{r} y^2 + pLy = m\alpha r + L^2. \quad (1.8.13)$$

Din această relație rezultă ecuația traiectoriei

$$r = \frac{s}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (1.8.14)$$

$$\text{cu} \quad s = -\frac{L^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = -\frac{\Lambda}{m\alpha}; \quad (1.8.15)$$

$s$  se numește *parametru focal*. Pentru  $s \neq 0$  (adică  $L \neq 0$ ) ecuația (1.8.14) reprezintă ecuația unei conice în funcție de *excentricitatea*  $\varepsilon$ . Diferitele forme particulare de curbe în funcție de valorile lui  $\varepsilon$  sînt indicate în

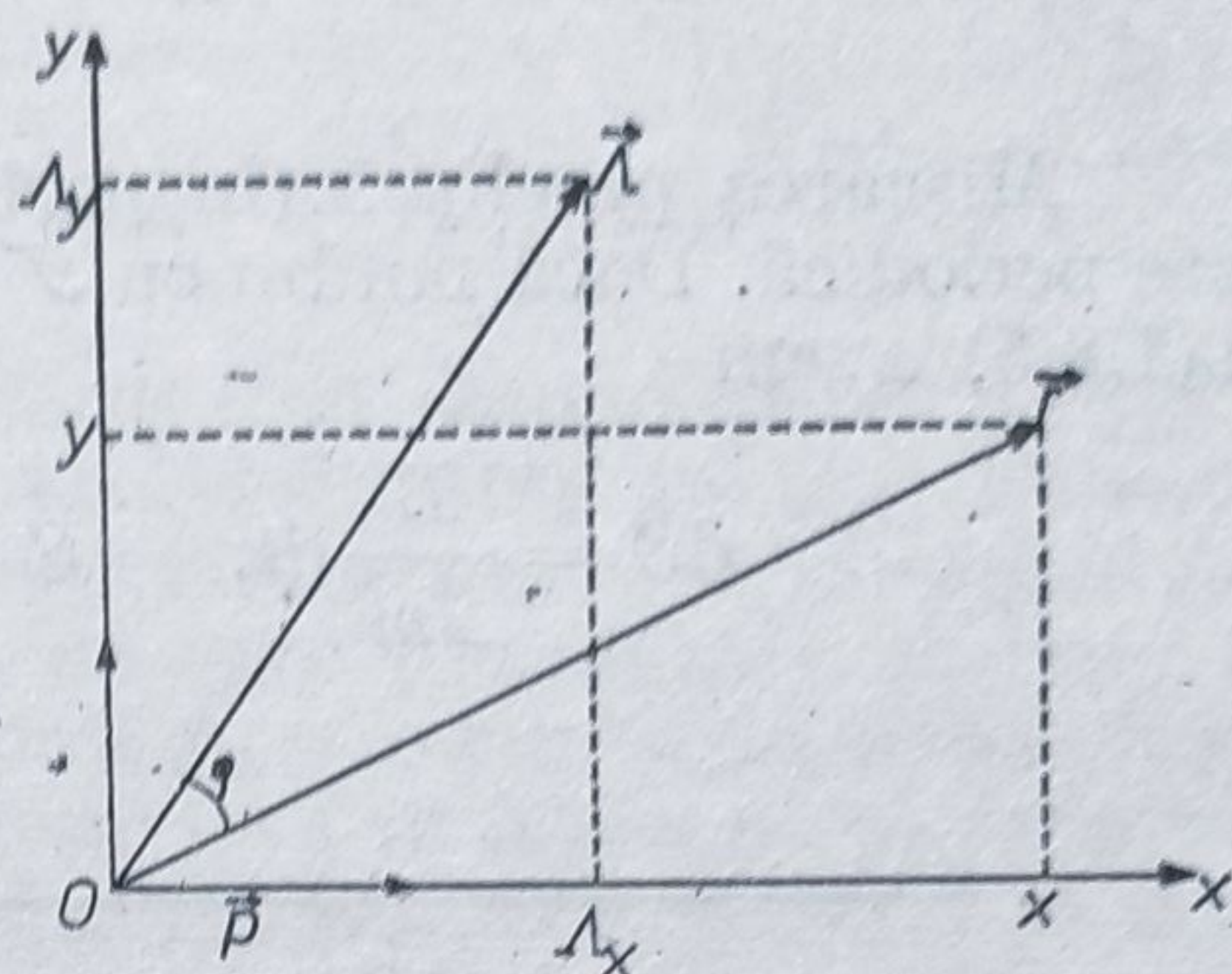


Fig. 1.8.1



tabelul 1.8.1. Pentru aceleași valori ale lui  $\varepsilon$  sînt indicate și valorile energiei totale  $E$  a particulei, care conform cu (1.8.12) și (1.8.15) are expresia

$$E = \frac{m\alpha^2(\varepsilon^2 - 1)}{2L^2}. \quad (1.8.16)$$

Mișcarea pe elipsă (în particular pe cerc) se distinge prin faptul că este periodică. Dacă notăm cu  $\mathcal{T}$  perioada unei astfel de mișcări din (1.8.4) și (1.8.5) avem

$$dS = \frac{L}{2m} dt, \quad S = \int_0^{\mathcal{T}} dS = \int_0^{\mathcal{T}} \frac{L}{2m} dt = \frac{L\mathcal{T}}{2m} \quad (1.8.17)$$

Tabelul 1.8.1

Valorile lui $\varepsilon$	Valorile lui $E$	Forma traiectoriei
$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{m\alpha^2}{2L}$	Cerc
$0 < \varepsilon < 1$	$E < 0$	Elipsă
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabolă
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hiperbolă

$dS$  și  $S$  fiind ariile măturate de raza vectoare în intervalul  $dt$  respectiv într-o perioadă  $\mathcal{T}$ . Dar pentru o mișcare pe o elipsă,  $S$  este tocmai suprafața elipsei deci

$$S = \pi ab \quad (1.8.18)$$

$a$  și  $b$  fiind semiaxele elipsei. Ținînd cont de (1.8.14), după cum se știe din geometrie, valorile lui  $a$  și  $b$  sînt

$$a = \frac{s}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{s}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (1.8.19)$$

Din relațiile (1.8.17)–(1.8.19) și (1.8.15) se găsește atunci relația

$$\mathcal{T}^2 = 2\pi a^3 \frac{m}{|\alpha|}. \quad (1.8.20)$$

Această relație, aplicată la mișcarea planetelor în jurul Soarelui, este cunoscută sub denumirea de *legea a treia a lui Kepler* și arată că pătratul perioadei de revoluție a unei planete este proporțional cu cubul semiaxei mari a elipsei pe care se mișcă.



În tabelul 1.8.2 sînt date caracteristicile orbitelor eliptice descrise de planetele sistemului solar în jurul Soarelui, precum și masa  $m$  a planetelor și unghiul  $\theta$  de înclinare a planului orbitelor lor în raport cu planul orbitei Pămîntului. Semiaxa mare  $a$  orbitelor planetelor este exprimată în funcție de semiaxa mare  $a_P$  corespunzătoare Pămîntului ( $a_P = 1,495 \cdot 10^{11} \text{m}$  și reprezintă semisuma distanțelor pînă la Soare a Pămîntului aflat la afeliu ( $r = r_{\max}$ ) și periheliu ( $r = r_{\min}$ );  $a_P$  este numită și unitate astronomică de distanță).

Din considerentele de mai sus, în cazul cînd cîmpul de forțe centrale este cîmpul de atracție gravitațională al Pămîntului, se pot determina *prima și a doua viteză cosmică*. Prima viteză cosmică  $v_I$  este viteza minimă necesară pentru a lansa de pe Pămînt un corp (de masă  $m$ ) pentru a-l transforma în satelit. A doua viteză cosmică  $v_{II}$  este viteza minimă necesară unui corp pentru a părăsi complet Pămîntul (și a se mișca pe o traiectorie deschisă cu  $\varepsilon \geq 1$ ). Prima viteză  $v_I$  se realizează pentru  $\varepsilon = 0$  și  $r = R_P = 6,4 \cdot 10^6 \text{m}$  = raza Pămîntului. Din (1.8.14) și (1.8.15), ținînd cont că  $|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = R_P \cdot m v_I$  și punînd  $\alpha = -G M_P m$  ( $M_P$  — masa Pămîntului,  $m$  — masa corpului și  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  — constanta atracției universale), găsim

$$R_P = s = -\frac{L^2}{m\alpha} = \frac{R_P^2 m^2 v_I^2}{m G M_P m}; v_I = \sqrt{\frac{G M_P}{R_P}} \approx 8 \cdot 10^3 \frac{m}{s}. \quad (1.8.21)$$

După cum se vede din tabelul 1.8.1 un corp părăsește complet Pămîntul și descrie o mișcare infinită cînd energia sa totală la suprafața Pămîntului devine mai mare sau egală cu zero. Atunci (cu  $\alpha = -G M_P m$ ) se poate scrie

$$E = \frac{m v_{II}^2}{2} - G \frac{M_P m}{R_P} = 0; v_{II} = \sqrt{\frac{2 G M_P}{R_P}} \approx 11,2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}. \quad (1.8.22)$$

Expresia (1.8.14) a ecuației traiectoriei unei particule într-un cîmp central de tipul (1.8.8) ne permite să stabilim relativ ușor așa numita *formulă a lui Rutherford* referitoare la împrăștierea unor particule într-un cîmp central

Tabelul 1.8.2

Planeta	Masa planetei (kg)	$a$ (în $a_P$ )	$\mathcal{T}$ (secunde)	$\varepsilon$	$\theta$
Mercur	$3,28 \cdot 10^{23}$	0,387	$7,60 \cdot 10^6$	0,205	$7^\circ 00'$
Venus	$4,83 \cdot 10^{24}$	0,723	$1,94 \cdot 10^7$	0,006	$3^\circ 23'$
Pămînt	$5,98 \cdot 10^{24}$	1,000	$3,16 \cdot 10^7$	0,016	0
Marte	$6,73 \cdot 10^{23}$	1,523	$5,94 \cdot 10^7$	0,093	$1^\circ 51'$
Jupiter	$1,9 \cdot 10^{27}$	5,202	$3,74 \cdot 10^8$	0,048	$1^\circ 18'$
Saturn	$5,67 \cdot 10^{26}$	9,554	$9,3 \cdot 10^8$	0,055	$2^\circ 29'$
Uranus	$8,80 \cdot 10^{25}$	19,218	$2,66 \cdot 10^9$	0,046	$0^\circ 46'$
Neptun	$1,03 \cdot 10^{26}$	30,109	$5,20 \cdot 10^9$	0,008	$1^\circ 46'$
Pluton	$5,4 \cdot 10^{24}$	39,60	$7,82 \cdot 10^9$	0,246	$17^\circ 7'$



de respingere ( $\alpha > 0$ ). Pentru aceasta vom considera o mișcare infinită a unei particule care, la distanță infinit de mare de centrul cîmpului, are viteza  $v_\infty$  și a cărei direcție inițială de mișcare (tangentă la  $v_\infty$ ) trece la

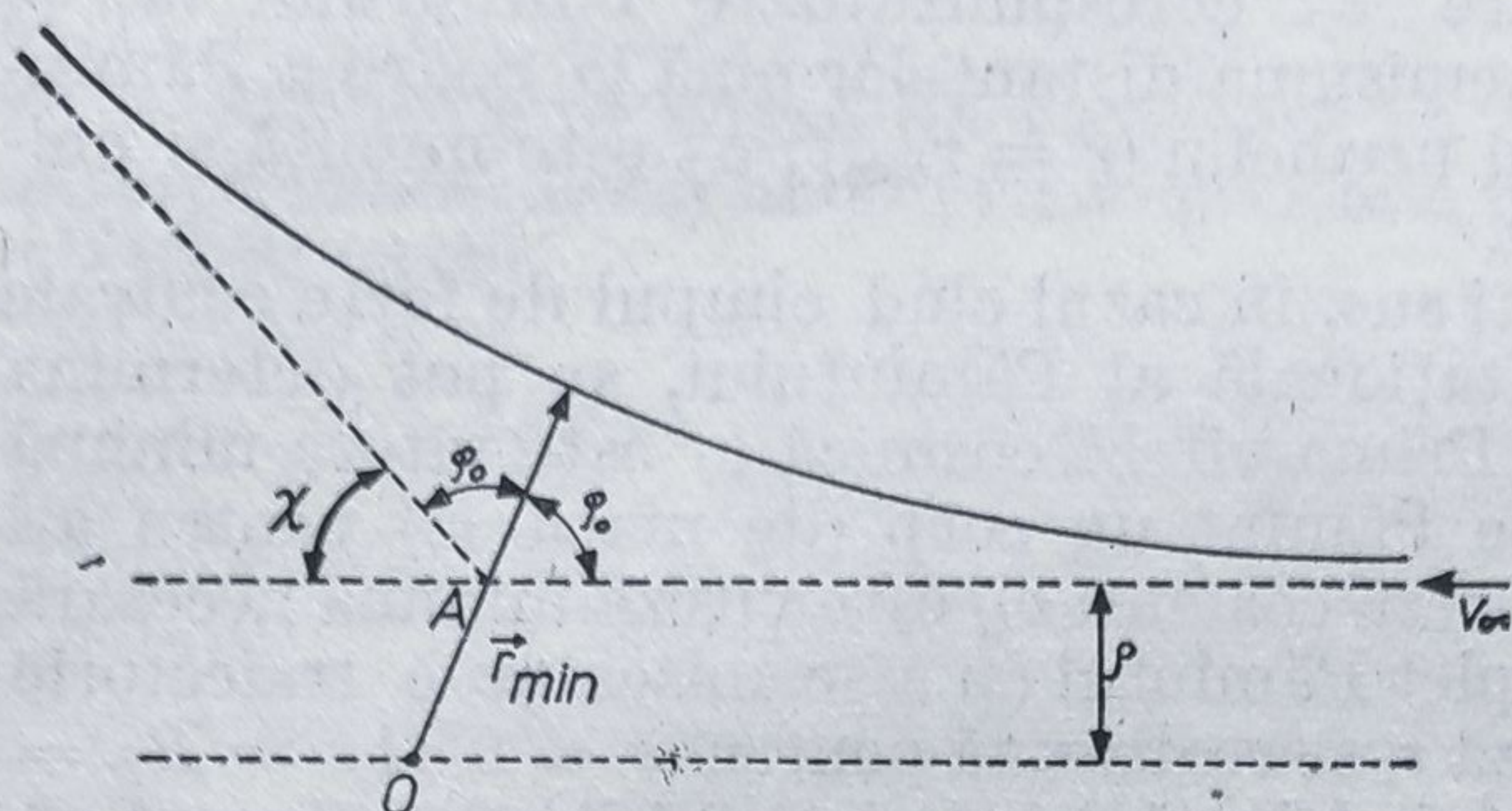


Fig. 1.8.2

distanța  $\rho$  (numită parametru de șoc) de centrul cîmpului (fig. 1.8.2). Evident că energia totală și momentul cinetic al particulei se conservă și au valorile  $E = E_\infty = mv_\infty^2/2$  și respectiv  $L = L_\infty = mv_\infty \rho$  (vezi și figura 1.8.2). Traiectoria particulei va fi o hiperbolă ( $E > 0$ ). Unghiul de difuzie  $\chi$ , după cum se vede din figura 1.8.2, este

unghiul dintre asimptotele la traiectoria hiperbolică și este dat de relația

$$\chi = \pi - \varphi_0 \quad (1.8.23)$$

unghiul  $\varphi_0$  fiind determinat de direcțiile lui  $\mathbf{r}$  pentru care  $r = \infty$  și  $r = r_{min}$ . Din (1.8.14), (1.8.15) și (1.8.12) cu  $\alpha > 0$  rezultă că  $\varphi_0$  este soluția ecuației

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_0 = 1 - \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} \cos \varphi_0 = 0$$

sau a ecuației

$$\left(1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}\right) \cos^2 \varphi_0 = 1 \quad (1.8.24)$$

Punînd aici  $E = E_\infty = mv_\infty^2/2$  și  $L = L_\infty = mv_\infty \cdot \rho$  și ținînd cont de (1.8.23) se obține

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2} \quad (1.8.25)$$

Această relație stabilește dependența între unghiul de difuzie  $\chi$  și parametrul de șoc  $\rho$ . Dacă avem de a face cu un flux de particule care toate sînt împrăștiate (difuzate) de același centru, atunci numărul de particule  $dN$  care au parametrul de șoc cuprins în intervalul  $(\rho, \rho + d\rho)$  vor fi difuzate în intervalul unghiular  $(\chi, \chi + d\chi)$ . Dar dacă în fluxul incident numărul de particule care trec în unitatea de timp prin unitatea de suprafață este  $n$ , se poate scrie

$$dN = n \cdot 2\pi \rho d\rho = \pi n d(\rho)^2. \quad (1.8.26)$$



Aceste  $dN$  particule vor fi difuzate în intervalul unghiular  $(\chi, \chi + d\chi)$ , iar mărimea

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (1.8.27)$$

definește a cîta parte din particulele incidente sînt difuzate în intervalul unghiular  $(\chi, \chi + d\chi)$ . Mărimea  $d\sigma$  se numește *secțiune eficace diferențială* a procesului de difuzie. Se vede ușor că  $d\sigma$  se măsoară în unități de suprafață. Din relațiile (1.8.25)–(1.8.27) rezultă

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)} d\chi. \quad (1.8.27)$$

În locul intervalului unghiular infinitezimal  $d\chi$  adesea se folosește unghiul solid  $d\Omega$  cuprins între conurile de deschidere  $\chi$  și  $\chi + d\chi$  definit prin relația

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi. \quad (1.8.28)$$

Atunci expresia (1.8.27) se transcrie sub forma

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2mv_\infty} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\chi/2)}. \quad (1.8.29)$$

Această relație este cunoscută sub denumirea de *formula lui Rutherford*.

## § 1.9. ELEMENTE DE MECANICA CORPURILOR DE MASĂ VARIABILĂ

În paragrafele precedente au fost studiate diverse probleme legate de mișcările mecanice ale unor corpuri a căror masă nu variază în cursul mișcării. În practică, însă, întîlnim adesea corpuri a căror masă variază în timpul mișcării. Ca exemple de astfel de corpuri pot fi citate: o piesă în timpul prelucrării prin așchiere, un corp căruia într-un proces tehnologic oarecare i se adaugă în mod continuu masă (de exemplu o platformă mobilă ce este încărcată din mers), un dispozitiv hidraulic care în timpul funcționării absoarbe și elimină continuu fluxuri de fluide, un avion cu motor autoreactor (care-și schimbă masa prin absorbirea aerului în motor și prin procesul de eliminare a aerului împreună cu produsele de ardere ale motorului), o barcă cu motor cu reacție (care se deplasează ca urmare a absorbirii apei de către o pompă și eliminarea ei cu viteză mare în sens opus mișcării), o rachetă sau un proiectil reactiv. Este cît se poate de clar că



studiul mișcărilor corpurilor de masă variabilă prezintă un interes real, atât din punct de vedere teoretic, principal, cât și din punct de vedere al aplicațiilor practice și că un astfel de studiu face parte în mod firesc din mecanică.

În cele ce urmează ne vom referi doar la corpuri de masă variabilă ale căror dimensiuni proprii sînt mici în comparație cu distanțele spațiale pe care ele se mișcă. Astfel de corpuri pot fi considerate ca fiind punctiforme. Un corp punctiform cu masă variabilă îl concepem ca un ansamblu de particule materiale ce se dezlipesc (separă) sau se alipesc la corp. Un astfel de ansamblu de particule materiale poate fi privit ca un sistem mecanic a cărui masă nu se modifică în procesul mișcării. Pentru studiul mișcărilor unui corp de masă variabilă vom admite, ca o *ipoteză de bază*, că respectivul corp interacționează cu particulele materiale care i se alipesc sau cu cele care se detașează de el doar în momentul „contactului” cu ele. Această ipoteză simplifică considerabil investigarea mișcărilor corpurilor de masă variabilă și permite să se facă abstracție de mișcarea particulelor materiale după separarea lor de corp sau după alipirea lor la corp.

Pentru a introduce ecuațiile de bază referitoare la mișcarea corpurilor de masă variabilă este necesar să aplicăm ecuația de mișcare (1.2.46) a unui sistem de particule materiale sub forma

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.9.1)$$

Aici, conform ipotezei de bază amintite mai sus,  $\mathbf{P}$  reprezintă impulsul corpului de masă variabilă  $m$  și a particulelor de masă  $\Delta m$  (sau  $-\Delta m$ ) care se alipesc (sau se desprind) de corp, iar  $\mathbf{F}$  reprezintă forța aplicată corpului. Pentru a găsi ecuația de mișcare a corpului de masă variabilă se impune să fie explicitată (detaliată) expresia mărimii  $d\mathbf{P}/dt$ . În acest scop vom concepe  $d\mathbf{P}/dt$  ca limită a raportului între o creștere  $\Delta\mathbf{P}$  a impulsului corpului și intervalul de timp  $\Delta t$  în care are loc respectiva creștere. Să considerăm că la momentul  $t$  corpului de masă  $m$  și viteză  $\mathbf{v}$  i se alipește o particulă de masă  $\Delta m$  avînd viteza  $\mathbf{u}$ . Atunci impulsul sistemului la momentul  $t$  va fi

$$\mathbf{P}(t) = m\mathbf{v} + \Delta m\mathbf{u}. \quad (1.9.2)$$

La momentul  $t + \Delta t$  corpul și particula se vor mișca ca un singur punct material de masă  $m + \Delta m$  și viteză  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ . Atunci impulsul sistemului la momentul  $t + \Delta t$  se va scrie sub forma

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathbf{P}(t) + \Delta\mathbf{P} = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}). \quad (1.9.3)$$

Din (1.9.2) și (1.9.3) rezultă

$$\Delta\mathbf{P} = m\Delta\mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Delta m \cdot \Delta\mathbf{v}. \quad (1.9.4)$$

Présupunem în continuare că alipirea (sau dezlipirea) particulelor de corp se face de așa manieră încît masa corpului este o funcție  $m = m(t)$  continuă



și diferențiabilă de timp. Din (1.10.4) putem scrie atunci

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \frac{dm}{dt} \quad (1.9.5)$$

deoarece  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta m \cdot \Delta \mathbf{v} / \Delta t) = 0$ . Introducând acum (1.9.5) în (1.9.1) obținem ecuația

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (1.9.6)$$

Această ecuație reprezintă legea de bază a dinamicii corpurilor de masă variabilă și poartă denumirea de *ecuația lui Meșcerski*. Se vede ușor că în cazul în care masa corpului este constantă ( $dm/dt = 0$ ) ecuația Meșcerski se reduce la ecuația Newton obișnuită. Trecând în (1.9.6) termenul  $(dm/dt)\mathbf{v}$  din partea dreaptă în partea stângă se vede ușor că ecuația Meșcerski se poate scrie și sub forma

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u}. \quad (1.9.7)$$

**Mărimea**

$$\mathbf{F}_R = \frac{dm}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \frac{dm}{dt} \mathbf{w} \quad (1.9.8)$$

din ecuația (1.9.6) se numește *forță reactivă*, iar mărimea  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  este *viteza reactivă* a particulelor față de corp.

Să aplicăm în continuare ecuația Meșcerski la problema mișcării unei rachete, în absența vreunor forțe exterioare, numai sub acțiunea forței reactive  $\mathbf{F}_R$  produsă prin evacuarea (de către motoarele rachetei) a unor gaze. Vom nota cu  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  și  $m_0$  valorile razei de poziție  $\mathbf{r}$ , a vitezei  $\mathbf{v}$  și respectiv masei  $m$  ale rachetei la momentul inițial  $t = 0$ . Folosind notația  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  pentru viteza relativă față de rachetă a particulelor evacuate din (1.9.6) avem pentru cazul discutat

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \mathbf{w} = \frac{d \ln m}{dt} \mathbf{w} \quad (1.9.9)$$

de unde, prin integrare, obținem

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \frac{d[\ln m(t')]}{dt'} \mathbf{w}(t') dt' \quad (1.9.10)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \int_0^{t'} \frac{d[\ln m(t'')]}{dt''} \mathbf{w}(t'') dt'' dt' \quad (1.9.11)$$



În cazul particular cînd viteza relativă  $w$  a particulelor evacuate este constantă ( $w(t) = w_0 = \text{const.}$ ), relațiile (1.9.10) și (1.9.11) se transcriu

$$v = v_0 - w_0 \ln \frac{m_0}{m(t)} = v_0 + v' \quad (1.9.12)$$

$$r = r_0 + v_0 t - w_0 \int_0^t \ln \frac{m_0}{m(t')} dt', \quad (1.9.13)$$

Aceste ecuații sînt cunoscute sub denumirea de *ecuațiile lui Tsiolkovski*. Mărimea  $v'$  definită după cum se vede din (1.9.12), prin relația

$$v' = -w_0 \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (1.9.14)$$

reprezintă *viteza suplimentară* dobîndită de rachetă ca rezultat al acțiunii motoarelor. Dacă notăm cu  $m_R$  masa rachetei (fără combustibil) și cu  $m_c$  masa totală a combustibilului de care dispunea racheta la  $t = 0$  se vede că viteza suplimentară finală dobîndită de rachetă după consumarea întregii mase de combustibil va fi

$$v'_{final} = -w_0 \ln \frac{m_R + m_c}{m_R} = w_0 \ln \left( 1 + \frac{m_c}{m_R} \right). \quad (1.9.15)$$



## Elemente de mecanica mediilor continue

### § 2.1. INTRODUCERE

Corpurile materiale de multe ori sînt implicate în mișcări în decursul cărora forma și structura lor internă se schimbă datorită mișcărilor relative ale părților lor constituente. Într-o primă aproximație studiul respectivelor mișcări se poate întreprinde făcînd abstracție de constituția moleculară și atomică a respectivelor corpuri și considerînd un astfel de corp drept un *mediu continuu* în care masa este distribuită în mod continuu (în sensul analizei matematice) în volumul ocupat de corp. Într-o astfel de aproximație evident că pot fi studiate numai proprietățile și mișcările macroscopice ale corpurilor — adică acele proprietăți și mișcări care se referă la distanțe spațiale mult mai mari decît dimensiunile atomilor și moleculelor. Experiența arată că aproximația menționată este suficient de bună pentru studiul unei clase largi de fenomene de interes practic.

Studiul mișcărilor mecanice ale corpurilor în aproximația menționată formează obiectul de investigație al mecanicii mediilor continue. Entitatea elementară în studiul mișcărilor mediilor continue o constituie mișcarea punctelor mediului continuu. Prin punct al unui mediu continuu se înțelege o porțiune a mediului (corpului) respectiv infinitezimal de mică în comparație cu corpul în ansamblul său, dar totuși suficient de mare ca să fie „macroscopic” (adică să conțină încă un număr mare de molecule și atomi pentru a putea face abstracție de structura molecular-atomică a părții respective). Prin mișcarea unui mediu continuu se înțelege, evident, ansamblul mișcărilor tuturor punctelor mediului în cauză. De aceea, un mediu continuu este un sistem mecanic cu o mulțime infinită (continuă și nenumărabilă) de grade de libertate (spre deosebire de sistemele studiate în capitolul precedent care au o mulțime finită și numărabilă de grade de libertate). Această particularitate a mediilor continue impune ca aparatul matematic folosit în studiul mișcărilor lor mecanice să-l constituie teoria funcțiilor continue (reale sau complexe) de mai multe variabile, iar ecuațiile care descriu mișcările respectivelor medii sînt ecuații diferențiale cu derivate parțiale.



În cazul mecanicii mediilor continue rămân valabile legile stabilite în cadrul mecanicii sistemelor cu o mulțime finită și numărabilă de grade de libertate (legi prezentate în capitolul precedent). În plus, ca un fapt specific, în cadrul mecanicii mediilor continue se introduc unele axiome suplimentare (preluate și „distilate” din experiență) referitoare la natura fizică a corpurilor studiate. După natura lor fizică, manifestată prin proprietăți specifice, corpurile fizice reale se pot afla în una din următoarele stări de agregare; solidă, lichidă, gazoasă, plasmă și cristale lichide. Mecanica mediilor continue procedează la studiul proprietăților și mișcărilor macroscopice ale solidelor deformabile (elastice și plastice), ale lichidelor și gazelor (adică a fluidelor) ideale și vâskoase. Solidele rigide (nedeformabile), deoarece sînt caracterizate printr-un număr finit (și mic) de grade de libertate, nu intră în studiu în cadrul mecanicii mediilor continue, ci în cadrul mecanicii sistemelor cu un număr finit de grade de libertate. Gazele rarefiate, plasma și cristalele lichide nu formează obiectul de studiu al mecanicii mediilor continue, deoarece în studiul proprietăților macroscopice ale acestor corpuri nu se poate face abstracție de structura lor atomico-moleculară. Studiul proprietăților macroscopice ale acestor corpuri se face în cadrul capitolului de fizică statistică, unde se ține cont explicit de structura atomico-moleculară a corpurilor studiate. Referitor la solidele, lichidele și gazele al căror studiu macroscopic este abordat în mecanica mediilor continue trebuie reținut și faptul că datorită constituției lor atomico-moleculare aceste corpuri au și proprietăți nemecanice (adică „nereductibile” la proprietăți și mișcări mecanice), cum sînt cele termice, electrice, magnetice, electrice, optice, atomice. Desigur că studiul acestor proprietăți transcende domeniul de investigare al mecanicii mediilor continue și el este abordat în alte capitole ale fizicii cum sînt: termodinamica și fizica statistică, electromagnetismul, optica și fizica corpului solid.

Aria tematică a mecanicii mediilor continue este extrem de vastă. În capitolul de față nu vom urmări să facem o prezentare exhaustivă a acestei tematici. Ne vom limita să prezentăm doar un număr mic de probleme ale mecanicii mediilor continue, care în general sînt corelate cu probleme discutate în alte capitole ale prezentului volum.

## § 2.2. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

În interiorul corpurilor pe care le considerăm a fi medii continue în general masa este distribuită în mod arbitrar. Remarcabil este faptul că într-un element infinitezimal (în sens macroscopic) de volum  $dV$  se află concentrată o cantitate de masă infinitezimală  $dm$ , care este întotdeauna proporțională cu  $dV$ . Deci se poate scrie

$$dm = \rho dV. \quad (2.2.1)$$



Mărimea  $\rho$  se numește *densitate masică* sau simplu *densitate*. În general densitatea  $\rho$  este funcție continuă de punct și timp, adică  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r}$  fiind vectorul de poziție al punctului a cărui vecinătate o formează elementul de volum  $dV$  și  $t$  este momentul de timp la care ne referim. Masa  $m$  conținută într-un volum finit  $V$  al corpului este dată de relația

$$m = \int_V dm = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (2.2.2)$$

Variația în timp a masei  $m$  închise în volumul  $V$  se exprimă evident prin relația

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV. \quad (2.2.3)$$

Deoarece studiem mișcarea mediilor continue în limitele de aplicabilitate ale mecanicii clasice trebuie să avem în vedere faptul că masa este o mărime care se conservă. De aceea, variația în timp a masei dintr-un volum dat  $V$  al mediului continuu poate să apară numai ca urmare a transferului de masă prin suprafața  $S$  care înconjoară volumul  $V$ . Masa elementară  $dm$  transferată în volumul  $V$  în intervalul de timp  $dt$  prin elementul de suprafață  $dS$  poate fi scrisă sub forma (vezi și figura 2.2.1).

$$dm_{(dS)} = - \rho dS_n \cdot \mathbf{v} dt = - \rho d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (2.2.4)$$

unde  $\mathbf{v}$  reprezintă viteza cu care se deplasează punctul mediului continuu în locul unde se consideră elementul de suprafață  $dS$ ,  $dS_n$  este proiecția pe un plan perpendicular pe  $\mathbf{v}$  a elementului de suprafață  $dS$ , iar  $d\mathbf{S}$  este un vector de modul  $|d\mathbf{S}| = dS$  orientat după normala exterioară a elementului de suprafață  $dS$ . Semnul minus în (2.2.4) arată că transferul de masă spre exteriorul volumului  $V$  conduce la micșorarea masei din volumul respectiv. Împărțind în (2.2.4) prin  $dt$ , integrând după toată suprafața exterioară  $S$  ce delimitează volumul  $V$  și aplicând teorema Gauss se poate scrie următorul șir de relații

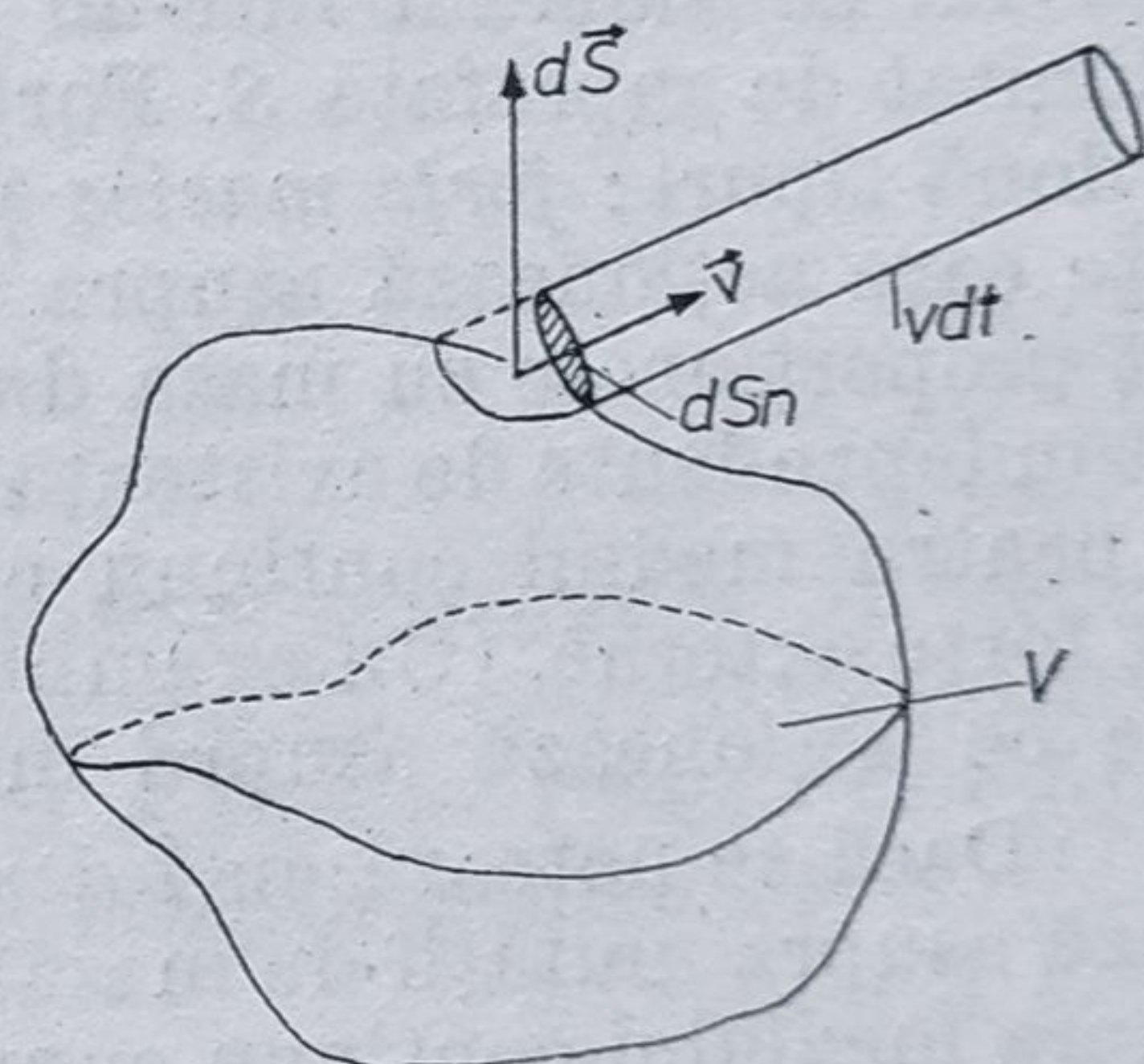


Fig. 2.2.1

$$\frac{dm}{dt} = \oint_S \frac{\partial m_{(dS)}}{\partial t} = - \oint_S \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (2.2.5)$$

Mărimea  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  se numește *densitate de curent masic*. Din cele spuse mai sus se vede ușor că mărimile  $\mathbf{j} d\mathbf{S}$  respectiv  $\oint \mathbf{j} d\mathbf{S}$  reprezintă fluxul de masă



(cantitatea de masă transferată în unitatea de timp) prin elementul de suprafață  $dS$  respectiv prin toată suprafața exterioară  $S$  ce înconjoară volumul  $\mathcal{V}$ .

Avînd în vedere că atît (2.2.3) cît și (2.2.5) exprimă aceeași variație în timp a masei  $m$  închise în volumul  $\mathcal{V}$  din respectivele relații se poate scrie

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{j} d\mathcal{V} = 0 \quad (2.2.6)$$

Deoarece această relație este adevărată pentru orice volum  $\mathcal{V}$ , arbitrar ales, înseamnă că ea implică relația

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.2.7)$$

numită *ecuație de continuitate*.

## § 2.3. FORȚELE CARE ACȚIONEAZĂ ÎN MEDIILE CONTINUE

Să considerăm într-un mediu continuu o parte a sa de volum  $\mathcal{V}$  delimitat de suprafața  $S$ . Forțele care acționează asupra acestei părți sînt de două tipuri: *forțe masice* și *forțe de tensiune*. Forțele masice sînt acele forțe care acționează asupra fiecărui element de volum  $d\mathcal{V}$  al mediului, sînt proporționale cu masa  $dm = \rho d\mathcal{V}$  din elementul de volum respectiv, sînt independente de existența alăturată a altor părți ale mediului continuu și, pentru mediul continuu considerat în întregime (în ansamblul său), sînt forțe externe. (Un exemplu de forță masică îl constituie forța de greutate ce acționează asupra mediilor continue la suprafața Pămîntului.)

Dacă se notează cu  $\mathbf{f}$  *densitatea de forță masică* (adică forța ce acționează asupra unității de masă) forța masică rezultantă  $\mathbf{F}_m$  care acționează asupra mediului continuu cuprins în volumul  $\mathcal{V}$  este dată de relația

$$\mathbf{F}_m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \rho d\mathcal{V}. \quad (2.3.1)$$

Momentul rezultat al forțelor masice se poate scrie desigur sub forma

$$\mathbf{M}_m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \rho d\mathcal{V}. \quad (2.3.2)$$

În mediile continue mai apar și forțe de interacțiune între părțile adiacente ale mediului, care se manifestă la suprafața de separație a res-



pectivelor părți. Acestea sînt forțe interne în raport cu mediul privit în ansamblul său. Evident că acest tip de forțe se supun legii a treia a dinamicii newtoniene (adică principiului acțiunii și reacțiunii) și, de aceea, rezultanta lor ca și momentul lor resultant sînt nule. Totuși, pe suprafața  $S$  ce delimitează un volum  $\mathcal{V}$  din interiorul unui mediu continuu forțele interne amintite se manifestă și caracterizează acțiunea restului părților mediului continuu asupra părții cuprinse în volumul  $\mathcal{V}$  considerat. Forțele menționate care se manifestă între diferite părți ale mediului continuu poartă denumirea de *forțe de tensiune*. Să vedem care sînt principalele proprietăți și caracteristici ale forțelor de tensiune. În acest scop să considerăm un element infinitesimal de suprafață  $dS$  de pe suprafața ce delimitează volumul  $\mathcal{V}$  într-un mediu continuu. Asupra elementului respectiv de suprafață va acționa forța infinitesimală de tensiune  $dF^S$ . Experiența arată că în general sensul lui  $dF^S$  diferă de sensul vectorului  $dS = dS \cdot n$  ( $n$  fiind normala la suprafață) (fig. 2.3.1). Tot experiența arată că forța  $dF^S$  este proporțională cu suprafața  $dS$  și depinde în general de orientarea vectorului  $dS$ . Dacă scriem vectorul  $dS$  sub forma

$$dS = dS_x \cdot i + dS_y \cdot j + dS_z \cdot k \quad (2.3.3)$$

proprietățile menționate ale lui  $dF^S$  sînt îndeplinite dacă, de exemplu referindu-ne la componenta sa  $dF_x^S$  (a forței  $dF^S$ ) ea poate fi scrisă sub forma

$$dF_x^S = P_{xx}dS_x + P_{xy}dS_y + P_{xz}dS_z. \quad (2.3.4)$$

Introducînd notațiile  $i, k = 1, 2, 3 = x, y, z$  se vede ușor că această relație se generalizează sub forma

$$dF_i^S = \sum_{k=1}^3 P_{ik} dS_k. \quad (2.3.5)$$

Setul de mărimi  $P_{ik}$  poartă denumirea de *tensor al tensiunilor*. În general componentele  $P_{ik}$  ale tensorului tensiunilor depinde de vectorul de poziție  $r$  și de timpul  $t$ , adică  $P_{ik} = P_{ik}(r, t)$ . Pentru a ilustra relația (2.3.5) să alegem în mediul continuu un element de suprafață pentru care

$$dS = i dS_x = i dS \quad (2.3.6)$$

adică un element de suprafață normal pe axa  $Ox$  (fig. 2.3.2). Pentru o astfel de alegere a lui  $dS$  forța de tensiune  $dF^S$  are componentele carteziene

$$dF_x^S = P_{xx}dS_x, \quad dF_y^S = P_{yx}dS_x, \quad dF_z^S = P_{zx}dS_x. \quad (2.3.7)$$

Se poate demonstra (vezi paragraful următor) că tensorul tensiunilor este simetric adică satisface relațiile

$$P_{ik} = P_{ki} \quad (2.3.8)$$



pentru orice punct al mediului continuu. Aceasta înseamnă că din cele 9 componente ale tensorului tensiunilor doar 6 sînt independente între ele. De obicei se aleg drept componente independente ale tensorului tensiunilor următoarele 6 mărimi:  $P_{xx}$ ,  $P_{xy}$ ,  $P_{xz}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{yz}$  și  $P_{zz}$ . Evident că pentru un mediu continuu componentele tensorului tensiunilor într-un punct dat

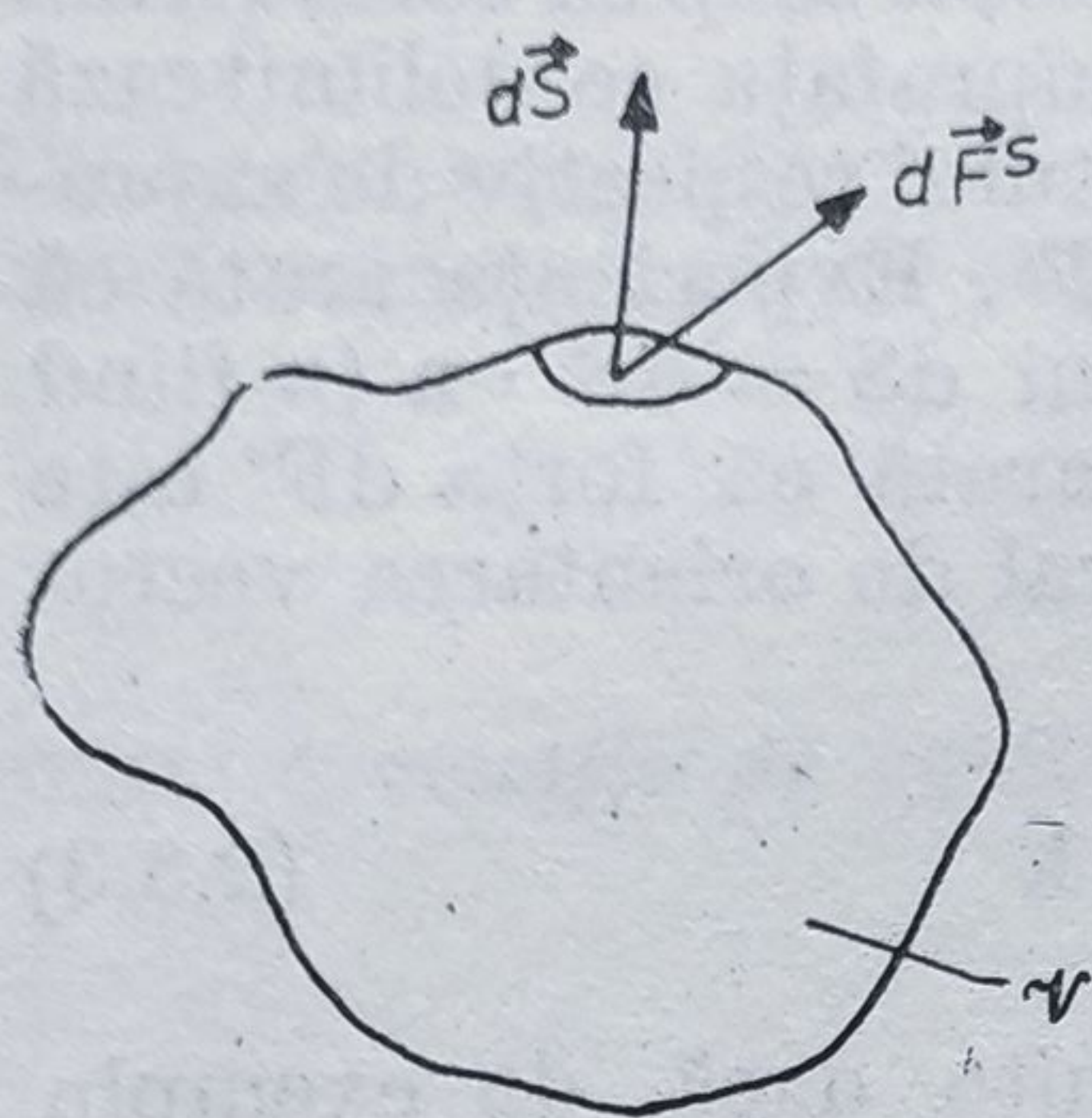


Fig. 2.3.1

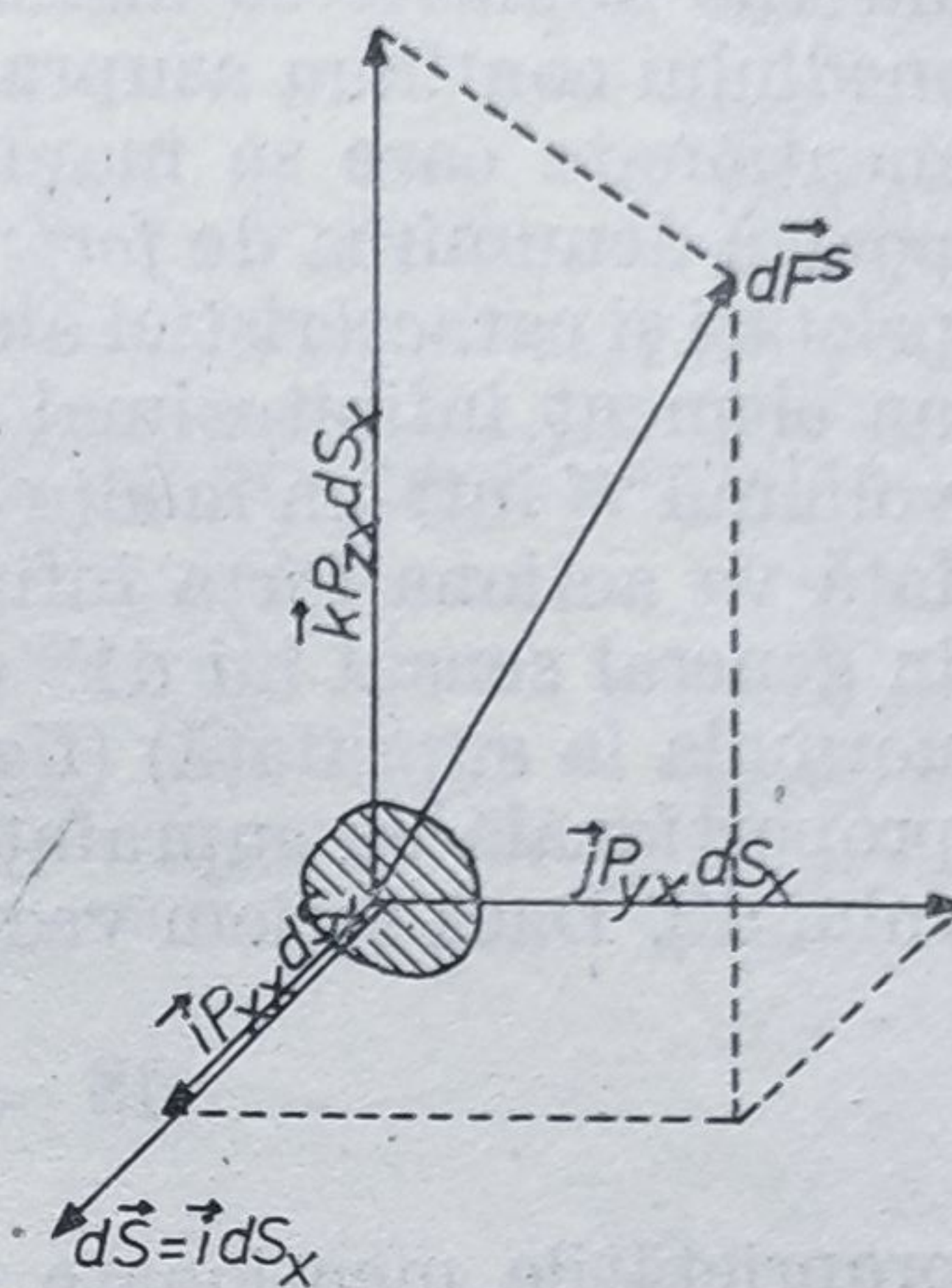


Fig. 2.3.2

al mediului depind de orientarea în raport cu mediul respectiv a axelor de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ . De notat că pentru orice punct al unui mediu continuu este posibil să se aleagă orientarea axelor de coordonate în așa fel încît tensorul tensiunilor să fie adus la forma diagonală

$$P_{ik} = P_i \delta_{ik} \quad (2.3.9)$$

cu  $\delta_{ik} = 1$  pentru  $i = k$  și  $\delta_{ik} = 0$  pentru  $i \neq k$  ( $\delta_{ik}$  reprezintă simbolul Kronecker). Mărimile  $P_i = P_i(\mathbf{r})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) se numesc *tensiuni principale* în punctul al cărui vector de poziție este  $\mathbf{r}$ . Se poate demonstra [28] de asemenea că dacă într-un punct de vector de poziție  $\mathbf{r}$ ,  $P_{ik} = P_{ik}(\mathbf{r})$  sînt componentele tensorului tensiunilor pentru o orientare arbitrară a axelor de coordonate și  $P_i(\mathbf{r})$  sînt tensiunile principale în același punct, atunci are loc relația

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = P_1 + P_2 + P_3. \quad (2.3.10)$$

Componentele  $P_{ik}$  ale tensorului tensiunilor caracterizează forțele interne de tensiune din mediul continuu. După cum am mai menționat componentele  $P_{ik}$  depind de punctul la care se referă (de vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  al punctului respectiv) și de timpul  $t$  adică  $P_{ik} = P_{ik}(\mathbf{r}, t)$ . Pe de altă parte, deoarece forțele de tensiune interne reprezintă forțe de interacțiune între părți adiacente ale mediului continuu, respectivele forțe depind și de mișcarea relativă a părților mediului continuu — adică de vitezele  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  de mișcare ale diverselor părți ale mediului. Aceasta impune ca și  $P_{ik}$  să depindă de vitezele  $\mathbf{v}$  ale diverselor puncte din mediu. În final deci se



poate afirma că mărimile  $P_{ik}$  sînt funcții de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  și  $t$ , adică  $P_{ik} = P_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Forma concretă a funcțiilor  $P_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  se stabilește fie fenomenologic (pornind de la datele experimentale), fie teoretic (pornind de la anumite modele ale mediului continuu). În funcție de forma concretă a dependenței componentelor  $P_{ik}$  de variabilele  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  și  $t$  avem de-a face cu diferite ramuri ale mecanicii mediilor continue. Amintim în acest context că pentru mediile continue numite fluide ideale tensorul tensiunilor are forma

$$P_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \delta_{ik} \quad (2.3.11)$$

pentru orice punct al mediului și independent de orientarea axelor de coordonate. Mărimea  $p = p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  poartă denumirea de *presiune*.

## § 2.4. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE MEDIILOR CONTINUE

Să considerăm o porțiune de volum infinitezimal  $d\mathcal{V}$  delimitată de suprafața  $S$  în interiorul unui mediu continuu. Forțele care acționează asupra acestei porțiuni, după cum am arătat în paragraful precedent, sînt forțe masice de tipul (2.3.1) și forțe de tensiune de tipul (2.3.5). Sub acțiunea respectivelor forțe evident că porțiunea respectivă se va mișca. Desigur că mișcarea respectivă se supune legii a doua a dinamicii. Atunci, referindu-ne numai la mișcarea în lungul axei  $Ox$ , putem scrie

$$\begin{aligned} a_x dm &= a_x \rho d\mathcal{V} = f_x \rho d\mathcal{V} + \oint_{S(d\mathcal{V})} dF_x^S = \\ &= f_x \cdot \rho d\mathcal{V} + \oint_{S(d\mathcal{V})} (P_{xx} dS_x + P_{xy} dS_y + P_{xz} dS_z) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

unde  $a_x$  reprezintă componenta  $x$  a accelerației porțiunii infinitezimale considerate,  $dm = \rho d\mathcal{V}$  este masa porțiunii respective și  $f_x$  componenta  $x$  a forței masice ce acționează asupra porțiunii în discuție. Dacă în locul porțiunii infinitezimale ne referim la o porțiune finită de volum  $\mathcal{V}$  evident că în locul ecuației (2.4.1) trebuie să scriem ecuația

$$\int_{\mathcal{V}} a_x \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} f_x \rho d\mathcal{V} + \oint_{S(\mathcal{V})} (P_{xx} dS_x + P_{xy} dS_y + P_{xz} dS_z). \quad (2.4.2)$$

În această ecuație în ultimul termen integrarea desigur că trebuie luată pe suprafața  $S$  ce mărginește volumul  $\mathcal{V}$ . Trecerea de la integrarea pe  $S(d\mathcal{V})$  din (2.4.1) la integrarea pe  $S(\mathcal{V})$  în (2.4.2) se datorește faptului că datorită principiului acțiunii și reacțiunii integrarea lui  $dF_x^S$  pentru părți adiacente din interiorul lui  $\mathcal{V}$  dă o contribuție nulă. Cu ajutorul teoremei



Gauss ultimul termen din (2.4.2) se poate transforma în felul următor

$$\oint_{S(\mathcal{V})} (P_{xx} dS_x + P_{xy} dS_y + P_{xz} dS_z) = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \quad (2.4.3)$$

Introducând (2.4.3) în (2.4.2) obținem

$$\int_{\mathcal{V}} a_x \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} f_x \cdot \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \quad (2.4.4)$$

Prin raționamente analoge asupra mișcărilor în direcțiile axelor  $Ox$  și  $Oz$  se pot evident scrie relațiile

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} a_y \rho d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} f_y \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \right) d\mathcal{V} \\ \int_{\mathcal{V}} a_z \rho d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} f_z \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Deoarece relațiile (2.4.4) și (2.4.5) sînt adevărate oricare ar fi volumul  $\mathcal{V}$  rezultă că termenii de integrat din cele două părți (stîngă și dreaptă) ale ecuațiilor respective trebuie să fie egali. Aceasta înseamnă că ecuațiile integrale (2.4.4) și (2.4.5) implică ecuațiile locale

$$\rho a_x = \rho f_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \quad (2.4.6)$$

$$\rho a_y = \rho f_y + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho a_z = \rho f_z + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}.$$

Introducînd indicii  $\{i\} = \{j\} = \{k\} = \{1, 2, 3\} = \{x, y, z\}$  aceste ecuații se pot scrie comasat în forma

$$\rho a_i = \rho f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.4.7)$$

Ecuațiile (2.4.6) și (2.4.7) reprezintă ecuațiile de mișcare ale mediului continuu.



În scopul de a demonstra proprietatea (2.3.8) a tensorului tensiunilor să revenim la ecuația (2.4.1) scrisă pentru o porțiune infinitesimală a mediului cuprinsă în elementul de volum  $d\mathcal{V}$ . Folosind indicii  $i, j, k$  introduși în (2.4.7) se vede ușor că ecuația (2.4.1) se generalizează sub forma

$$a_i \rho d\mathcal{V} = f_i \rho d\mathcal{V} + \int_{S(d\mathcal{V})} \sum_{k=1}^3 P_{ik} dS_k. \quad (2.4.8)$$

Folosind aceste relații se vede imediat că se poate scrie

$$\begin{aligned} \rho(x_i a_j - x_j a_i) d\mathcal{V} &= \rho(x_i f_j - x_j f_i) d\mathcal{V} + \\ &+ \oint_{S(d\mathcal{V})} \sum_{k=1}^3 (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) dS_k. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Trecînd de la elementul infinitesimal de volum  $d\mathcal{V}$  la un volum finit  $\mathcal{V}$ , vom integra termenii care apar în (2.4.9) „plimbînd” elementul de integrare  $d\mathcal{V}$  prin toate părțile infinitesimale ale mediului cuprins în  $\mathcal{V}$ . La acest proces de integrare trebuie avut în vedere că forțele de tensiune sînt forțe de interacțiune între părți adiacente ale mediului și că ele în consecință satisfac principiul acțiunii și reacțiunii. Atunci integrarea după suprafața  $S(d\mathcal{V})$  va fi nulă cînd  $S(d\mathcal{V})$  parcurge suprafețe interioare (ce delimitează părți adiacente) și va fi nenulă doar cînd  $S(d\mathcal{V})$  parcurge suprafața exterioară  $S(\mathcal{V})$  care delimitează volumul  $\mathcal{V}$ . Din aceste motive se poate scrie că din relația (2.4.9) rezultă

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho(x_i a_j - x_j a_i) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \rho(x_i f_j - x_j f_i) d\mathcal{V} + \\ &+ \oint_{S(\mathcal{V})} \sum_{k=1}^3 (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) dS_k. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Ultimul termen din partea dreaptă a acestei relații poate fi transformat cu ajutorul teoremei Gauss în felul următor

$$\oint_{S(\mathcal{V})} \sum_{k=1}^3 (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) dS_k = \int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) d\mathcal{V}. \quad (2.4.11)$$

Introducînd (2.4.11) în (2.4.10) se obține

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho(x_i a_j - x_j a_i) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \rho(x_i f_j - x_j f_i) d\mathcal{V} + \\ &+ \int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$



Deoarece această relație integrală trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi volumul  $\mathcal{V}$  rezultă că termenii de integrat din cei doi membri ai ei trebuie să fie egali. Aceasta înseamnă că relația integrală (2.4.12) implică relația locală

$$\rho(x_i a_j - x_j a_i) = \rho(x_i f_j - x_j f_i) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i P_{jk} - x_j P_{ik}). \quad (2.4.13)$$

Avînd în vedere că

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i P_{jk}) &= \frac{\partial x_i}{\partial x_k} P_{jk} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} = \delta_{ik} P_{jk} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} = \\ &= P_{ji} + x_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

relația (2.4.13) poate fi transcrisă în forma

$$\begin{aligned} x_i \left[ \rho a_j - \rho f_j - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} \right] - x_j \left[ \rho a_i - \rho f_i - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \right] = \\ = P_{ji} - P_{ij}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Ținînd cont de relațiile (2.4.7) se vede că termenul stîng al acestei relații este nul. Atunci rezultă că și termenul drept în (2.4.15) este nul adică

$$P_{ji} = P_{ij}. \quad (2.4.16)$$

Aceste relații arată că tensorul tensiunilor este simetric.

Mișcările mediilor continue se desfășoară sub acțiunea forțelor masice exterioare descrise de componentele  $f_i = f_i(\mathbf{r}, t)$  ( $i = x, y, z$ ). De aceea în studiul respectivelor mișcări funcțiile  $f_x(\mathbf{r}, t)$ ,  $f_y(\mathbf{r}, t)$  și  $f_z(\mathbf{r}, t)$  sînt considerate ca fiind date și se pune problema de a găsi funcțiile necunoscute  $a_x(\mathbf{r}, t)$ ,  $a_y(\mathbf{r}, t)$ ,  $a_z(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{xx}(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{xy}(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{xz}(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{yy}(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{yz}(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_{zz}(\mathbf{r}, t)$ . (reamintim că tensorul tensiunilor  $P_{ik}$  fiind simetric, doar 6 dintre componentele lui sînt independente). Prin urmare, ecuațiile de mișcare (2.4.7) (împreună cu condiția de simetrie (2.4.16)) ale mediilor continue conțin 10 funcții necunoscute. De aceea, ecuațiile (2.4.7) și (2.4.15) sînt numai necesare, nu și suficiente pentru descrierea mișcărilor mediilor continue. Completarea ecuațiilor amintite cu ecuații (relații) suplimentare, pînă la obținerea unui număr de ecuații suficient pentru descrierea mișcărilor unui mediu continuu, se face pornind de la anumite ipoteze referitoare la forțele interioare de tensiune. Aceste ipoteze se referă la natura fizică a mediului continuu (medii elastice, lichide sau gazoase) și în multe cazuri ele depind de formele concrete ale mișcărilor mediului (mișcări lente sau rapide,



laminare sau turbulente). Ipotezele amintite sînt „inspirate” („distilate”) de regulă din observațiile experimentale și deci sînt ipoteze fenomenologice.

Un caz particular al mediilor continue îl constituie fluidele ideale (nevîscoase). Acestea sînt caracterizate prin proprietatea esențială că forțele interne de tensiune ce se manifestă între două porțiuni adiacente ale fluidului sînt întotdeauna normale la suprafața de separație dintre cele două porțiuni. De aici decurge că pentru fluidele ideale, indiferent de orientarea axelor de coordonate, în orice punct al fluidului tensorul tensiunilor are următoarea formă simplă

$$P_{ik} = -p\delta_{ik} \quad (2.4.17)$$

Mărimea  $p$  se numește *presiune*. Ea este evident o funcție de punct (adică de  $\mathbf{r}$ ) și de timpul  $t$ , adică  $p = p(\mathbf{r}, t)$ . Faptul că tensorul tensiunilor se scrie pentru fluide ideale sub forma (2.4.17) arată că într-un punct dat al unui astfel de fluid presiunea este aceeași independent de orientarea suprafeței pe care ea acționează.

Introducînd (2.4.17) în (2.4.7) rezultă că mișcarea fluidelor ideale este descrisă de ecuațiile

$$\rho a_i = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.4.18)$$

Aceste 3 ecuații pot fi desigur comasate în ecuația vectorială

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (2.4.19)$$

Dacă se ține cont că viteza  $\mathbf{v}$  a unui punct al fluidului este în general funcție atît de timp cît și de poziție, adică  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , se vede că pentru accelerația  $\mathbf{a}$  se poate scrie

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.4.20)$$

Cu această expresie pentru  $\mathbf{a}$  ecuația (2.4.19) se transcrie în ecuația

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.4.21)$$

cunoscută sub denumirea de *ecuația lui Euler*. Pentru descrierea mișcărilor unui fluid ideal ecuația Euler (2.4.21) trebuie suplimentată (completată) cu ecuația de continuitate (vezi și (2.2.7)).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.4.22)$$

În ecuațiile (2.4.21) și (2.4.22) densitatea de forță masică  $\mathbf{f}$  este presupusă cunoscută (de exemplu în cazul fluidelor aflate la suprafața



Pământului  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}$  fiind accelerația gravitațională). Necunoscutele în aceste ecuații vor fi componentele  $v_x, v_y, v_z$  ale vitezei, densitatea  $\rho$  și presiunea  $p$ . În caz general aceste mărimi necunoscute sînt funcții de coordonatele  $x, y, z$  și de timpul  $t$ . Cele cinci necunoscute menționate sînt implicate în patru ecuații scalare: o ecuație în (2.4.22) și trei proiecții scalare ale ecuației vectoriale (2.4.21). De aceea, pentru determinarea celor cinci funcții necunoscute mai este necesară o ecuație suplimentară. Această ecuație suplimentară se dă de regulă sub forma unei *ecuații de stare*. Mărimile care determină starea macroscopică a unui fluid ideal sînt densitatea  $\rho$ , presiunea  $p$  și temperatura termodinamică  $T$  (vezi și cap. IV). Aceste mărimi sînt legate între ele prin anumite *ecuații de stare*. De notat că ecuațiile de stare se introduc fie pe cale fenomenologică, pornind de la generalizarea (și „distilarea”) observațiilor experimentale (cum se face în termodinamică), fie pe cale teoretică, plecînd de la anumite modele și ipoteze privind structura atomico-moleculară a corpurilor în discuție (cum se face în fizica statistică). Ca exemple de ecuații de stare cităm următoarele:

— pentru *fluidele barotrope* densitatea este funcție numai de presiune, nu și de temperatură, și deci se poate scrie ecuația de stare:

$$\rho = \rho(p); \quad (2.4.23)$$

— pentru *gazele ideale* legătura între  $\rho$ ,  $p$  și  $T$  este dată de ecuația de stare

$$p = \frac{R}{M} T \rho \quad (2.4.24)$$

numită și *ecuația generală a gazelor* (unde  $M$  este masa molară a gazului considerat și  $R$  este constanta generală a gazelor);

— pentru fluide a căror stare evoluează în timp prin *procese politrope* ecuația de stare se exprimă printr-o dependență de forma

$$\rho = k p^{1/n} \quad (2.4.25)$$

între  $\rho$  și  $p$ , unde  $n$  reprezintă indicele de *politropie*.

Dacă în ecuațiile (2.4.21) și (2.4.22) mărimile  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$  și  $p$  nu depind explicit de timp ci sînt funcții explicite numai de coordonatele  $x, y$  și  $z$ , atunci mișcarea fluidului se numește *staționară*. Într-un astfel de caz în ecuațiile amintite trebuie să se ia  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  și  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Atunci, pentru mișcarea staționară a unui fluid ideal, ecuațiile (2.4.21) și (2.4.22) se reduc la ecuațiile

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.4.26)$$

O subclasă a fluidelor ideale o constituie lichidele ideale *incompresibile*. Pentru un asemenea lichid densitatea este o constantă (nu depinde nici de timp nici de coordonate), adică

$$\rho = \text{const.} \quad (2.4.27)$$



Din relațiile (2.4.21), (2.4.22) și (2.4.27) se vede că mișcările lichidelor incompresibile sînt descrise de ecuațiile

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.4.28)$$

Aceste ecuații formează un set de patru ecuații scalare care conțin 4 necunoscute  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  și  $p$ . Deci ecuațiile (2.4.28) descriu complet mișcarea lichidelor incompresibile.

Ecuațiile care descriu mișcarea fluidelor ideale reprezintă în general un sistem de ecuații diferențiale neliniare de ordinul întâi (sistemul fiind format din ecuațiile (2.4.21) și (2.4.22), la care trebuie adăugată o ecuație de stare). Soluțiile respectivelor ecuații vor conține funcții și constante arbitrare care trebuie determinate din *condițiile la frontieră* și din *condițiile inițiale*. Condițiile la frontieră care se referă la restricții impuse presiunii se numesc *condiții dinamice*. (Drept exemplu de astfel de condiție poate fi citată cerința ca, într-un lichid aflat în contact cu atmosfera, presiunea la suprafață prin care are loc respectivul contact să fie egală cu presiunea atmosferică). Condițiile de frontieră ce se leagă de restricții impuse vitezei  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  se numesc *condiții cinematice*. (Drept exemplu de astfel de condiție se poate cita cerința ca pentru un fluid aflat în contact cu un perete absolut rigid și imobil componenta vitezei normală pe respectivul perete să fie nulă pe suprafața peretelui). Condițiile inițiale pentru soluțiile ecuațiilor amintite se dau prin precizarea funcțiilor  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)$  și  $p_0 = p(\mathbf{r}, 0)$ .

## § 2.5. PROPAGAREA MIȘCĂRILOR MECANICE ÎN FLUIDE IDEALE; UNDE ACUSTICE

În cazul mișcării fluidelor ideale se disting următoarele două situații: în decursul mișcărilor diversele părți ale fluidului se deplasează în spațiu fără să mai revină în pozițiile inițiale (sau în vecinătatea acestora) și în decursul mișcărilor diversele părți ale fluidului nu se depărtează niciodată prea mult de pozițiile lor inițiale și revin de repetate ori în respectivele poziții (sau în vecinătatea lor). Prima situație este specifică *fenomenelor de curgere*, iar a doua situație este specifică *fenomenelor ondulatorii mecanice*. Prima categorie de fenomene formează obiectul de studiu al dinamicii fluidelor (hidrodinamica și gazodinamica) și nu vom reține atenția asupra lor în volumul de față. Fenomenele ondulatorii mecanice sînt legate de propagarea mișcărilor mecanice prin medii continue sub formă de unde mecanice. În cazul fluidelor, dacă propagarea mișcării nu provoacă variații (în timp) prea mari ale unor mărimi ca presiunea și densitatea, undele respective se numesc *unde acustice*. Studiul undelor mecanice (și, în particular, al celor acustice) prezintă un dublu interes pentru fizică. Aceasta deoarece



studiul lor, pe de o parte, reliefează anumite proprietăți mecanice ale mediilor continue (în particular ale fluidelor) și, pe de altă parte, permite evidențierea unor caracteristici generale proprii fenomenelor ondulatorii (și undelor) din alte capitole ale fizicii (electromagnetism, optică, mecanică cuantică). De aceea, în acest paragraf vom aborda câteva probleme legate de undele acustice.

Să vedem cum pot fi descrise undele acustice într-un fluid ideal (lichid sau gaz). Vom considera fluidul în absența forțelor masice (adică  $\mathbf{f} = 0$ ) aflându-se într-o stare de echilibru caracterizată printr-o presiune  $p_0$  și densitate  $\rho_0$  constante. Dacă o cauză oarecare produce o perturbare a acestei stări a fluidului, în fluid vor apărea modificările  $p'$  și  $\rho'$  ale presiunii și densității (abateri de la valorile  $p_0$  și  $\rho_0$ ). (O astfel de cauză o poate constitui de exemplu mișcarea mecanică a unui corp solid cu care fluidul se află în contact.) În starea perturbată presiunea și densitatea mediului se vor scrie deci sub forma

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.5.1)$$

unde mărimile  $p'$  și  $\rho'$  vor depinde în general de coordonate și de timp, adică  $p' = p'(\mathbf{r}, t)$  și  $\rho' = \rho'(\mathbf{r}, t)$ . În continuare vom căuta să găsim ecuațiile diferențiale pe care le satisfac funcțiile  $p'(\mathbf{r}, t)$  și  $\rho'(\mathbf{r}, t)$  în aproximația perturbațiilor mici. Dacă perturbațiile la care este supus fluidul sînt presupuse mici, evident că vor fi îndeplinite condițiile

$$|p'| \ll p_0, \quad |\rho'| \ll \rho_0. \quad (2.5.2)$$

În plus, deoarece mișcarea fluidului apare doar ca urmare a perturbațiilor, viteza  $\mathbf{v}$  va fi și ea o mărime mică. De aceea, în limita perturbațiilor mici între cei doi termeni din stînga ecuației Euler (2.4.21) are loc relația

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|. \quad (2.5.3)$$

Introducînd (2.5.1) în ecuațiile (2.4.21) și (2.4.22), avînd în vedere că  $\mathbf{f} = 0$  și ținînd cont de condițiile (2.5.2) și (2.5.3) (precum și de faptul că  $p_0$  și  $\rho_0$  sînt constante) se obțin ecuațiile

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad (2.5.4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.5.5)$$

Ecuațiile de stare care caracterizează starea fluidului (vezi paragraful precedent) arată că în general între presiunea  $p$  a fluidului și densitatea sa  $\rho$  există o anumită legătură funcțională, adică

$$p = p(\rho). \quad (2.5.6)$$



Introducând aici (2.5.1), dezvoltând în serie și ținând cont de (2.5.2) se poate scrie următorul șir de relații

$$p_0 + p' = p(\rho_0 + \rho') \cong p(\rho_0) + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho' = p_0 + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho' \quad (2.5.7)$$

adică

$$p' = c^2 \rho' \quad (2.5.8),$$

unde

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (2.5.9)$$

Derivând relația (2.5.5) în raport cu  $t$  și ținând cont de (2.5.4) și (2.5.8), se poate scrie

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{v} = - \nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = \nabla (\nabla p') = \Delta p' = c^2 \Delta \rho'$$

adică

$$\Delta \rho' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.10)$$

sau, explicitând operatorul Laplace  $\Delta$ ,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5.10a)$$

În mod analog se poate foarte ușor vedea că din relațiile (2.5.4), (2.5.5) și (2.5.8) se obțin ecuațiile

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.11)$$

$$\Delta \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5.12)$$

De notat că ultima din aceste ecuații este o ecuație vectorială și deci ea este echivalentă cu trei ecuații scalare (scrise pentru componentele  $v_x$ ,  $v_y$  și  $v_z$  ale vectorului viteză  $\mathbf{v}$ ).

Din cele spuse mai sus rezultă că dacă într-un fluid ideal aflat în echilibru apare o perturbație, respectiva perturbație dă naștere unor mișcări ale fluidului descrise de ecuații de forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0. \quad (2.5.13)$$



Acest tip de ecuație poartă denumirea de *ecuație de undă*. Mărimea  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ , după cum s-a văzut mai sus, poate avea semnificație de: modificare a densității  $\rho'$  (în (2.5.10)), modificare a presiunii  $p'$  (în (2.5.11)) sau de componentă  $v_x, v_y, v_z$  a vitezei  $\mathbf{v}$  (în (2.5.12)).

Ecuația (2.5.13) este o ecuație spațială tridimensională deoarece  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$  depinde în general de coordonatele  $x, y$  și  $z$ . Dacă ne referim la un caz unidimensional când  $\psi$  depinde numai de una din coordonatele spațiale, să zicem de  $x$ , atunci ecuația (2.5.13) se particularizează în forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5.14)$$

cu  $\psi = \psi(x, t)$ . Să vedem care este forma generală a soluțiilor acestei ecuații. Observăm mai întâi că ea poate fi transcrisă în forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) = 0. \quad (2.5.15)$$

Trecînd de la variabilele  $t$  și  $x$  la variabilele  $\xi$  și  $\eta$  prin relațiile de transformare

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad t = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad (2.5.16)$$

$$\eta = t + \frac{x}{c}, \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

se pot scrie relațiile evidente

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Atunci se vede imediat că relația (2.5.15) se transcrie în forma

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (2.5.18)$$

Prin integrarea succesivă a acestei ecuații se obține

$$\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \Phi_1(\eta), \quad \psi(\xi, \eta) = \int \Phi_1(\eta) d\eta + \psi_2(\xi)$$



adică

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta) \quad (2.5.19)$$

unde  $\psi_1(\xi)$  și  $\psi_2(\eta)$  sînt două funcții arbitrare de variabilele  $\xi$  respectiv  $\eta$ . Revenind la variabilele  $t$  și  $x$  rezultă că soluția generală a ecuației (2.5.14) este de forma

$$\psi(t, x) = \psi_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (2.5.20)$$

Să vedem ce semnificație au termenii  $\psi_1$  și  $\psi_2$  din expresia mărimii  $\psi = \psi(t, x)$ . Deoarece  $\psi_1$  depinde de  $t$  și  $x$  numai prin intermediul variabilei  $\xi = t - \frac{x}{c}$ , acest termen arată că dacă în punctul  $x_0 = 0$  la momentul  $t_0 = 0$ ,  $\psi$  are o anumită valoare — să zicem  $\psi_1^0$  — atunci în punctul  $x \neq 0$  va avea aceeași valoare  $\psi_1^0$  la momentul ulterior  $t = \frac{x}{c}$ . Cum  $\psi$

descrie o perturbare în fluid ( $\psi$  poate fi după cum am văzut una din mărimile  $p'$ ,  $\rho'$  sau  $v$ ) înseamnă că perturbația respectivă se propagă din punctul  $x_0 = 0$  (unde se afla la  $t_0 = 0$ ) într-un punct  $x \neq 0$  după lege  $x = ct$ . Analog, termenul  $\psi_2$ , care depinde de  $t$  și  $x$  prin intermediul variabilei  $\eta = t + x/c$ , ar reprezenta faptul că perturbația ce există la  $t_0 = 0$  în  $x_0 = 0$  ajunge în punctul  $x_0 \neq 0$  la momentul  $t = -\frac{x}{c}$  — anterior lui  $t_0$ .

În conformitate cu principiul cauzalității o perturbație fizică reală apărută la  $t_0 = 0$  în  $x_0 = 0$  poate ajunge în alte puncte ( $x \neq 0$ ) numai la momente ulterioare lui  $t_0$ . De aceea din soluția generală (2.5.20) trebuie reținut ca avînd semnificație fizică doar termenul  $\psi_1 = \psi_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . Astfel vom spune că soluția generală cu semnificație fizică a ecuației (2.5.14) este de forma

$$\psi = \psi(\xi) = \psi(t - x/c). \quad (2.5.21)$$

Această soluție descrie, după cum am văzut, propagarea în fluid a unei perturbații care înaintează în direcția axei  $x$  după legea  $x = ct$ . O astfel de propagare a perturbațiilor în fluid se numește *undă acustică plană* — deoarece la momentul  $t$  perturbația  $\psi$  are aceeași valoare în toate punctele planului  $x = ct$ . Locul geometric al punctelor unde la momentul  $t \neq 0$  perturbația  $\psi$  are aceeași valoare cu cea pe care a avut-o la  $t_0 = 0$  în  $x_0 = 0$ , poartă denumirea de *front de undă*. Desigur că în cazul discutat frontul de undă este planul  $x = ct$ , care se deplasează cu viteza  $c$  în lungul axei  $Ox$  și paralel cu planul  $yOz$ . Viteza de propagare în fluid a undelor acustice este egală cu mărimea  $c$  definită de (2.5.9). Ca un caz particular al valorii lui  $c$  se poate cita valoarea sa pentru gazele ideale. Din relațiile (2.4.24)



și (2.5.8) se vede că în cazul gazelor ideale viteza  $c$  de propagare a undelor acustice are expresia

$$c = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \quad (2.5.22)$$

Această relație arată că în gazele ideale viteza de propagare a undelor acustice este de același ordin de mărime cu viteza medie pătratică a moleculelor (vezi cap. V).

Să vedem acum care este soluția generală a ecuației (2.5.13) într-un caz mai general, când  $\psi$  depinde de coordonatele spațiale  $x, y, z$ . Dacă în locul coordonatelor carteziene  $x, y$  și  $z$  folosim coordonatele sferice  $r, \theta$  și  $\varphi$  (vezi tabelul 1.1.1) operatorul Laplace  $\Delta$  din (2.5.13) se transcrie sub forma

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_{(xyz)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \\ \rightarrow \Delta_{(r, \theta, \varphi)} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Dacă mediul este omogen și izotrop și, în plus, presupunem că perturbația apare (este provocată) în originea axelor de coordonate sînt îndeplinite condițiile

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.5.24)$$

Atunci din (2.5.13), (2.5.23) și (2.5.24) rezultă că propagarea undelor într-un mediu omogen și izotrop este descrisă de ecuația

$$\frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.5.25)$$

Dacă observăm că

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi). \quad (2.5.26)$$

Rezultă că ecuația (2.5.25) se transcrie sub forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \psi) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) = 0 \quad (2.5.27)$$



Dar această ecuație este analogă cu (2.5.14) cu  $r\psi(r, t)$  în loc de  $\psi(x, t)$ . Atunci ținând cont că soluția generală a ecuației (2.5.14) este de forma (2.5.21), se observă ușor că soluția generală a ecuației (2.5.27) este de forma

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.5.28)$$

unde  $\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)$  este o funcție arbitrară de variabila  $t - r/c$ . Soluția (2.5.28) descrie propagarea undelor spațiale într-un mediu omogen și izotrop. Astfel de unde se numesc *unde sferice*. Frontul de undă definit ca locul geometric al punctelor pentru care variabila  $t - r/c$  are valoarea nulă (și deci perturbația are aceeași valoare care o avea la  $t_0 = 0$  în  $r_0 = 0$ ) este în acest caz o sferă cu raza  $r = ct$ .

Referitor la proprietățile ecuației (2.5.13) care descrie, în formă diferențială cazul cel mai general al propagării undelor acustice, trebuie să remarcăm că din punct de vedere matematic aceasta este o ecuație liniară. Aceasta înseamnă că dacă  $\psi_I$  și  $\psi_{II}$  sînt două soluții particulare ale ecuației (2.5.13) atunci și funcția  $\alpha\psi_I + \beta\psi_{II}$  (cu  $\alpha$  și  $\beta$  două constante arbitrare) este o soluție a ecuației respective. Fizic aceasta înseamnă că în fluidul respectiv fiecare din undele  $\psi_I$  și  $\psi_{II}$  se propagă independent una de alta. Mărimile care caracterizează propagarea undelor în fluid (cum ar fi  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $v$ ) într-un punct  $r$  al mediului vor fi egale cu sumele mărimilor respective corespunzătoare fiecăreia dintre undele  $\psi_I$  și  $\psi_{II}$  (desigur, în cazul mărimilor  $p'$  și  $\rho'$  este vorba de sume algebrice scalare, iar în cazul mărimii  $v$  este vorba de sumă vectorială). Proprietatea menționată a undelor este cunoscută sub denumirea de *principiul superpoziției undelor*.

## § 2.6. CARACTERISTICI ALE UNDELOR ACUSTICE

Între undele acustice un interes deosebit îl prezintă *undele monocromatice*. Astfel de unde apar într-un fluid atunci cînd sursa de unde perturbă mediul după o lege armonică de forma

$$\psi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2.6.1)$$

Atunci, ținînd cont de cele discutate în paragraful precedent se vede că propagarea în fluid a unei unde plane este descrisă de funcția

$$\psi(x, t) = A \cos \omega(t - x/c) \quad (2.6.2)$$

unde  $\psi(x, t)$  este *elongația* undei în punctul  $x$  la momentul  $t$ ;  $A$  este *amplitudinea* undei, iar  $\omega$  este *pulsția* undei. *Perioada*  $\mathcal{T}$  și *frecvența*  $\nu$  ale undei



sînt legate de  $\omega$  prin relațiile  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/\mathcal{T}$ . Mărimea

$$\lambda = c\mathcal{T} = c/\nu = 2\pi c/\omega \quad (2.6.3)$$

se numește *lungime de undă* și, după cum se vede din (2.6.2) reprezintă perioada funcției  $\psi(x, t)$  în raport cu variabila  $x$ .

De menționat că în raport cu valorile frecvenței  $\nu$  undele acustice se clasifică în: infrasunete ( $\nu < 20\text{Hz}$ ), sunete ( $\nu = 20\text{Hz} \div 20\text{kHz}$ ) și ultrasunete ( $\nu > 20\text{kHz}$ ). Această clasificare este legată de faptul că senzația auditivă asupra urechii umane o produc numai sunetele.

Dacă se notează cu  $\mathbf{n}$  versorul direcției de propagare a undei (în cazul particular discutat  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{i}$ ) se poate defini vectorul

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \quad (2.6.4)$$

numit *vector de undă*. Atunci, ținînd cont că  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  și că  $(\omega/c)x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  se vede că funcția (2.6.2) se transcrie în forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (2.6.5)$$

Apelînd la funcții complexe această funcție poate fi descrisă și sub forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}. \quad (2.6.6)$$

Funcțiile (2.6.5) și (2.6.6) descriu propagarea undelor monocromatice plane. Dacă ne referim la unde monocromatice sferice ce se propagă într-un fluid omogen și izotrop, din (2.5.28), prin analogie cu (2.6.5) și (2.6.6), rezultă că respectivele unde vor fi descrise de funcțiile

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (2.6.7)$$

respectiv

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \frac{A}{r} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \quad (2.6.8)$$

Undele monocromatice prezintă importanță din două puncte de vedere: pe de o parte, din punct de vedere practic, în foarte multe situații sursele

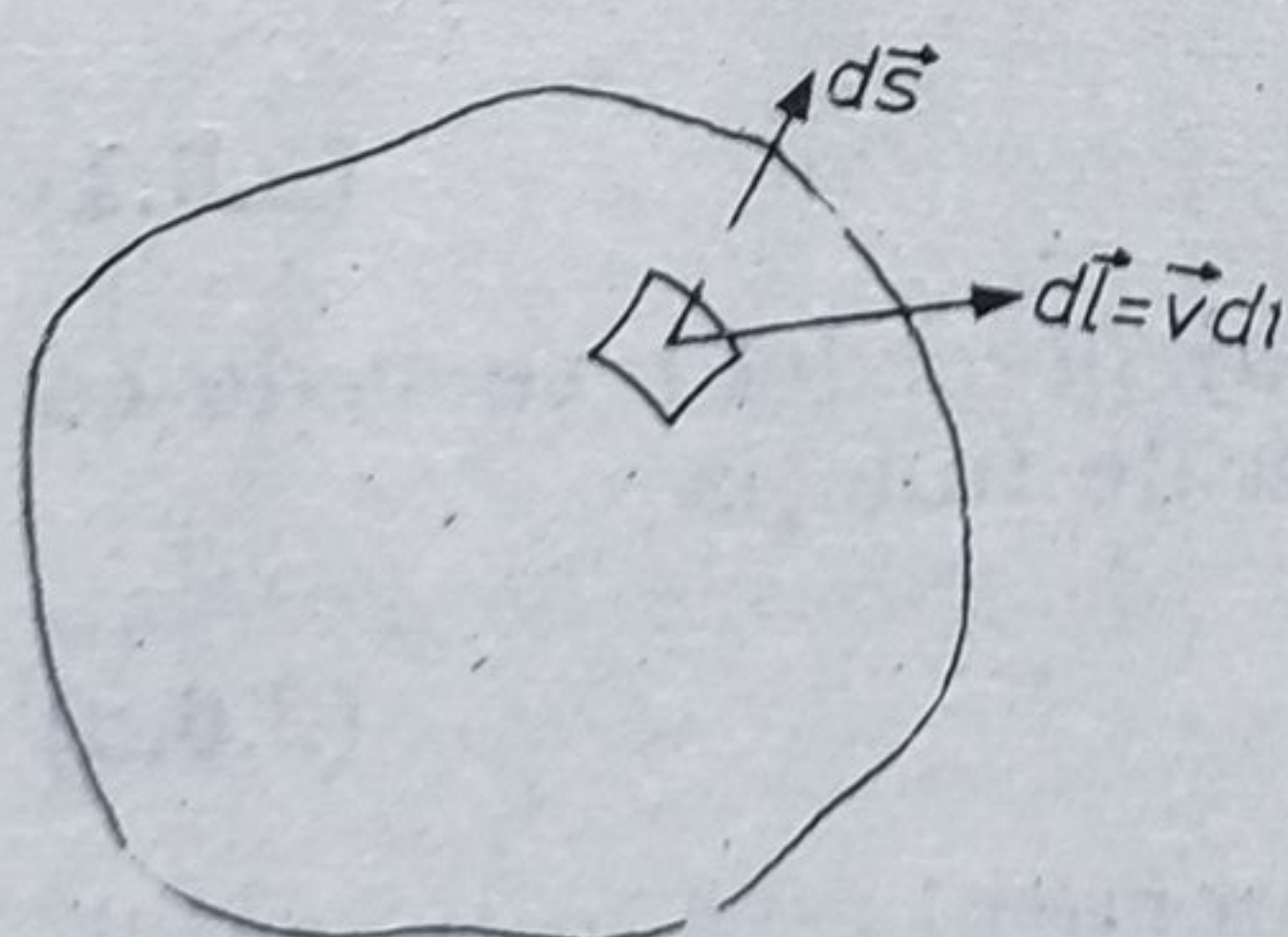


Fig. 2.6.1.

de unde acustice generează undele respective (produc perturbații în fluid) după o lege de tipul (2.6.1); pe de altă parte, din punct de vedere matematic, o funcție arbitrară  $\psi(\xi)$  poate fi scrisă întotdeauna ca o superpoziție de componente armonice de forma transformatei Fourier

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega \quad (2.6.9)$$



iar termenul  $e^{i\omega\xi}$  cu  $\xi = t - x/c$  reprezintă o componentă monocromatică de tipul (2.6.2).

După cum am mai menționat, dacă într-un punct al unui fluid apare o perturbație, ea dă naștere la o mișcare a fluidului în punctul respectiv. Dar această mișcare nu rămâne localizată în respectivul punct, ci ea se propagă prin fluid, din aproape în aproape, sub formă de unde acustice. Cum orice mișcare mecanică are asociată o energie mecanică proprie, rezultă că propagării undelor acustice printr-un fluid îi este asociată o anumită energie mecanică proprie. Mai mult, întrucât în cazul undelor acustice avem de a face cu transferul mișcării prin fluid din aproape în aproape înseamnă că respectivele unde sînt însoțite de un transfer de energie prin mediu. De reținut că în decursul procesului de transfer al mișcării și transport al energiei diferitele porțiuni ale fluidului nu sînt „transmutate” dintr-un loc în altul — ele execută doar mici oscilații în jurul unor poziții de echilibru, iar transferul de mișcare și energie se face prin interacțiunea din aproape în aproape între respectivele porțiuni ale fluidului.

Din cele de mai sus rezultă că un fluid în care se propagă unde acustice are o anumită energie legată de undele respective, energie care se transferă dintr-o parte în alta a fluidului odată cu propagarea undelor. Energia respectivă din fluide se numește *energia undelor acustice* (sau energie sonoră, cînd undele acustice sînt sunete). Să vedem în continuare cu ce mărimile fizice poate fi caracterizată energia undelor.

Să considerăm o porțiune infinitesimală de fluid cuprinsă în elementul de volum  $dV$ . Energia  $dW$ , legată de propagarea undelor, pentru porțiunea considerată de fluid este

$$dW = wdV = dT + dV. \quad (2.6.10)$$

Aici  $dT$  și  $dV$  reprezintă energiile cinetică și respectiv potențială ale porțiunii respective de fluid legate de propagarea undelor, iar  $w$  poartă denumirea de *densitate de energie a undelor*. Considerînd că porțiunea de fluid luată în discuție, de masă  $dm = \rho dV$ , participă la mișcarea ondulatorie (mișcarea de propagare a undelor) și are viteza  $v$ , evident că se poate scrie

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot dV. \quad (2.6.11)$$

Energia potențială  $dV$  apare ca urmare a comprimării (sau dilatării) elementului de volum  $dV$  în decursul mișcării ondulatorii cauzate de trecerea undelor prin elementul de volum respectiv. Comprimarea (sau dilatarea) undelor prin elementul de volum respectiv. Comprimarea (sau dilatarea) menționată vor determina o modificare  $\rho'$  a densității fluidului și o modificare  $(dV)'$  a elementului de volum, în raport cu valorile  $\rho_0$  și  $dV$  pentru starea cînd prin fluid nu se propagă unde. Datorită conservării masei se poate scrie

$$\rho_0 dV = (\rho_0 - \rho')[dV + (dV)']. \quad (2.6.12)$$

Deoarece mărimile  $\rho'$  și  $(dV)'$  sînt mici în comparație cu mărimile  $\rho_0$  și  $dV$  în termenul drept al relației (2.6.12) se poate neglija termenul  $\rho'(dV)'$  în



comparație cu restul termenilor. Atunci din relația respectivă se obține

$$(d\mathcal{V})' = \frac{\rho'}{\rho_0} d\mathcal{V}. \quad (2.6.13)$$

Deoarece modificarea  $(d\mathcal{V})'$  a volumului apare ca urmare a acțiunii unei presiuni suplimentare  $p'$  (cauzată de propagarea undelor) energia potențială elementară  $dV$  din (2.6.10) poate fi scrisă ca fiind egală cu lucrul mediu al acestei presiuni pentru a produce modificarea  $(d\mathcal{V})'$  a elementului de volum. În procesul respectiv de apariție a modificării  $(d\mathcal{V})'$  presiunea suplimentară variază de la valoarea 0 pînă la valoarea  $p'$  și deci avem  $p'_{\text{mediu}} = \frac{0 + p'}{2} = \frac{1}{2} p'$ . Atunci avînd în vedere și relațiile (2.6.13) și (2.5.8), se poate scrie că  $dV$  este dat de una din expresiile

$$dV = p'_{\text{mediu}}(d\mathcal{V})' = \frac{1}{2} p' \cdot \frac{\rho'}{\rho_0} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \frac{p'}{c^2 \rho_0} d\mathcal{V}. \quad (2.6.14)$$

Introducînd (2.6.11) și (2.6.14) în (2.6.10) se vede că densitatea de energie a undelor  $w$  este dată de relația

$$w = \frac{1}{2} \left( \rho_0 v^2 + \frac{p'^2}{c^2 \rho_0} \right). \quad (2.6.15)$$

Desigur că în general  $w$  este funcție de vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  și de timpul  $t$ , adică  $w = w(\mathbf{r}, t)$ . Din (2.6.10) și (2.6.15) se vede că energia  $W$  a undelor dintr-un volum finit  $\mathcal{V}$  al fluidului se scrie sub forma

$$W = \int_{\mathcal{V}} w d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \left( \rho_0 v^2 + \frac{p'^2}{c^2 \rho_0} \right) d\mathcal{V}. \quad (2.6.16)$$

Dacă considerăm fluidul în care se propagă undele ca fiind nedisipativ (ceea ce înseamnă că în el nu au loc procese care transformă energia mecanică în căldură) atunci variația în timp a energiei  $W$  a undelor din volumul  $\mathcal{V}$  se poate produce numai datorită transferului de energie prin suprafața  $S$  care înconjoară volumul  $\mathcal{V}$ . Un transfer pozitiv de energie spre exteriorul suprafeței  $S$  duce la micșorarea lui  $W$ . Respectivul transfer de energie îl putem scrie ca fiind lucrul pe care îl efectuează presiunea suplimentară  $p'$  a undelor asupra mediului ce înconjoară volumul  $\mathcal{V}$ . Atunci putem scrie (vezi și figura 2.6.1)

$$dW = - \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_S p' dS \cdot \mathbf{v} dt = - dt \oint_S p' \mathbf{v} dS. \quad (2.6.17)$$



Vectorul  $\mathbf{u} = p' \mathbf{v}$  care descrie transferul de energie prin intermediul undelor se numește *vector Umov*. El descrie transferul de energie în unitatea de timp prin unitatea de suprafață. Aplicând în (2.6.17) teorema Gauss se poate scrie

$$\frac{dW}{dt} = - \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = - \int_V (\nabla p' \mathbf{v}) dV. \quad (2.6.18)$$

Pe de altă parte, din (2.6.16) avem

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V w dV = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV. \quad (2.6.19)$$

Întrucât relațiile (2.6.18) și (2.6.19) trebuie să fie satisfăcute simultan pentru orice volum  $V$ , arbitrar ales, din cele două relații menționate rezultă relația

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6.20)$$

numită *ecuație de continuitate*. Dacă se ține cont de expresiile (2.6.15) pentru  $w$  și de faptul că  $\mathbf{u} = p' \mathbf{v}$ , această ecuație de continuitate se transcrie și sub forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho v^2 + \frac{p'^2}{c^2 \rho_0} \right) + \nabla \cdot (p' \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6.21)$$

Din modul cum a fost dedusă ecuația de continuitate (2.6.20) se vede că ea reprezintă de fapt o expresie a legii conservării energiei aplicată la energia „vehiculată” într-un fluid prin intermediul undelor acustice.

Dacă ne referim la propagarea unei unde monocromatice plane, atunci conform cu (2.6.5) (punând  $\psi = p'$ ) presiunea suplimentară  $p'$  se scrie

$$p' = p'_{max} \cos(\omega t - kx). \quad (2.6.22)$$

Atunci, ținând cont de (2.5.4), rezultă că pentru componenta  $v_x$  a vitezei  $\mathbf{v}$  avem expresia

$$v_x = \frac{p'_{max} k}{\rho_0 \omega} \cos(\omega t - kx). \quad (2.6.23)$$

Introducând (2.6.22) și (2.6.23) în (2.6.15) și ținând cont de (2.6.4), obținem



că densitatea de energie a unei unde monocromatice plane este

$$w = \frac{1}{2} \left( \rho_0 v_x^2 + \frac{p'^2}{c^2 \rho_0} \right) = \frac{1}{2} \left( \rho_0 \frac{p_{max}'^2 k^2}{\rho_0^2 \omega^2} + \frac{p_{max}'}{\rho_0 c^2} \right) \cos^2(\omega t - kx) =$$

$$= \frac{p_{max}'^2}{\rho_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx). \quad (2.6.24)$$

Desigur că această valoare a lui  $w$  este dependentă de timpul  $t$ , adică este o valoare instantanee. Valoarea medie în timp  $\langle w \rangle$ , pe o perioadă  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$ , a lui  $w$  este

$$\langle w \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} w(t) dt = \frac{p_{max}'}{\rho_0 c^2} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{p_{max}'}{2 \rho_0 c^2}. \quad (2.6.25)$$

În cazul undelor monocromatice plane menționate vectorul Umov  $\mathbf{u}$  are o singură componentă  $u_x$ , a cărei valoare instantanee se poate scrie (dacă ținem cont de (2.6.22), (2.6.23) și (2.6.4)) sub forma

$$u_x = u_x(t) = p'(t)v_x(t) = \frac{p_{max}'^2}{\rho_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx). \quad (2.6.26)$$

Din relațiile (2.6.26) și (2.6.24) se vede că în cazul undelor monocromatice plane vectorul Umov  $\mathbf{u}$  este legat de densitatea de energie  $w(t)$  prin relația

$$\mathbf{u} = w \cdot \mathbf{c}. \quad (2.6.27)$$

Din relațiile (2.6.27) și (2.6.25) rezultă că pentru o undă monocromatică plană valoarea medie în timp a modului vectorului Umov are expresia

$$\langle u \rangle = c \langle w \rangle = \frac{p_{max}'}{2 \rho_0 c}. \quad (2.6.28)$$

Valoarea medie  $\langle u \rangle$  a vectorului Umov se numește *intensitatea undelor* și se notează cu  $I$ . Deci în cazul undelor monocromatice plane intensitatea  $I$  are expresia

$$I = \frac{p_{max}^2}{2 \rho_0 c} \quad (2.6.29)$$

și descrie fluxul mediu de energie în unitatea de timp prin unitatea de suprafață normală pe direcția de propagare a undelor.

În cazul undelor sonore din categoria sunetelor ( $\nu \in (20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz})$ ) valoarea intensității  $I$  este implicată în receptarea respectivelor unde



de către urechea umană. Experiențele au arătat că în medie urechea umană receptează sunetele cu  $I$  cuprins între  $I_{min} = 10^{-12} \text{W/m}^2$  (așa-numitul *prag de audibilitate*) și  $I_{max} = 10^2 \text{W/m}^2$  (așa-numitul *prag al senzației de durere*).

Din cele prezentate mai sus în acest paragraf rezultă că propagarea undelor acustice în fluide este însoțită de un transport (transfer) de energie. Aceasta înseamnă că undele acustice pot fi folosite în principiu pentru „transportul” (și transferul) energiei mecanice. Pe această idee, aplicată în practică, s-a dezvoltat o ramură a tehnicii numită *sonicitate*, fondată (în 1916, în Anglia) de către inginerul de origine română Gogu Constantinescu.

*Observație.* În final vrem să remenționăm faptul că în toate considerațiile din acest paragraf (ca și din cel precedent) s-a presupus tacit că fluidul în care se propagă undele este nedisipativ (adică este un fluid în care nu are loc disiparea energiei mecanice și transformarea ei în căldură). De notat că o astfel de aproximație a comportării fluidelor este suficient de bună pentru o clasă largă de fluide reale și pentru o gamă de unde acustice cu un spectru larg de frecvențe și intensități. Dacă aproximația menționată nu mai este justificată și avem de a face cu fluide disipative (în care are loc o disipare (pierdere) a energiei mecanice prin transformare în căldură) ecuațiile de propagare și mărimile fizice ce caracterizează undele în astfel de fluide au expresii diferite de cele discutate în paragraful de față și în cel precedent.



## Elemente de teoria relativității

## § 3.1. INTRODUCERE

După cum s-a arătat în §1.1, caracterizarea stării mecanice de mișcare a unui sistem fizic se face prin precizarea poziției lui față de un sistem de referință și a modului cum se modifică în timp respectiva poziție. Însă, sistemele de referință sînt „construcții” artificiale, destinate utilizării lor în descrierea fenomenelor fizice și, de aceea, în principiu alegerea lor este arbitrară, iar numărul lor este nelimitat de mare. De notat că se consideră că două sisteme de referință sînt distincte între ele numai dacă ele se mișcă relativ unul față de altul — cazul cînd ele se află în repaus reciproc marcînd cel mult o distincție geometrică (dată de existența eventuală a unor sisteme diferite de axe de coordonate) și nicidecum o distincție fizică. Dată fiind existența unei multitudini de sisteme de referință, adesea se pune problema de a folosi în descrierea fenomenelor fizice (în particular a celor mecanice) mai multe sisteme de referință. De aici, însă, decurge în mod firesc preocuparea pentru găsirea legăturilor și corelațiilor ce există între descrierile relative ale aceluiași fenomen fizic în raport cu diferite sisteme de referință. Studiul respectivelor descrieri relative precum și a legăturilor și corelațiilor dintre ele intră în sfera de preocupări a teoriei relativității. Desigur că studiul menționat poate fi redus la problema elementară a studiului descrierii fenomenelor fizice în raport cu două sisteme de referință și al legăturilor și corelațiilor ce există între cele două descrieri. De aceea, în continuare vom vorbi numai despre problema a două sisteme de referință.

Conform celor menționate în § 1.1, sistemele de referință pot fi *inerțiale* (dacă în raport cu ele este satisfăcută legea inerției (prima lege a lui Newton)) sau *neinerțiale* (dacă în raport cu ele nu este satisfăcută legea inerției). Legat de această clasificare a sistemelor de inerție teoria relativității studiază următoarele două cazuri ale problemei elementare menționate :

— (I) cele două sisteme de referință implicate în problema elementară sînt ambele inerțiale ;



— (II) dintre cele două sisteme de referință implicate în problema elementară cel puțin unul este neinertial.

În § 1.1 am arătat că sistemele de referință se leagă (atașează) de corpuri fizice de referință (în raport cu care se studiază mișcarea). De adăugat precizarea că respectivele corpuri de referință se aleg întotdeauna ca fiind corpuri substanțiale și nu câmpuri (cum ar fi de exemplu câmpul electromagnetic; vezi pentru detalii cap. VI). Dar, în conformitate cu datele experimentale de care dispunem astăzi, în fizică se admite că viteza de mișcare a corpurilor și particulelor de substanță este întotdeauna mai mică decât o viteză limită  $c$ , care reprezintă viteza de propagare în vid a câmpului electromagnetic variabil în timp (adică a luminii). Din acest motiv rezultă atunci că și viteza de mișcare relativă (unul față de altul) a două sisteme de referință este întotdeauna mai mică decât viteza limită  $c$ . Totuși, din punct de vedere cantitativ, atât viteza relativă a două sisteme de referință cât și viteza diverselor particule în raport cu respectivele sisteme de referință pot fi mult mai mici decât  $c$  sau pot fi de același ordin de mărime cu  $c$  (deși, desigur, mai mici decât  $c$ ). Legat de acest fapt problema elementară a teoriei relativității este studiată în următoarele două *aproximații*:

— mișcarea relativă a celor două sisteme de referință precum și mișcarea particulelor în raport cu fiecare dintre ele se desfășoară cu viteze mult mai mici decât  $c$ ;

— mișcarea relativă a celor două sisteme de referință precum și mișcarea particulelor în raport cu fiecare dintre ele se desfășoară cu viteze apropiate (ca ordin de mărime) de  $c$ .

În literatura de specialitate adesea cele două aproximații amintite sînt menționate sub denumirile: prima — *teoria relativității galileene* și a doua — *teoria relativității einsteiniene*, după numele celor doi mari fizicieni care au fondat și elaborat teoriile respective.

În funcție de cazurile și aproximațiile menționate în care se face studiul problemei elementare a teoriei relativității, se pot delimita patru capitole distincte ale respectivei teorii:

Aproximația	Cazul	
	I	II
Teoria relativității galileene	Teoria relativității clasice a sistemelor de referință inerțiale	Teoria relativității clasice a sistemelor de referință neinerțiale
Teoria relativității einsteiniene	Teoria relativității restrînse	Teoria relativității generalizate

De notat că între sistemele de referință inerțiale și cele neinerțiale există o distincție calitativă marcată de satisfacerea respectiv încălcarea legii inerției (vezi pentru detalii § 1.1). Evident că această distincție calitativă între sistemele de referință implică o distincție calitativă și între cele două cazuri în care este discutată problema elementară a teoriei rela-



tivității. Trebuie adăugat că și între cele două aproximații în care este discutată problema elementară a teoriei relativității există o distincție calitativă legată de adoptarea unui caracter *absolut* respectiv *relativ* al distanțelor spațiale și intervalelor temporale. În teoria relativității galileene se admite că distanțele spațiale și intervalele temporale au un caracter absolut, adică se admit ca adevărate următoarele afirmații (vezi și § 1.1):

— dacă lungimea a două etaloane (de lungime) coincide o dată, etaloanele rămân egale în orice comparații ulterioare, independent de mișcarea lor relativă (unul față de altul);

— două ceasuri o dată reglate pe aceeași oră inițială ele vor arăta întotdeauna aceeași oră independent de starea lor de mișcare relativă.

În relativitatea einsteiniană distanțele spațiale și intervalele temporale au un caracter relativ, dependent de starea de mișcare a etalonului de lungime sau a ceasornicului în raport cu sistemul de referință considerat (pentru detalii asupra acestui fapt în cazul teoriei relativității restrânse vezi § 3.5). Din acest motiv se spune că între relativitatea einsteiniană și cea galileeană există o distincție calitativă.

### § 3.2. TRANSFORMAREA COORDONATELOR, VITEZELOR ȘI ACCELERATIILOR ÎN RELATIVITATEA CLASICĂ

Relativitatea clasică se preocupă de descrierea relativă (în raport cu diferite sisteme de referință) a mișcărilor mecanice ale particulelor și de legăturile și corelațiile care există între diferite descrieri relativă. După cum am văzut însă în Cap. I, descrierea mișcărilor mecanice se face cu ajutorul unor mărimi cinematice cum ar fi coordonatele, vitezele și accelerațiile. Evident că în raport cu două sisteme de referință diferite mărimile cinematice ale unei particule vor avea diferite valori. Atunci rezultă că o preocupare importantă a relativității clasice este problema găsirii relațiilor de legătură între valorile mărimilor cinematice ale aceleiași particule exprimate în raport cu două sisteme de referință diferite. Acestei probleme îi este dedicat paragraful de față.

Fie două sisteme de referință  $K$  și  $K'$ , dintre care  $K$  este inerțial, iar pe  $K'$  îl alegem arbitrar (putând fi atât neinerțial cât și inerțial) — deci îl presupunem a se afla într-o mișcare arbitrară față de  $K$  (fig. 3.2.1). Datorită faptului că în relativitatea clasică timpul are un caracter absolut (vezi paragraful precedent) în cele două sisteme de referință timpul se va scurge în același mod, adică

$$t = t'. \quad (3.2.1)$$

Poziția unei particule  $P$  va fi dată în raport cu  $K$  de către vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ , iar în raport cu  $K'$  de către vectorul de poziție  $\mathbf{r}'$ . Datorită caracterului absolut al distanțelor spațiale (vezi paragraful precedent) se poate



serie că între  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{r}'$  există relația de legătură

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (3.2.2)$$

unde  $\mathbf{R}$  reprezintă vectorul de poziție al originii  $O'$  a lui  $K'$  în raport cu sistemul  $K$ . Vectorii  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{R}$  pot fi exprimați în funcție de versorii  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  și  $\mathbf{k}$  ai axelor de coordonate ai lui  $K$  sub forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \quad (3.2.3)$$

Vectorul  $\mathbf{r}'$  se exprimă în funcție de versorii  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  și  $\mathbf{k}'$  ai sistemului  $K'$  sub forma

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \quad (3.2.4)$$

Introducând (3.2.4) și (3.2.2) obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + \\ &+ Z\mathbf{k} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Derivând această expresie a lui  $\mathbf{r}$  în raport cu  $t$  obținem expresia vitezei  $\mathbf{v}$  a particulei în raport cu  $K$ . Deoarece  $K'$  se mișcă față de  $K$  versorii  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  și  $\mathbf{k}'$  vor fi în general funcții de timp. De aceea din (3.2.5) prin derivare se obține

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = \dot{X}\mathbf{i} + \dot{Y}\mathbf{j} + \dot{Z}\mathbf{k} + \\ &+ \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' + x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}'. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Mărimea

$$\mathbf{V} = \dot{X}\mathbf{i} + \dot{Y}\mathbf{j} + \dot{Z}\mathbf{k} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k} \quad (3.2.7)$$

reprezintă viteza originii  $O$  a lui  $K'$  în raport cu  $K$ . Ținând cont de relația (3.2.1) se vede ușor că mărimea

$$\mathbf{v}' = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' = v'_x\mathbf{i}' + v'_y\mathbf{j}' + v'_z\mathbf{k}' \quad (3.2.8)$$

reprezintă viteza particulei  $P$  în raport cu  $K'$ . Referitor la termenii din (3.2.6) care conțin derivatele  $\dot{\mathbf{i}}'$ ,  $\dot{\mathbf{j}}'$  și  $\dot{\mathbf{k}}'$  ale versorilor  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  și  $\mathbf{k}'$  trebuie avute în vedere următoarele: din relațiile evidente

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1, \quad \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' = 1, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = 1 \quad (3.2.9)$$

rezultă relațiile

$$\dot{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{i}' = 0, \quad \dot{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{j}' = 0, \quad \dot{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{k}' = 0; \quad (3.2.10)$$

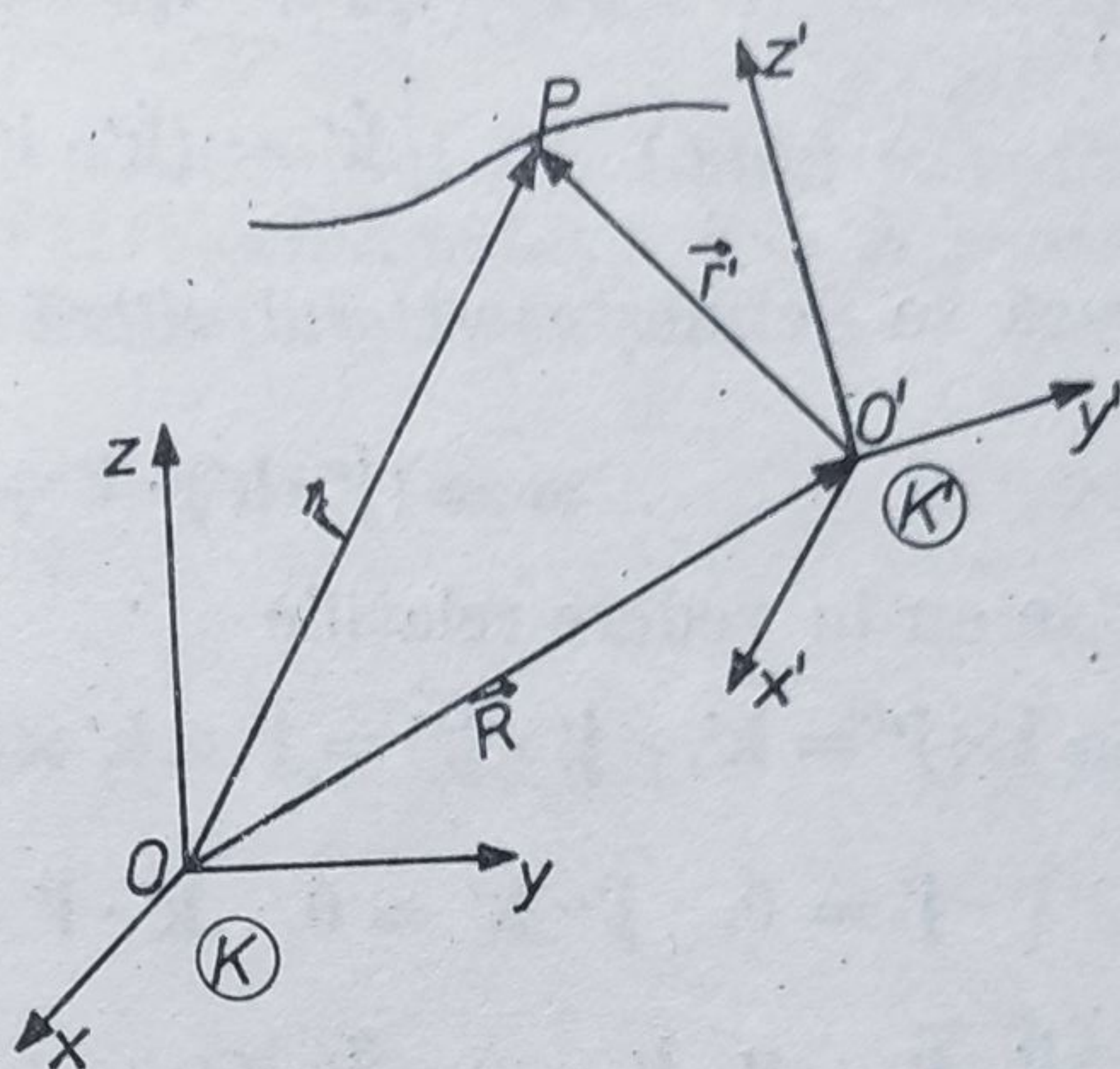


Fig. 3.2.1



deoarece orice vector  $\mathbf{b}$  poate fi scris sub forma

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}') \cdot \mathbf{i}' + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{j}') \cdot \mathbf{j}' + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}' \quad (3.2.11)$$

din (3.2.10) rezultă că se poate scrie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}' &= (\dot{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{j}') \cdot \mathbf{j}' + (\dot{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}' \\ \dot{\mathbf{j}}' &= (\dot{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{i}') \cdot \mathbf{i}' + (\dot{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}' \\ \dot{\mathbf{k}}' &= (\dot{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{i}') \cdot \mathbf{i}' + (\dot{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{j}') \cdot \mathbf{j}'. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Dacă se definește *vectorul viteză unghiulară*

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{k}') \cdot \mathbf{i}' + (\dot{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{i}') \cdot \mathbf{j}' + (\dot{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{j}') \cdot \mathbf{k}' \quad (3.2.13)$$

și se au în vedere relațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j}' &= \mathbf{k}', \quad \mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{i}', \quad \mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{j}', \quad \mathbf{i}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{j}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{k}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{0} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' &= 0, \quad \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' = 0 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\dot{\mathbf{i}}' \cdot \mathbf{j}' + \mathbf{i}' \cdot \dot{\mathbf{j}}' = 0, \quad \dot{\mathbf{j}}' \cdot \mathbf{k}' + \mathbf{j}' \cdot \dot{\mathbf{k}}' = 0, \quad \dot{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{i}' + \mathbf{k}' \cdot \dot{\mathbf{i}}' = 0$$

rezultă că în locul relațiilor (3.2.12) se pot scrie relațiile

$$\dot{\mathbf{i}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \dot{\mathbf{j}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \dot{\mathbf{k}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'. \quad (3.2.15)$$

Introducând (3.2.7), (3.2.8) și (3.2.15) în (3.2.6) și ținând cont de (3.2.4) se vede ușor că (3.2.6) poate fi transcrisă sub forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (3.2.16)$$

sau

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} + v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}' + \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Derivata lui  $\mathbf{v}$  în raport cu timpul ne dă accelerația  $\mathbf{a}$  a particulei față de  $K$ . Din (3.2.17) rezultă că pentru  $\mathbf{a}$  avem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{V}_x \mathbf{i} + \dot{V}_y \mathbf{j} + \dot{V}_z \mathbf{k} + \dot{v}'_x \mathbf{i}' + \dot{v}'_y \mathbf{j}' + \dot{v}'_z \mathbf{k}' + \\ &+ v'_x \dot{\mathbf{i}}' + v'_y \dot{\mathbf{j}}' + v'_z \dot{\mathbf{k}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}') + \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}' \mathbf{i}' + \dot{y}' \mathbf{j}' + \dot{z}' \mathbf{k}') + \boldsymbol{\omega} \times (x' \dot{\mathbf{i}}' + y' \dot{\mathbf{j}}' + z' \dot{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$



Mărimea

$$\mathbf{A} = \dot{V}_x \mathbf{i} + \dot{V}_y \mathbf{j} + \dot{V}_z \mathbf{k} = \dot{\mathbf{V}} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.2.19)$$

reprezintă accelerația cu care se mișcă originea  $O'$  a lui  $K'$  în raport cu  $K$ . Ținând cont de relațiile (3.2.1) și (3.2.8) se vede ușor că mărimea

$$\mathbf{a}' = \dot{v}'_x \mathbf{i}' + \dot{v}'_y \mathbf{j}' + \dot{v}'_z \mathbf{k}' = \dot{\mathbf{v}}' = a'_x \mathbf{i}' + a'_y \mathbf{j}' + a'_z \mathbf{k}' \quad (3.2.20)$$

reprezintă accelerația particulei în raport cu sistemul  $K'$ . Luând în considerare relațiile (3.2.19), (3.2.20) și (3.2.15) și folosind notația  $\epsilon = \dot{\omega}$  pentru accelerația unghiulară se poate transcrie relația (3.2.18) sub forma

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' + 2\omega \times \mathbf{v}' + \epsilon \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}'). \quad (3.2.21)$$

De aici rezultă

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A} - 2\omega \times \mathbf{v}' - [\epsilon \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')]. \quad (3.2.22)$$

Mărimile

$$\mathbf{a}_{TR} = -\mathbf{A}, \quad \mathbf{a}_{COR} = -2\omega \times \mathbf{v}' \quad (3.2.23)$$

poartă respectiv denumirea de *accelerații inerțiale de translație* și *Coriolis*, iar mărimea

$$\mathbf{a}_{CF} = -[\epsilon \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}')] \quad (3.2.24)$$

de *accelerație inerțială centrifugă*. Cu aceste notații relația (3.2.22) se transcrie în forma

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{a}_{TR} + \mathbf{a}_{COR} + \mathbf{a}_{CF}. \quad (3.2.25)$$

Relațiile (3.2.2)–(3.2.4), (3.2.16)–(3.2.17) și respectiv (3.2.21) dau legile de transformare a vectorului de poziție (coordonatelor), vitezei și accelerației unei particule atunci când raportarea mișcării mecanice a particulei respective o trecem de la un sistem de referință  $K'$  la alt sistem de referință  $K$ .

În cele precedente am presupus că sistemul  $K'$  se mișcă în general arbitrar în raport cu  $K$ . Un caz particular deosebit de important al acestei situații este acela în care  $K'$  execută o mișcare de translație rectilinie și uniformă în raport cu  $K$ . Atunci  $\mathbf{V} = \text{const.}$  (deci  $\mathbf{A} = 0$  și  $\omega = 0$ ). Deoarece, după cum am arătat în § 3.1, fixarea geometrică a axelor de coordonate a unui sistem de referință poate fi arbitrară (două sisteme de referință în repaus între ele dar cu axe de coordonate diferite nu sînt distincte din punct de vedere fizic) putem alege axele de coordonate ale lui  $K'$  fiind paralele cu axele lui  $K$ . Orientarea axelor o vom alege astfel încît vectorul  $\mathbf{V}$



care definește mișcarea lui  $K'$  în raport cu  $K$  să fie orientat în lungul axelor  $Ox$  și  $Ox'$ , adică  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$  (fig. 3.2.2). Dacă, în plus, alegem originea timpului ca fiind momentul când  $O'$  trece prin  $O$  relațiile (3.2.1) — (3.2.2), (3.2.16) și (3.2.21) se transcriu în următoarele forme particulare

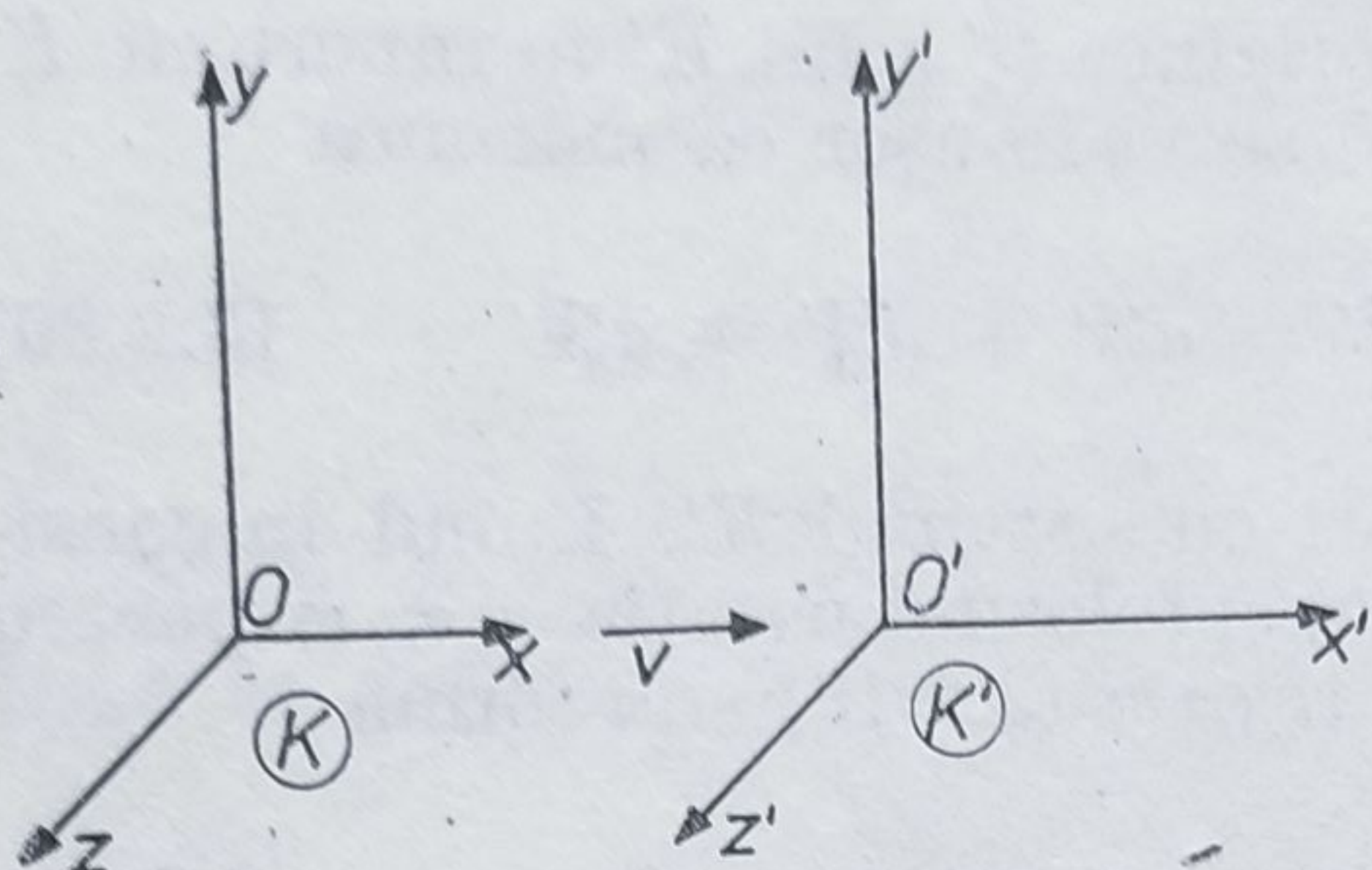


Fig. 3.2.2

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V} \cdot t \\ t &= t' \end{aligned} \quad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (3.2.26)$$

respectiv

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad \begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad (3.2.27)$$

și

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \quad a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z. \quad (3.2.28)$$

Relațiile (3.2.26) și (3.2.27) sînt cunoscute sub denumirea de *transformările Galilei* pentru coordonate-timp respectiv pentru viteză (componentele vitezei).

### § 3.3. FORMA ECUAȚIILOR MECANICII CLASICE ÎN RAPORT CU DIFERITE SISTEME DE REFERINȚĂ

În paragraful precedent au fost prezentate formulele relativității clasice de transformare, de la un sistem de referință la altul, a mărimilor cinematice (coordoante, viteze, accelerații) care caracterizează mișcările mecanice ale particulelor. Respectivul formule ne permit să abordăm problema transformării ecuațiilor care exprimă legile fundamentale ale mecanicii clasice de la un sistem de referință la alt sistem de referință. Această problemă o dată elucidată, vom cunoaște desigur și care este forma de exprimare a ecuațiilor mecanicii clasice în raport cu diferite sisteme de referință.

În considerațiile din paragraful precedent sistemul  $K$  era presupus ca fiind inerțial. Atunci, conform celor prezentate în cap. I, mișcarea unei particule de masă  $m$  în raport cu  $K$  este guvernată de legea a doua a dinamicii exprimată prin relația

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.3.1)$$

unde  $\mathbf{a}$  este accelerația particulei în raport cu  $K$ , iar  $\mathbf{F}$  este forța ce acționează asupra particulei. Se pune întrebarea: care este ecuația de mișcare a particulei respective scrisă în raport cu  $K'$ ? Legat de această întrebare trebuie notate următoarele: în mecanica clasică se admite că masa unei



particule este o mărime care are aceeași valoare independent de starea de mișcare a particulei. De aici rezultă că valoarea  $m'$  a masei particulei, estimată din  $K'$  este aceeași cu valoarea  $m$  a masei particulei estimată din  $K$ , adică

$$m' = m. \quad (3.3.2)$$

Referitor la forța  $\mathbf{F}$  se pot spune următoarele: în mecanica clasică forța reprezintă măsura interacțiunii corpurilor — interacțiune care depinde (este funcție) numai de distanțele între corpuri și de anumiți parametri ai corpurilor (masă, sarcină electrică) independenți de starea de mișcare a respectivelor corpuri. Datorită caracterului absolut al distanțelor spațiale, distanțele dintre corpuri au aceeași valoare în raport cu orice sistem de referință. Din considerentele menționate rezultă atunci că forța  $\mathbf{F}$  de interacțiune a unei particule cu alte corpuri are aceeași valoare atât în raport cu  $K$  cât și în raport cu  $K'$ , adică

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'. \quad (3.3.3)$$

Introducând (3.3.2), (3.3.3) și (3.2.25) și (3.3.1) se obține

$$m\mathbf{a}' = m'\mathbf{a} + m'\mathbf{a}_{TR} + m'\mathbf{a}_{COR} + m'\mathbf{a}_{CF} \quad (3.3.4)$$

sau

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_{TR} + \mathbf{F}_{COR} + \mathbf{F}_{CF}. \quad (3.3.5)$$

După cum am văzut,  $\mathbf{F}'$  reprezintă forța ce acționează asupra particulei datorită interacțiunii ei cu alte corpuri. Mărimile

$$\mathbf{F}_{TR} = m\mathbf{a}_{TR} = -m\mathbf{A}$$

$$\mathbf{F}_{COR} = m\mathbf{a}_{COR} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{F}_{CF} = m\mathbf{a}_{CF} = -m[\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \quad (3.3.6)$$

poartă denumirile de *forțe inerțiale de translație* ( $\mathbf{F}_{TR}$ ), *Coriolis* ( $\mathbf{F}_{COR}$ ) și *centrifugă* ( $\mathbf{F}_{CF}$ ).

Relația (3.3.5) arată că în sistemul  $K'$  accelerația  $\mathbf{a}'$  a particulei nu este cauzată numai de forța  $\mathbf{F}'$  de interacțiune a particulei cu alte corpuri, ci și de forțele inerțiale  $\mathbf{F}_{TR}$ ,  $\mathbf{F}_{COR}$  și  $\mathbf{F}_{CF}$ . Respectiv forțele inerțiale, după cum se vede din (3.3.6), apar numai datorită mișcării accelerate a lui  $K'$  în raport cu  $K$  și ele nu sînt legate în nici un mod de interacțiunea particulei în cauză cu alte corpuri. De aceea, forțele inerțiale sînt numite și pseudoforțe cînd termenul de forță este folosit pentru a desemna exclusiv interacțiunea între corpuri. Din (3.3.5) se vede că într-un sistem neinercial (care se mișcă accelerat față de un sistem inertial) ecuația fundamentală a mișcării (legea



a doua a dinamicii) are o formă de exprimare diferită de forma de exprimare a aceleiași legi în raport cu un sistem de referință inerțial. Diferența respectivă de exprimare o dau tocmai forțele inerțiale  $\mathbf{F}_{TR}$ ,  $\mathbf{F}_{COR}$  și  $\mathbf{F}_{CF}$ .

Dacă sistemul  $K'$  este și el inerțial atunci el se va mișca rectiliniu și uniform față de  $K$  (vezi § 1.1). Într-o astfel de situație  $\mathbf{A} = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  și  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$  și, după cum se vede din (3.3.6), forțele inerțiale  $\mathbf{F}_{TR}$ ,  $\mathbf{F}_{COR}$  și  $\mathbf{F}_{CF}$  sînt nule și din (3.3.5) rezultă că mișcarea particulei față de  $K'$  este descrisă de ecuația

$$m'a' = \mathbf{F}'. \quad (3.3.7)$$

Din (3.3.1) și (3.3.7) se vede că legea a doua a dinamicii se exprimă printr-o ecuație care are aceeași formă în raport cu fiecare dintre sistemele de referință inerțiale  $K$  și  $K'$ . Deci legea a doua a dinamicii este *invariantă* (nu-și schimbă forma) la trecerea de la un sistem de referință inerțial la un alt sistem de referință inerțial. Dar respectiva trecere este dată pentru coordonate și timp de transformările Galilei (3.2.26), iar coordonatele și timpul sînt implicate în legea a doua a dinamicii. De aceea se spune și că legea a doua a dinamicii este *invariantă* (își păstrează forma de exprimare) *față de transformările Galilei* (3.2.26). Este foarte ușor de văzut că și legile I-a și a III-a ale dinamicii sînt invariante față de transformările Galilei (3.2.26) (adică respectivele legi au aceeași formă de exprimare în raport cu orice sistem de referință inerțial). Dar cum am văzut în capitolul I, toate ecuațiile (legile) particulare ale mecanicii clasice nu sînt decît consecințe ale legilor I, II și III ale dinamicii. Atunci rezultă imediat că toate legile mecanicii clasice sînt invariante față de transformările Galilei (3.2.26) — adică toate legile mecanicii au aceleași forme de exprimare în orice sistem de referință inerțial. Această afirmație este cunoscută sub denumirea de *principiul relativității al lui Galilei*.

După cum am văzut în cap. II, în fluide poate avea loc o propagare a mișcării mecanice sub formă de unde acustice. Mai sus am arătat că legile mecanicii sînt invariante față de transformările Galilei (3.2.26). Rezultă atunci că și legile care descriu propagarea undelor acustice trebuie să fie invariante față de transformările respective. În particular, pentru o undă monocromatică plană faza undei respective (adică mărimea  $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ , cu  $\mathbf{k}$  vectorul de undă și  $\omega$  pulsația undei (vezi § 2.6)) trebuie să fie invariantă față de transformările Galilei (3.2.26). Din această proprietate rezultă legile după care are loc modificarea frecvenței recepționate de un observator în comparație cu frecvența emisă de sursa care generează unda. Modificarea menționată este cunoscută sub denumirea de *efect Doppler*.

Să considerăm mai întîi cazul cînd sursa de unde se află în repaus față de fluidul în care se propagă undele și observatorul se mișcă cu viteza constantă  $\mathbf{V}$  față de sursa respectivă. Atunci putem lua un sistem de referință  $K$  solidar cu sursa de unde și un sistem de referință  $K'$  solidar cu observatorul. Atît  $K$  cît și  $K'$  sînt sisteme de referință inerțiale. Atunci faza undei monocromatice trebuie să aibă aceeași formă de exprimare în cele două sisteme, adică

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega't'. \quad (3.3.8)$$



Pe de altă parte, trebuie avut în vedere că trecerea din sistemul  $K'$  în sistemul  $K$  este dată de transformările Galilei (3.2.26). Introducând aceste transformări în (3.3.8) se obține

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} \quad \omega' = \omega - \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} \quad (3.3.9)$$

Dacă se notează cu  $\theta$  unghiul format de vectorii  $\mathbf{V}$  și  $\mathbf{k}$  și avînd în vedere relația  $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$  ( $c$  fiind viteza de propagare a undei), cea de a doua din relațiile (3.3.9), ținînd cont de semnificațiile atribuite lui  $\omega$  și lui  $\omega'$ , ne dă

$$\omega_{obs.} = \omega_{sursă} \left( 1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right). \quad (3.3.10)$$

Fie acum cazul cînd sursa de unde se mișcă față de fluid cu viteza  $\mathbf{V}$  și observatorul este în repaus față de fluid. În acest caz atașăm sistemul  $K'$  sursei de unde și sistemul  $K$  observatorului. Formulele (3.3.9) rămîn aplicabile și în acest caz, cu deosebirea că de data aceasta  $\omega'$  reprezintă pulsația sursei, iar  $\omega$  reprezintă pulsația undei recepționate de observator. Atunci, cu semnificația amintită pentru unghiul  $\theta$ , din (3.3.9) se obține

$$\omega_{obs.} = \frac{\omega_{sursă}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (3.3.11)$$

Din formulele (3.3.10) și (3.3.11) se vede că pulsația (și deci frecvența) undei acustice înregistrate de observator diferă de pulsația (frecvența) emisă de sursa de unde. Acest fapt este cunoscut sub denumirea de efect Doppler.

### § 3.4. POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÎNSE ȘI TRANSFORMĂRILE LORENZ

După cum am arătat în § 3.3, în teoria relativității clasice toate sistemele de referință inerțiale sînt echivalente între ele în raport cu fenomenele mecanice (fapt exprimat în cadrul teoriei respective prin aceea că ecuațiile mecanicii clasice sînt invariante (rămîn neschimbate) față de transformările Galilei (3.2.26)). Dar în fizică studiem și alte tipuri de fenomene decît cele mecanice (de exemplu, fenomene electromagnetice sau fenomene cuantice). De aceea se pune în mod firesc întrebarea: sînt



oare sistemele de referință inerțiale echivalente între ele în raport cu toate fenomenele fizice? Experiența ne arată că răspunsul la această întrebare este *da*. Desigur aceasta înseamnă că legile de transformare de la un sistem de referință inerțial la alt sistem de referință inerțial trebuie să lase invariante (neschimbate) legile tuturor fenomenelor fizice. Am văzut că transformările Galilei (3.2.26) satisfac această cerință pentru fenomenele mecanice. Dar satisfac ele cerința respectivă și pentru alte fenomene — de exemplu pentru cele electromagnetice? Se poate arăta că legile de bază ale fenomenelor electromagnetice (ecuațiile Maxwell; vezi cap. VI) nu sînt invariante față de transformările Galilei (3.2.26). Vom cita aici un argument mai simplu care arată că transformările Galilei nu sînt compatibile cu modul de desfășurare al fenomenelor electromagnetice. Să considerăm două sisteme de referință inerțiale  $K$  și  $K'$  cu axele paralele,  $K'$  mișcîndu-se față de  $K$  cu viteza  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$  — ca în figura 3.2.2. Să considerăm că o sursă de lumină, aflată în repaus în  $K$ , emite în vid un semnal luminos ce se propagă cu viteza  $v = c$  în lungul axei  $Ox$ . Atunci, conform cu (3.2.27), viteza respectivului semnal luminos în vid față de  $K'$  ar trebui să fie  $c' = c - V$ . Experiențele (cele de tip Michelson) au arătat, însă, că viteza semnalului luminos față de  $K'$  este tot  $c$ , adică  $c' = c$ . (De reținut aici că  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , iar în experiențele lui Michelson valorile lui  $c$  și  $c'$  au fost determinate cu precizii de 0,15 m/s și, mai recent, în experiențe cu laseri, această precizie a atins valoarea de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ .)

Deci experiența ne arată, pe de o parte, că sistemele de referință inerțiale sînt echivalente între ele în raport cu toate tipurile de fenomene fizice și, pe de altă parte, că viteza luminii în vid este aceeași în raport cu toate sistemele inerțiale. Atunci se impune cerința că aceste constatări experimentale trebuie încorporate în teoria referitoare la legăturile și corelațiile dintre descrierile relative ale aceluiași fenomen fizic în raport cu diferite sisteme de referință inerțiale. După cum am văzut, teoria relativității clasice (galileene) nu satisface cerința menționată. De aceea, trebuie căutată o altă teorie a relativității care să fie conformă cu respectiva cerință. O astfel de teorie a fost efectiv elaborată ca rod al cercetărilor unor savanți ca H. Poincaré, A. Lorentz și mai ales ale lui A. Einstein și este cunoscută astăzi sub denumirea de *teoria relativității restrînse*. Această teorie este clădită pe următoarele două postulate (cunoscute și sub denumirea de postulatele lui Einstein).

I. Sistemele de referință inerțiale sînt echivalente între ele în raport cu toate tipurile de fenomene fizice.

II. Viteza luminii în vid este aceeași pentru toate sistemele de referință inerțiale și nu depinde nici de viteza sursei, nici de viteza observatorului.



Se vede ușor că cele două postulate ale teoriei relativității restrânse nu reprezintă decât ridicarea la rang de axiomă a constatărilor experimentale menționate mai sus. De notat, în plus, că primul principiu nu este decât o extindere la toate tipurile de fenomene fizice a principiului relativității al lui Galilei (enunțat doar pentru fenomenele mecanice; vezi § 3.3.).

Din cele două postulate ale teoriei relativității restrânse se pot obține anumite formule de transformare ale coordonatelor și timpului pentru trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul (formulele Lorentz).

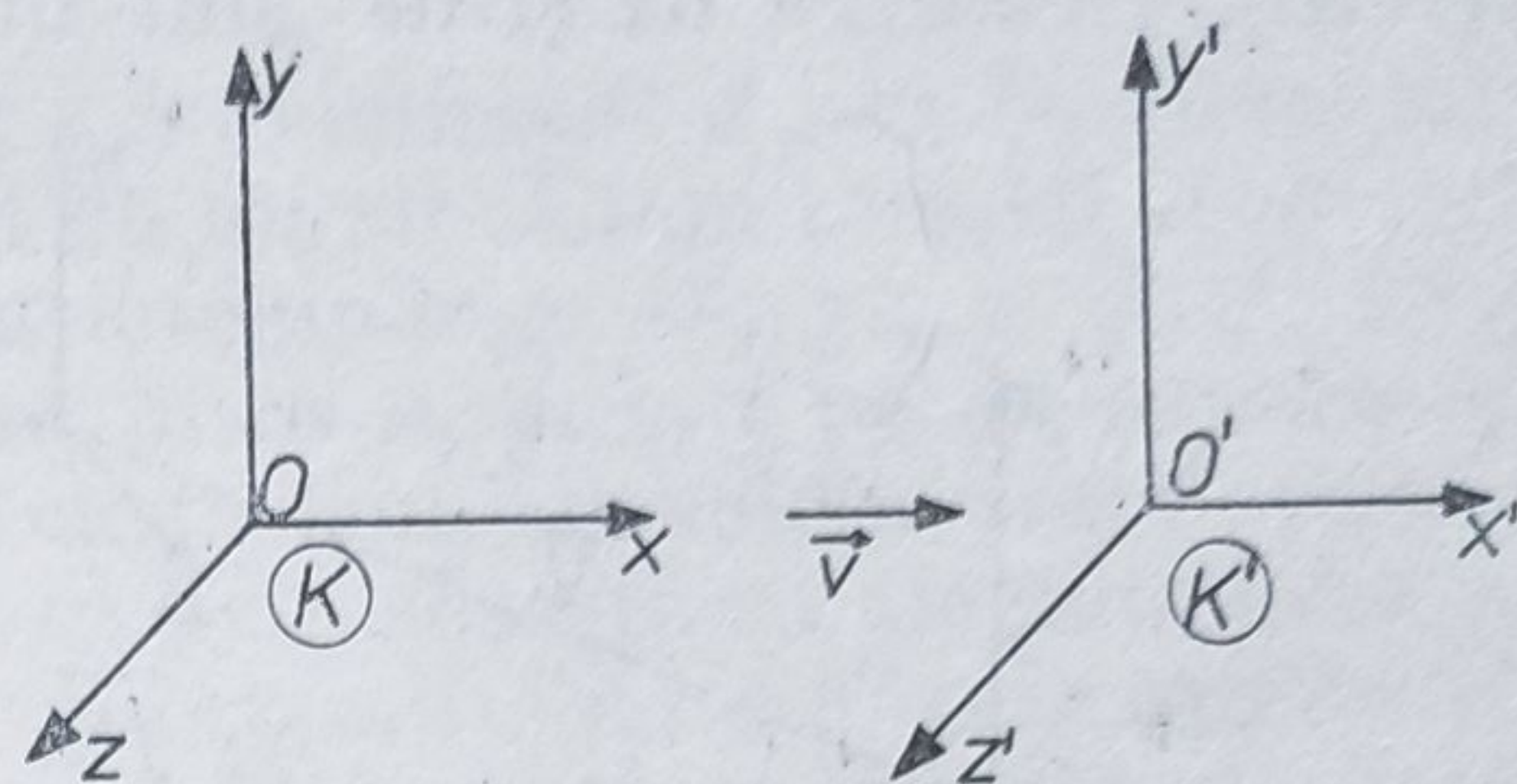


Fig. 3.4.1

Vom urmări în continuare să arătăm cum se pot obține respectivele formule. Într-un sistem  $K$  vom nota prin  $\mathcal{E}(x, y, z, t)$  un eveniment (care constă în producerea unui eveniment fizic la momentul  $t$  în punctul  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ). Să considerăm două sisteme inerțiale  $K$  și  $K'$  cu axele paralele,  $K'$  mișcându-se cu viteza  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$  în lungul axei  $Ox$  față de  $K$  (fig. 3.4.1). Să considerăm două evenimente pe care în raport cu  $K$  le vom nota cu  $\mathcal{E}_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  și  $\mathcal{E}_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$  iar în raport cu  $K'$  le vom nota cu  $\mathcal{E}'_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$  și  $\mathcal{E}'_2(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$ . Mărimea  $s_{12}$ , definită prin relația

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2, \quad (3.4.1)$$

unde  $c$  este viteza luminii în vid, o numim *interval* între evenimentele  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  în raport cu  $K$ . Dacă  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  sînt infinitezimal apropiate, adică dacă  $t_2 - t_1 = dt$ ,  $x_2 - x_1 = dx$ ,  $y_2 - y_1 = dy$  și  $z_2 - z_1 = dz$ , atunci intervalul între cele două evenimente va fi și el infinitezimal și va fi definit prin relația

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.4.2)$$

În mod analog se poate defini intervalul  $s'_{12}$  respectiv  $ds'$  între aceleași evenimente în raport cu  $K'$  schimbînd în (3.4.1) și (3.4.2) coordonatele și timpul în raport cu  $K$  cu coordonatele și timpul în raport cu  $K'$ , folosind aceeași viteză  $c$  a luminii în vid (conform postulatului al II-lea). Dacă cele două evenimente sînt legate prin semnal luminos — adică evenimentul 1 constă în emiterea unui semnal luminos, iar evenimentul 2 reprezintă captarea aceluiasi semnal luminos, evident că se pot scrie relațiile

$$s_{12}^2 = 0, \quad s_{12}'^2 = 0. \quad (3.4.3)$$

Aceste relații arată că intervalul între două evenimente legate prin semnal luminos este nul în toate sistemele de referință inerțiale. Dacă ne referim



la două evenimente oarecare ce nu sînt legate între ele prin semnal luminos, intervalul între ele nu va fi zero. Cînd evenimentele respective sînt infinitezimal apropiate intervalele între ele în raport cu  $K$  și  $K'$  vor fi  $ds$  respectiv  $ds'$ . Deoarece  $ds$  și  $ds'$  sînt infiniti mici de același ordin de mărime

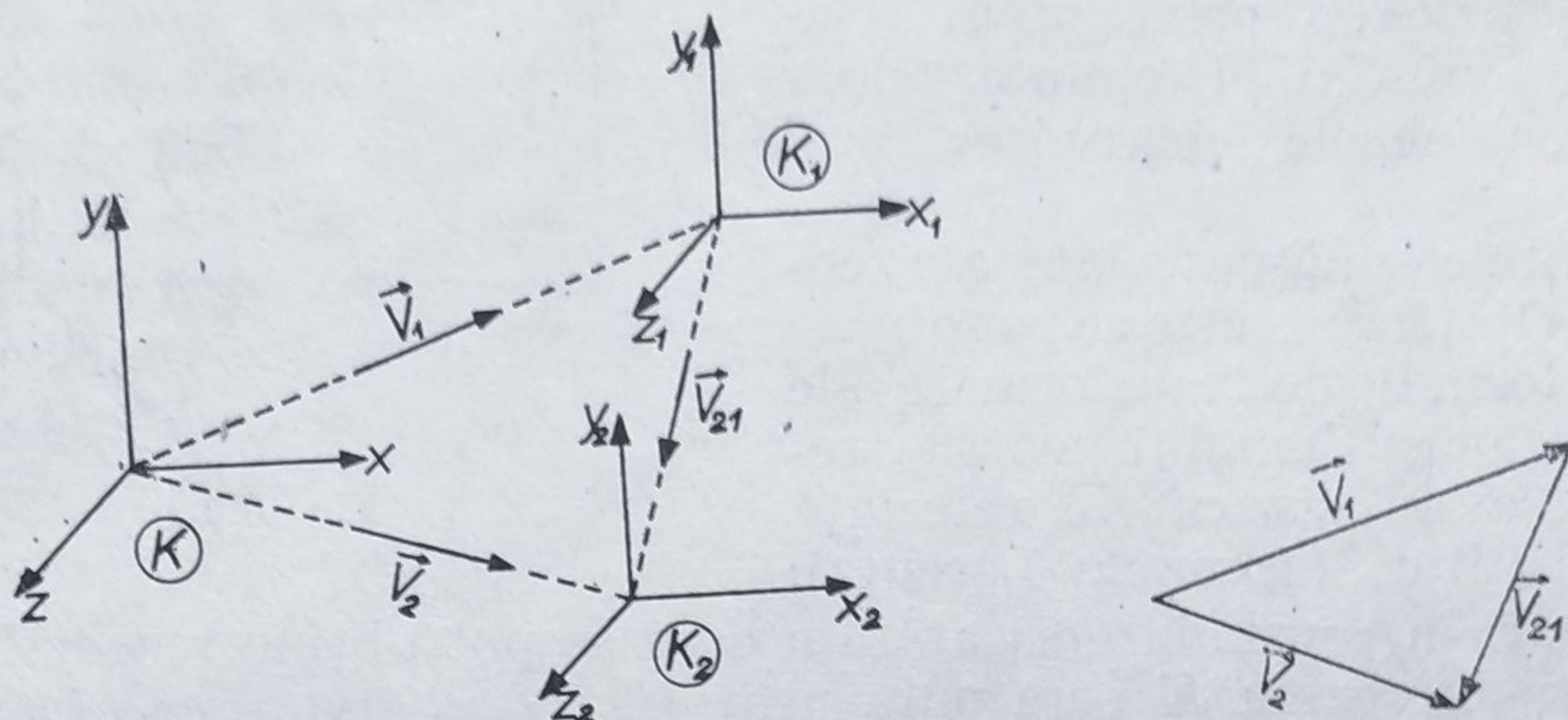


Fig. 3.4.2

(trebuind să se anuleze simultan pentru evenimente legate prin semnal luminos) se poate scrie

$$ds^2 = a ds'^2. \quad (3.4.4)$$

Din cauza omogenității spațiului și timpului mărimea  $a$  nu poate depinde de coordonate sau de timp. Datorită izotropiei spațiului  $a$  nu poate depinde nici de orientarea în spațiu a vitezei  $\mathbf{V}$  cu care se mișcă  $K'$  față de  $K$ . Rezultă că  $a$  poate depinde cel mult de  $V = |\mathbf{V}|$ . Pentru a găsi expresia  $a = a(V)$  să considerăm trei sisteme de referință inerțiale oarecare  $K$ ,  $K_1$  și  $K_2$  (fig. 3.4.2).

Pentru sistemele considerate, aplicînd (3.4.4) se pot scrie relațiile

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2)ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2 \quad (3.4.5)$$

de unde se obține

$$a(V_{21}) = \frac{a(V_2)}{a(V_1)}. \quad (3.4.6)$$

Dar întrucît  $V_{21} = |\mathbf{V}_{21}|$  depinde de unghiul între  $\mathbf{V}_1$  și  $\mathbf{V}_2$ , iar  $V_1 = |\mathbf{V}_1|$  și  $V_2 = |\mathbf{V}_2|$  nu depind de respectivul unghi, rezultă că relația (3.4.6) este satisfăcută numai dacă  $a(V) = 1$ . Atunci din (3.4.4) rezultă că pentru orice două evenimente infinitezimal apropiate are loc relația

$$ds^2 = ds'^2. \quad (3.4.7)$$

Pentru un cuplu de evenimente separate printr-un interval finit are loc relația

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2. \quad (3.4.8)$$



Intervalele între două evenimente se clasifică în intervale *de tip temporal* ( $s_{12}^2 > 0$ ), intervale *de tip spațial* ( $s_{12}^2 < 0$ ) și *intervale nule* ( $s_{12}^2 = 0$ ). Ultimele sînt intervale între evenimente legate prin semnal luminos (vezi (3.4.3)).

În raport cu un sistem inerțial  $K$  un eveniment  $\mathcal{E}$  are coordonatele spațiotemporale  $x, y, z$  și  $t$ , iar în raport cu un alt sistem inerțial  $K'$  evenimentul respectiv are coordonatele spațiotemporale  $x', y', z'$  și  $t'$ . Este important de stabilit care este legătura între  $x, y, z, t$  pe de o parte și  $x', y', z', t'$  pe de altă parte. Pentru aceasta vom considera drept sisteme  $K$  și  $K'$  sistemele din figura 3.4.1 (fără ca prin aceasta să afectăm generalitatea discuțiilor). Vom considera trecerea originii  $O'$  a lui  $K'$  prin originea  $O$  a lui  $K$  drept eveniment  $\mathcal{E}_1$ . În plus, vom considera un eveniment  $\mathcal{E}_2$  oarecare. Alegînd în mod convenabil originea timpului în cele două sisteme de referință putem nota coordonatele spațio-temporale ale celor două evenimente în raport cu cele două sisteme de referință în felul următor:  $\mathcal{E}_1(0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{E}_2(x, y, z, t)$  în  $K$  și  $\mathcal{E}_1'(0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{E}_2'(x', y', z', t')$  în  $K'$ . Ținînd cont de (3.4.8) și (3.4.1) se poate scrie

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (3.4.9)$$

Deoarece  $K'$  se mișcă față de  $K$  în lungul axei  $Ox$  și cele două sisteme au axele paralele, este natural să admitem că avem

$$y = y', \quad z = z'. \quad (3.4.10)$$

Atunci din (3.4.9) rezultă

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad (3.4.11)$$

Cu notațiile  $\tau = ict$ ,  $\tau' = ict'$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), această relație se transcrie în forma

$$x^2 + \tau^2 = x'^2 + \tau'^2. \quad (3.4.12)$$

Această relație arată că trecerea de la  $K$  la  $K'$  poate fi reprezentată geometric ca o transformare a planului  $xO\tau$  în planul  $x'O'\tau'$ , cu păstrarea originii și păstrarea distanței de la origină la un punct oarecare. O astfel de transformare nu este decît o rotație a planului  $xO\tau$  în jurul originii (fig. 3.4.3) cu un unghi de rotație oarecare  $\psi$ . Din figura 3.4.3 se vede că rotația menționată este definită de relațiile

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \psi - \tau' \sin \psi \\ \tau &= x' \sin \psi + \tau' \cos \psi. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

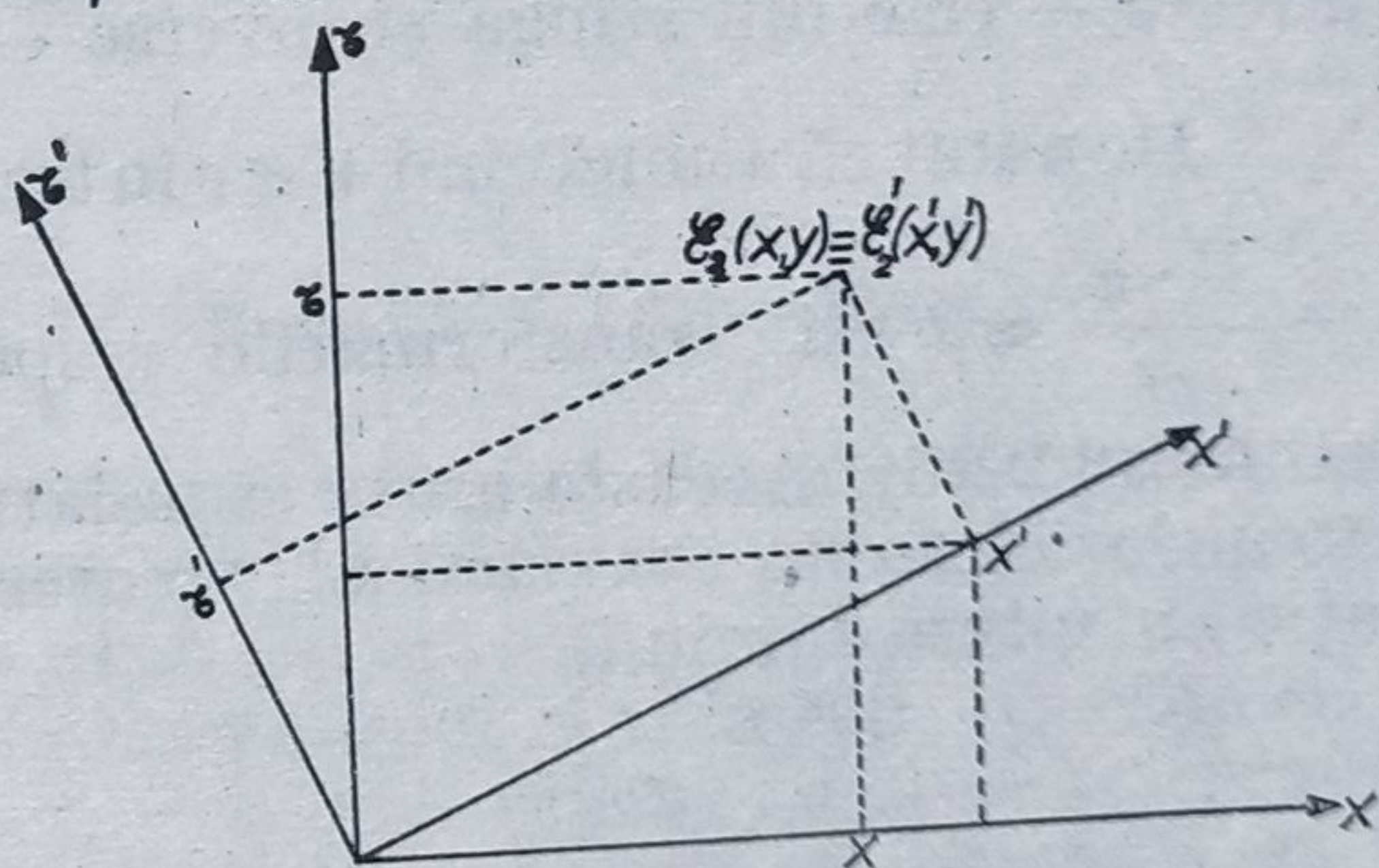


Fig. 3.4.3



Pentru a determina unghiul  $\psi$  vom considera evenimentul  $\mathcal{E}_2$  ca fiind reprezentat de trecerea originii  $O'$  a lui  $K'$  printr-un punct oarecare (de pe axa  $Ox$  a lui  $K$ ) diferit de  $O$ . Atunci în sistemele  $K$  și  $K'$  vom avea  $\mathcal{E}_2(x, 0, 0, t)$  și  $\mathcal{E}_2'(0, 0, 0, t')$  cu  $x = Vt$ . Rezultă că pentru acest eveniment relațiile (3.4.13) capătă forma

$$Vt = -\tau' \sin \psi, \quad \tau = \tau' \cos \psi \quad (3.4.14)$$

De aici rezultă

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{Vt}{\tau} = -\frac{Vt}{ict} = i \frac{V}{c}. \quad (3.4.15)$$

Ținând cont de relațiile

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} \quad (3.4.16)$$

din (3.4.13) și (3.4.10) se obține

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (3.4.17)$$

Aceste relații sînt cunoscute sub denumirea de *transformările Lorentz* (directe — cele din stînga și inverse — cele din dreapta)

De notat că atunci cînd  $V \ll c$  în transformările Lorentz  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx 1$  și  $t - \frac{V \cdot x}{c^2} \approx t$  și transformările respective se reduc la transformările

Galilei (3.2.26). Aceasta arată că relativitatea restrînsă conține relativitatea clasică ca un caz particular (corespunzător vitezelor mici în comparație cu viteza luminii).

## § 3.5. CONSECINȚELE CINEMATICE ALE TRANSFORMĂRILOR LORENTZ

### 3.5.1. CONTRACȚIA RELATIVISTĂ A LUNGIMILOR

Să considerăm o riglă aflată în repaus în sistemul  $K'$  și așezată în lungul axei  $O'x'$ . Lungimea riglei în repaus — numită și *lungime proprie* — este  $l_0 = l' = x'_2 - x'_1$  (unde  $x'_1$  și  $x'_2$  sînt coordonatele capetelor riglei).



Să vedem care este lungimea  $l$  a riglei măsurată dintr-un sistem  $K$  față de care rigla (și deci și  $K'$ ) se mișcă cu viteza  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ . Pentru aceasta trebuie să determinăm, la *același moment*  $t$ , în  $K$ , coordonatele  $x_1$  și  $x_2$  ale capetelor riglei. Din (3.4.17) se poate scrie

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.5.1)$$

de unde prin scădere rezultă

$$x'_2 - x'_1 = l' = l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.5.2)$$

adică

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.5.3)$$

Această relație arată că lungimea  $l$  a riglei în raport cu un sistem de referință față de care ea se mișcă este mai mică (deoarece  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1$ ) decât lungimea sa proprie  $l_0$  (măsurată în sistemul în care rigla este în repaus). Acest fapt este cunoscut sub denumirea de *contractia relativistă a lungimilor*.

Se poate ușor vedea că dacă rigla este așezată paralel cu axele  $O'y'$  sau  $O'z'$  (adică perpendicular pe direcția sa de mișcare) nu mai apare nici o contractie relativistă.

### 3.5.2. DILATAREA RELATIVISTĂ A INTERVALELOR TEMPORALE

Să considerăm acum două evenimente  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  care se petrec la momentele  $t'_1$  și  $t'_2$  cu un același corp aflat în repaus într-un sistem  $K'$ , adică evenimentele sînt presupuse a avea loc în același punct în  $K'$ . Intervalul de timp *propriu* (în sistemul în care corpul este în repaus) între cele două evenimente este  $\Delta t_0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Să vedem cît este intervalul de timp  $\Delta t$  între cele două evenimente, măsurat dintr-un sistem  $K$  față de care  $K'$  (și deci și corpul în cauză) se mișcă cu viteza  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ . Din (3.4.17) se poate scrie

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.5.4)$$



de unde rezultă

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.5.5)$$

De aici se vede că intervalul de timp, între două evenimente care se petrec cu un același corp, măsurat în raport cu un sistem  $K$  față de care corpul se mișcă, are o valoare  $\Delta t$  mai mare (deoarece  $\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > 1$ ) decât valoarea  $\Delta t_0$  în raport cu sistemul propriu de referință (în care corpul se află în repaus). Acest fapt este cunoscut sub denumirea de *dilatarea relativistă a intervalelor temporale* (sau a duratelor).

### 3.5.3. FORMULELE DE TRANSFORMARE RELATIVISTĂ A VITEZELOR

Să considerăm o particulă aflată într-o mișcare arbitrară. În raport cu două sisteme de referință inerțiale  $K$  și  $K'$  coordonatele carteziene ale particulei vor fi în general funcții de timp adică:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  și respectiv  $x' = x'(t')$ ,  $y' = y'(t')$ ,  $z' = z'(t')$ . Componentele vitezei particulei în cele două sisteme de referință sînt, prin definiție, date de relațiile

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, & v_y &= \frac{dy}{dt}, & v_z &= \frac{dz}{dt} \\ v'_x &= \frac{dx'}{dt'}, & v'_y &= \frac{dy'}{dt'}, & v'_z &= \frac{dz'}{dt'}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Se pune acum problema de a vedea care este legătura între mărimile  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  pe de o parte și mărimile  $v'_x$ ,  $v'_y$ ,  $v'_z$  pe de altă parte. În acest sens trebuie mai întâi notat că din (3.4.17) rezultă

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.5.7)$$

și respectiv

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}. \quad (3.5.8)$$



Împărțind, în membrii dreپي ai acestor relații atît numitorii cît și numărătorii cu  $dt'$  și ținînd cont de (3.5.6), rezultă relațiile

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (3.5.9)$$

Aceste formule exprimă legile *relativiste de transformare a vitezelor* dintr-un sistem de referință inerțial în alt sistem de referință inerțial. (Pentru formulele (3.5.9) unele publicații folosesc și denumirea de legile relativiste de compunere a vitezelor.)

De notat că dacă  $V \ll c$  și  $v'_\alpha \ll c$  ( $\alpha = x, y, z$ ), prin neglijarea termenilor  $\frac{V^2}{c^2}$  și  $\frac{V v'_\alpha}{c^2}$ , relațiile (3.5.9) ne dau tocmai formulele clasice (galileene) (3.2.27) de transformare a vitezelor. Aceasta arată din nou că relativitatea clasică este o aproximație (corespunzătoare vitezelor mici) a relativității restrînse.

#### 3.5.4. FORMULELE DE TRANSFORMARE RELATIVISTĂ A ACCELERATIILOR

În raport cu cele două sisteme de referință accelerația particulei menționate în § 3.5.3 va avea componentele

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}, \quad a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}. \quad (3.5.10)$$

Se pune problema de a găsi care este legătura între mărimile  $a_x, a_y, a_z$  pe de o parte și mărimile  $a'_x, a'_y, a'_z$  pe de altă parte. Pentru a soluționa această problemă notăm mai întîi că din relațiile (3.5.9) se poate scrie

$$dv_x = \frac{\left(1 - \frac{V}{c^2}\right) dv'_x}{\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^2}, \quad dv_\alpha = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^2} \left[ \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) dv'_\alpha - \frac{V}{c^2} v'_\alpha dv'_x \right]$$

( $\alpha = y, z$ ) (3.5.11)



Din aceste relații, ținând cont de (3.5.7) și (3.5.10) se obține

$$a_x = \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \right]^3 a'_x, \quad a_\alpha = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^3} \left[ \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) a'_\alpha - \frac{V v'_\alpha}{c^2} a'_x \right]$$

( $\alpha = y, z$ ). (3.5.12)

Acestea sînt tocmai *formulele relativiste de transformare a accelerațiilor* pe care le căutăm. De notat că aceste formule nu trebuie interpretate ca „formule de compunere a accelerațiilor” deoarece  $K'$  nu se mișcă accelerat față de  $K$ .

Se observă că la limita vitezelor mici formulele (3.5.12) trec în formulele (3.2.28) din relativitatea clasică (galileană).

### § 3.6. ELEMENTE DE DINAMICĂ RELATIVISTĂ

Am văzut în cazul mecanicii clasice că studiul aspectelor dinamice ale mișcării poate fi făcut în următoarele formalisme echivalente între ele: formalismul ecuațiilor Newton, al ecuațiilor Lagrange și cel bazat pe principiul minimei acțiuni. În cazul teoriei relativității restrînse vom aborda studiul unor elemente de dinamică pornind de la principiul minimei acțiuni. Acest principiu, ca și în cazul mecanicii clasice, afirmă că pentru orice sistem mecanic există o integrală  $\mathcal{S}$ , numită acțiune, care are un minim pentru traiectoriile reale ale sistemului în raport cu traiectoriile virtuale.

Să ne începem studiul prin definirea acțiunii pentru o particulă liberă, adică pentru o particulă care nu se află sub influența vreunor interacțiuni cu alte corpuri. O primă, cerință, în teoria relativității restrînse, pentru acțiune este ca ea să fie un invariant (să nu se modifice) în raport cu transformările Lorentz prin trecerea de la un sistem de referință la altul. Deci acțiunea trebuie să fie un scalar (scalarii nu se modifică la transformări — vezi § 3.7). În plus, analog cu cazul mecanicii clasice, acțiunea trebuie să fie dată sub forma unei integrale din diferențiale de ordinul întâi. Pentru o particulă liberă, care în intervalul de timp  $dt$  își modifică coordonatele cu  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$ , singura diferențială de ordinul întâi care este un invariant este intervalul relativist  $ds$  definit prin relația

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} = c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3.6.1)$$



unde  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  este viteza momentană a particulei. Deci acțiunea pentru o particulă liberă trebuie scrisă sub forma

$$\mathcal{S} = -\eta \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} ds = -\eta c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (3.6.2)$$

unde evenimentele  $\mathcal{E}_1$  și  $\mathcal{E}_2$  reprezintă plecarea particulei la momentul  $t_1$  din punctul  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , respectiv sosirea ei la momentul  $t_2$  în punctul  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . În (3.6.2)  $\eta$  reprezintă o constantă pozitivă, iar semnul minus apare pentru a asigura ca extremumul acțiunii  $\mathcal{S}$  să fie un minim.

Pe de altă parte, prin analogie cu mecanica clasică (vezi § 1.6), acțiunea  $\mathcal{S}$  trebuie scrisă sub forma

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (3.6.3)$$

unde  $\mathcal{L}$  este lagrangeianul sistemului considerat (în cazul în discuție sistemul reducându-se la o particulă liberă). Comparînd (3.6.2) și (3.6.3) rezultă că lagrangeianul unei particule relativiste libere are expresia

$$\mathcal{L} = -\eta c \sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}. \quad (3.6.4)$$

În paragrafele precedente am văzut că la limita vitezelor mici relativitatea restrînsă dă relativitatea clasică. Atunci la aceeași limită dinamica relativității restrînsă trebuie să dea dinamica clasică. Aceasta înseamnă că la limita vitezelor mici ( $|\mathbf{v}| \ll c$ ) lagrangeianul (3.6.4) trebuie să dea expresia cunoscută a lagrangeianului clasic al unei particule libere

$$\mathcal{L}_{clasic} = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 \quad (3.6.5)$$

unde  $m_0$  este masa clasică a particulei. În teoria relativității  $m_0$  poartă și denumirea de *masă de repaus* a particulei. Avînd în vedere că  $\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2$  pentru  $\beta \ll 1$ , din (3.6.4) se obține în aproximația  $|\mathbf{v}| \ll c$ ,

$$\mathcal{L} \approx -\eta c + \eta \frac{\mathbf{v}^2}{2c}. \quad (3.6.6)$$

Deoarece în lagrangeian termenii constanți nu au nici o importanță (ei nu sînt implicați în nici un fel în ecuațiile de mișcare) termenul  $\eta c$  din (3.6.6) poate fi neglijat. Întrucît la limita vitezelor mici  $\mathcal{L}$  dat de (3.6.6)



trebuie să coincidă (pînă la o constantă, după cum am văzut) cu  $\mathcal{L}$  dat de (3.6.5) rezultă

$$\eta \frac{\mathbf{v}^2}{2c} = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2, \quad \eta = m_0 c. \quad (3.6.7)$$

Introducînd această valoare a lui  $\eta$  în (3.6.2) și (3.6.4) rezultă că acțiunea  $\mathcal{S}$  și lagrangeianul  $\mathcal{L}$  al unei particule relativiste libere au expresiile

$$\mathcal{S} = -m_0 c \int_{s_1}^{s_2} ds, \quad \mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (3.6.8)$$

Prin analogie cu mecanica clasică definim impulsul  $\mathbf{p}$  al particulei prin relația

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \left( p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 = x, y, z \right). \quad (3.6.9)$$

Din (3.6.8) și (3.6.9) rezultă că impulsul unei particule relativiste are expresia

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (3.6.10)$$

Se vede ușor că la viteze mici în comparație cu viteza luminii ( $|\mathbf{v}| \ll c$ ) expresia (3.6.10) a impulsului relativist trece în expresia clasică  $\mathbf{p}_{clasic} = m_0 \mathbf{v}$ .

Energia  $E$  a particulei o definim, prin analogie cu cazul clasic (vezi § 1.5), prin intermediul hamiltonianului  $\mathcal{H}$ , adică prin relațiile

$$E = \mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{x}_\alpha - \mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}. \quad (3.6.11)$$

Introducînd în această relație expresia lui  $\mathbf{p}$  dată de (3.6.10) și expresia lui  $\mathcal{L}$  dată de (3.6.8) obținem pentru energia particulei expresia

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (3.6.12)$$

Cînd particula se află în repaus ( $\mathbf{v} = 0$ ) energia particulei are valoarea

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (3.6.13)$$

În mod curent pentru energia  $E$  dată de (3.6.12) se folosește denumirea de *energie totală*, iar pentru energia  $E_0$  dată de (3.6.13) se utilizează denumirea de *energie de repaus*.



Evident că dacă prin *energia cinetică*  $T$  a particulei înțelegem energia legată de mișcare, respectiva energie are expresia

$$T = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (3.6.14)$$

Formulele discutate mai sus sînt adevărate atît pentru particulele elementare (particule fără structură internă) cît și pentru corpuri compuse (cu structură internă). Referitor la acestea din urmă sînt de menționat următoarele : în energia de repaus  $E_0 = M_0 c^2$  a unui corp compus (de masă de repaus  $M_0$ ) intră atît energia de repaus  $\sum_i E_{0i} = \sum_i m_{0i} c^2$  a particulelor constituyente (de mase de repaus  $m_{0i}$ ), cît și energia de interacțiune reciprocă a particulelor respective, precum și energia cinetică legată de mișcarea particulelor în interiorul corpului. De aici rezultă că pentru un corp compus (sistem de particule) în general avem

$$M_0 c^2 \geq \sum_i m_{0i} c^2. \quad (3.6.15)$$

Egalitatea apare numai cînd particulele constituyente nu interacționează între ele și nu se mișcă în interiorul sistemului. Relația (3.6.15) arată că în teoria relativității restrînse masa de repaus a unui corp (sistem) compus nu este în general egală cu suma maselor de repaus ale particulelor constituyente.

Să prezentăm acum cîteva relații între energie și impuls, des folosite în fizică. Din (3.6.10) și (3.6.12) prin ridicări la pătrat și adunări se obține relația

$$\frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2. \quad (3.6.16)$$

Dacă scriem  $E = E(\mathbf{p}) \equiv \mathcal{H}$  obținem pentru hamiltonianul  $\mathcal{H}$  al particulei următoarea expresie

$$\mathcal{H} = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.6.17)$$

Tot din (3.6.10) și (3.6.12) prin simple împărțiri rezultă relația

$$\mathbf{p} = \frac{E \cdot \mathbf{v}}{c^2}. \quad (3.6.18)$$

Din (3.6.10) și (3.6.12) se observă că pentru  $v \rightarrow c$  impulsul  $p$  și energia  $E$  ale particulei tind spre infinit dacă  $m_0 \neq 0$ . Aceasta arată că particulele cu masa de repaus  $m_0$  diferită de zero nu se pot mișca cu viteza luminii (aducerea unei particule cu  $m_0 \neq 0$  la o viteză  $v = c$  ar necesita o energie



infinit de mare, care fizic nu-i poate fi furnizată). Din (3.6.18) se vede că pentru particulele care se mișcă cu viteza  $v = c$  (desigur că este vorba de particule cu  $m_0 = 0$ ) legătura între impuls-energie este dată de relația

$$p = \frac{E}{c}. \quad (3.6.19)$$

Legat de impulsul și energia unei particule o altă problemă care se pune în teoria relativității restrânse este aceea a transformării mărimilor respective de la un sistem inerțial la altul. Mai concret această problemă poate fi formulată în felul următor: dacă o particulă în mișcare arbitrară are în raport cu un sistem inerțial  $K$  impulsul  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  și energia  $E$ , iar în raport cu un alt sistem inerțial  $K'$ , impulsul  $\mathbf{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)$  și energia  $E'$ , atunci care sînt formulele de legătură între mărimile  $\{p_x, p_y, p_z, E\}$  pe de o parte și mărimile  $\{p'_x, p'_y, p'_z, E'\}$  pe de altă parte cînd  $K'$  se mișcă față de  $K$  cu viteza  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ ? Pentru a răspunde la problema enunțată notăm mai întîi că din relațiile (3.6.10), (3.6.12) și (3.6.1) se poate scrie (cu  $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^3 = \{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$ )

$$p_\alpha = \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{cm_0 dx_\alpha}{c dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = m_0 c \frac{dx_\alpha}{ds}$$

$$\frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = m_0 c \frac{c dt}{c dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = m_0 c \frac{c dt}{ds} \quad (3.6.20)$$

unde  $ds$  este intervalul relativist (3.6.1) legat de parcurgerea de către particulă în timpul  $dt$  a spațiului  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ . Conform celor discutate în § 3.4, intervalul relativist este o mărime invariantă față de trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul. Atunci, referindu-ne la sistemele de referință menționate  $K$  și  $K'$  putem scrie

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = ds' = c dt' \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}'^2}{c^2}}. \quad (3.6.21)$$

Evident că în sistemul  $K'$  putem scrie

$$p'_\alpha = m_0 c \frac{dx'_\alpha}{ds'}, \quad \frac{E'}{c} = m_0 c \frac{c dt'}{ds'}. \quad (3.6.22)$$

Exprimînd coordonatele  $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^3$  și timpul  $t$  în raport cu  $K$  în funcție de coordonatele  $\{x'_\alpha\}_{\alpha=1}^3$  și timpul  $t'$  în raport cu  $K'$  cu ajutorul transformă-



rilor Lorentz (3.4.17) și, ținând cont de (3.6.21), din (3.6.20) și (3.6.22) obținem

$$p_x = m_0 c \frac{dx}{ds} = m_0 c \frac{d}{ds'} \left( \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0 c \frac{dx'}{ds'} + V m_0 c \frac{dt'}{ds'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$p_y = m_0 c \frac{dy}{ds} = m_0 c \frac{dy'}{ds'} = p'_y, \quad p_z = p'_z$$

$$\frac{E}{c} = m_0 c \frac{cdt}{ds} = m_0 c \frac{cd}{ds'} \left( \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= \frac{m_0 c \frac{cdt'}{ds'} + \frac{V}{c} m_0 c \frac{dx'}{ds'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{E'}{c} + \frac{V}{c} p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.6.23)$$

Din aceste relații rezultă că între componentele impulsului și energia unei particule luate în raport cu un sistem de referință și aceleași mărimi luate în raport cu alt sistem de referință există următoarele relații sau formule de transformare directe și respectiv inverse

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ p_y = p'_y & p'_y = p_y \\ p_z = p'_z & p'_z = p_z \\ E = \frac{E' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & E' = \frac{E - V p_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (3.6.24)$$



### § 3.7. FORMULAREA CVADRIDIMENSIONALĂ A TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

Adesea, din motive de eleganță a scrierii și ușurință a memorării formulelor, teoria relativității restrânse se transcrie în formalismul spațiilor vectoriale cvadridimensionale. Acest formalism are la bază spațiul cvadridimensional de coordonate

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict \quad (3.7.1)$$

numit și *spațiul Minkowski*. Un punct dintr-un astfel de spațiu, definit printr-un set de valori  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , nu este altceva decât un eveniment  $\mathcal{E}$ , definit în sensul § 3.4, care se petrece la momentul  $t = \frac{x_4}{ic}$  în punctul

$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  din spațiul obișnuit. Raportarea unui eveniment  $\mathcal{E}$  la un sistem de referință inerțial  $K$  am văzut că constă în precizarea coordonatelor obișnuite  $(x, y, z)$  ale locului unde se produce și ale momentului  $t$  când are loc. Se vede ușor că o astfel de raportare la un sistem de referință nu reprezintă decât găsirea „coordonatelor cvadridimensionale” ale unui punct în raport cu un sistem cvadridimensional de axe definit de (3.7.1). Atunci raportarea unui eveniment  $\mathcal{E}$  la două sisteme de referință distincte  $K$  și  $K'$  (cu axele  $Ox, Oy$  și  $Oz$  respectiv  $O'x', O'y'$  și  $O'z'$ ) nu reprezintă altceva decât raportarea unui aceluiași punct din spațiul cvadridimensional la două sisteme de axe cvadridimensionale distincte (adică la sistemul de axe  $Ox_1, Ox_2, Ox_3, Ox_4$  și respectiv la sistemul  $O'x'_1, O'x'_2, O'x'_3, O'x'_4$ ). Trece-rea de la un sistem de referință inerțial  $K'$  la alt sistem de referință inerțial  $K$  — descrisă de transformările Lorentz — nu mai este atunci, în limbajul spațiului cvadridimensional menționat, decât o transformare a coordonatelor cvadridimensionale ale unui punct de la un sistem de 4 axe de coordonate la un alt sistem de 4 axe de coordonate. În concluzie, transformările Lorentz se scriu ca o transformare de 4 coordonate. Să vedem cum se exprimă concret o astfel de transformare. De notat atunci că în locul notației  $\mathcal{E}(x, y, z, t)$  și  $\mathcal{E}(x', y', z', t')$  pentru un eveniment în raport cu 2 sisteme de referință  $K$  și  $K'$  trebuie folosite notațiile  $\mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  și  $\mathcal{E}'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  pentru un punct în raport cu 2 sisteme de cvadriaxe. Introducând notațiile

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \Gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (3.7.2)$$

și ținând cont de (3.7.1) se vede ușor că transformările Lorentz (3.4.17) se transcriu în forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 - i\beta\Gamma \cdot x'_4 \\ x_2 &= 0 \cdot x'_1 + 1 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4 \\ x_3 &= 0 \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 1 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4 \\ x_4 &= i\beta\Gamma \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + \Gamma \cdot x'_4 \end{aligned} \quad (3.7.3)$$



În notație matriceală aceste transformări se scriu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\beta\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}. \quad (3.7.4)$$

Dacă se notează cu  $\Lambda_{ik}$  elementele matricei

$$\overset{\rightarrow k}{\underset{j}{\Lambda}}(\Lambda_{ik}) = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\beta\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (3.7.5)$$

numită și *matricea transformărilor Lorentz*, atunci relațiile (3.7.3) sau (3.7.4) se scriu prescurtat sub forma

$$x_j = \sum_{k=1}^4 \Lambda_{jk} x'_k. \quad (3.7.5)$$

Această ultimă relație nu reprezintă altceva decât exprimarea cvadridimensională a transformărilor Lorentz. Ținând cont de (3.7.2) se vede ușor că determinantul asociat matricei transformărilor Lorentz (determinantul cu elementele  $\Lambda_{jk}$ ) este egal cu unitatea, ceea ce se scrie sub forma

$$\text{Det} |\Lambda_{jk}| = 1. \quad (3.7.6)$$

De asemenea, ținând cont de (3.7.2), se poate vedea ușor că matricea  $\Lambda_{ik}$  satisface relația

$$\sum_{l=1}^4 \Lambda_{lk} \Lambda_{lj} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j. \end{cases} \quad (3.7.7)$$

Generalizând (3.7.5) vom spune că un ansamblu de 4 mărimi  $\{A_j\}_{j=1}^4$  formează un cvadrivector dacă ele se transformă de la un sistem de referință  $K'$  la alt sistem  $K$  după relațiile

$$A_j = \sum_{k=1}^4 \Lambda_{jk} A'_k. \quad (3.7.8)$$



În mod analog, un ansamblu de 16 mărimi  $\{T_{jk}\}_{j,k=1}^4$  formează un cvadri-tensor de ordinul doi dacă prin trecere de la un sistem inerțial  $K'$  la un alt sistem inerțial  $K$  ele se transformă după relațiile

$$T_{jk} = \sum_{m,l=1}^4 \Lambda_{jm} \Lambda_{kl} T'_{ml} \quad (3.7.9)$$

Fiind dați doi cvadrivectori  $\{A_j\}_{j=1}^4$  și  $\{B_j\}_{j=1}^4$ , mărimea

$$(A, B) = \sum_{j=1}^4 A_j B_j \quad (3.7.10)$$

se numește *produs scalar* al cvadrivectorilor  $\{A_j\}_{j=1}^4$  și  $\{B_j\}_{j=1}^4$ . Avînd în vedere relațiile (3.7.8) și (3.7.7) se vede ușor că produsul scalar  $(A, B)$  este un invariant (nu se modifică) la trecerea de la un sistem de referință la altul, adică

$$(A, B) = \sum_j A_j B_j = \sum_j A'_j B'_j = (A', B'). \quad (3.7.11)$$

Un exemplu particular de produs scalar cvadridimensional îl oferă intervalul relativist  $ds$ . Ținînd cont de notațiile (3.7.1) se vede că

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = - \sum_{j=1}^4 dx_j^2 = - \sum_{j=1}^4 dx_j \cdot dx_j. \quad (3.7.12)$$

Din relația (3.7.11) rezultă

$$ds = ds' \quad (3.7.13)$$

adică tocmai invarianța intervalului relativist.

Un exemplu de cvadrivector îl oferă vitezele cvadridimensionale definite prin relațiile

$$u_j = \frac{dx_j}{ds}. \quad (3.7.14)$$

Ținînd cont de (3.7.13) și de (3.7.5) se vede că mărimile  $\{u_j\}_{j=1}^4$  se transformă după relațiile (3.7.8), adică ele formează într-adevăr un cvadrivector. Este ușor de văzut că cele 4 componente ale cvadrivectorului  $\{u_j\}_{j=1}^4$  sînt

$$\{u_j\}_{j=1}^4 = \left\{ \frac{\gamma}{c} v_x, \frac{\gamma}{c} v_y, \frac{\gamma}{c} v_z, i\gamma \right\} \quad (3.7.15)$$

unde  $v_x, v_y, v_z$  sînt componentele carteziane tridimensionale ale vitezei  $\mathbf{v}$  a particulei și mărimea  $\gamma$  este definită prin relația  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ .



Avînd în vedere (3.7.15) se poate vedea ușor că relațiile (3.7.8) aplicate cvadrivectorului  $\{u_j\}_{j=1}^4$  nu sînt altceva decît relațiile (3.5.9).

Luînd în considerare (3.7.15) se vede ușor că cvadrivectorul viteză  $\{u_j\}_{j=1}^4$  satisface relația

$$\sum_{j=1}^4 u_j^2 = \sum_{j=1}^4 u_j u_j = -1. \quad (3.7.16)$$

Cvadrivectorul accelerație este definit prin relațiile

$$w_j = \frac{du_j}{ds} = \frac{d^2 x_j}{ds^2}. \quad (3.7.17)$$

Ținînd cont de (3.7.13) și de (3.7.5) se vede ușor că și mărimile  $\{w_j\}_{j=1}^4$  se transformă după relațiile (3.7.8), adică ele formează un cvadrivector. Se poate vedea ușor că relațiile (3.7.8) aplicate cvadrivectorului  $\{w_j\}_{j=1}^4$  nu sînt altceva decît relațiile (3.5.12).

Derivînd relația (3.7.16) în raport cu  $s$  obținem

$$\sum_{j=1}^4 u_j \frac{du_j}{ds} = \sum_{j=1}^4 u_j w_j = 0. \quad (3.7.18)$$

Această relație exprimă faptul că cvadrivectorul viteză  $\{u_j\}_{j=1}^4$  și cvadrivectorul accelerație  $\{w_j\}_{j=1}^4$  sînt ortogonali, produsul lor scalar fiind nul.

Cu ajutorul cvadrivectorului viteză  $\{u_j\}_{j=1}^4$  se poate defini și cvadrivectorul impuls  $\{p_j\}_{j=1}^4$  prin relațiile

$$p_j = m_0 c u_j. \quad (3.7.19)$$

Ținînd cont de (3.7.15) se vede ușor că cele 4 componente  $\{p_j\}_{j=1}^4$  sînt date de relațiile

$$\{p_j\}_{j=1}^4 = \left\{ p_x, p_y, p_z, \frac{iE}{c} \right\} \quad (3.7.20)$$

unde  $p_x$ ,  $p_y$  și  $p_z$  sînt componentele vectorului impuls  $\mathbf{p}$  definit de (3.6.10), iar  $E$  este energia definită de (3.6.12).

Deoarece  $m_0$  și  $c$  sînt constante scalare și  $\{u_j\}_{j=1}^4$  formează un cvadrivector rezultă că și mărimile  $\{p_j\}_{j=1}^4$  formează un cvadrivector. În consecință, cvadrivectorul  $\{p_j\}_{j=1}^4$  se transformă de la un sistem de referință la altul după relațiile (3.7.8). Se poate vedea foarte ușor că relațiile (3.7.8) aplicate cvadrivectorului  $\{p_j\}_{j=1}^4$  nu sînt altceva decît relațiile (3.6.24).

Din relațiile (3.7.16) și (3.7.19) rezultă imediat relația

$$\sum_{j=1}^4 p_j p_j = -m_0^2 c^2. \quad (3.7.21)$$



Folosind pentru  $\{p_j\}_{j=1}^4$  expresiile (3.7.19) se poate vedea ușor că relația (3.7.21) este identică cu (3.6.16).

Cvadrivectorul forță  $\{G_j\}_{j=1}^4$  se definește prin următoarele ecuații cvadridimensionale de mișcare, în funcție de cvadrivectorul impuls

$$\frac{dp_j}{ds} = G_j. \quad (3.7.22)$$

Ținând cont că componentele tridimensionale ale forței  $\{F_\alpha\}_{\alpha=1}^3$  se definesc prin relațiile

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = F_\alpha \quad (3.7.23)$$

precum și de faptul că derivata în raport cu timpul a energiei este egală cu produsul scalar al forței cu viteza (vezi (1.2.27)), adică

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.7.24)$$

se vede ușor că componentele vectorului forță sînt

$$\{G_j\}_{j=1}^4 = \left\{ \frac{\gamma}{c} F_x, \frac{\gamma}{c} F_y, \frac{\gamma}{c} F_z, \frac{i\gamma}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right\}. \quad (3.7.25)$$

Desigur că din (3.7.22) rezultă că mărimile  $\{G_j\}_{j=1}^4$  alcătuiesc un cvadrivector ce se transformă de la un sistem de referință la altul după relațiile (3.7.8).

Să dăm și un exemplu de cvadritensor de ordinul doi. În mecanica clasică momentul cinetic al unei particule se definește prin relația  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , iar componentele lui sînt de forma  $x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). În dinamica relativistă putem atunci defini un cvadritensor moment cinetic prin relațiile

$$L_{jk} = x_j p_k - x_k p_j \quad (3.7.26)$$

unde  $\{x_j\}_{j=1}^4$  și  $\{p_k\}_{k=1}^4$  sînt cvadrivectorii coordonată (3.7.1) și impuls (3.7.19). Desigur că cvadritensorul moment cinetic  $\{L_{jk}\}_{j,k=1}^4$  se transformă de la un sistem de referință la altul cu ajutorul relațiilor (3.7.9).

Se vede ușor că cvadritensorul moment cinetic este antisimetric, adică satisface relațiile

$$L_{jk} = -L_{kj}. \quad (3.7.27)$$



## Elemente de termodinamică

## § 4.1. MIȘCAREA TERMICĂ ȘI SISTEME TERMODINAMICE

Corpurile macroscopice sînt alcătuite dintr-un număr foarte mare de particule microscopice constitutive (molecule, atomi, ioni, particule elementare). (De notat că despre un număr  $N$  se spune că este foarte mare dacă  $\ln N \gg 1$ . Ilustrativ menționăm că un mol de gaz ideal — care, de exemplu, în cazul oxigenului conține 0,032 kg de gaz — ocupă în condiții normale un volum de 0,0224 m<sup>3</sup> și conține  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  molecule). În interiorul corpurilor macroscopice particulele microscopice constitutive se află într-o continuă mișcare numită *mișcare termică*. Dacă respectiva mișcare termică influențează în mod semnificativ starea internă precum și proprietățile globale de ansamblu ale unui corp macroscopic se spune că respectivul corp are *proprietăți termodinamice*. Corpurile cu proprietăți termodinamice sînt numite și *sisteme termodinamice*.

Pentru studiul sistemelor termodinamice au fost elaborate *metoda termodinamică* și *metoda statistică*. Cele două metode, deși sînt distincte una de alta, nu se exclud reciproc ci, din contră, se susțin și completează între ele. Metoda termodinamică oferă o descriere macroscopică globală fără să se bazeze pe nici o reprezentare despre structura internă atomico-moleculară a sistemelor studiate. Metoda amintită are un caracter fenomenologic întrucît este „clădită” prin sistematizarea datelor experimentale și generalizarea și ridicarea la rang de principii (axiome) a unor concluzii ce se desprind din respectiva sistematizare. Metoda termodinamică „constată” (și „consemnează”) care sînt diferitele proprietăți ale sistemelor termodinamice, fără însă a oferi o explicație a respectivelor proprietăți.

Metoda statistică oferă o descriere a sistemelor termodinamice pornind de la anumite reprezentări și modele concrete referitoare la structura atomico-moleculară a respectivelor sisteme și referitoare la mișcarea micro-particulelor constitutive în interiorul sistemelor. Pe o astfel de bază metoda statistică caută (și reușește) să explice diferitele proprietăți ale sistemelor



termodinamice. Mai mult chiar, metoda statistică reușește să rezolve unele probleme principial nerezolvabile în limitele metodei termodinamice. Ca exemple de asemenea probleme pot fi citate stabilirea ecuațiilor de stare și calculul unor constante de material cum ar fi căldurile specifice, coeficienții de dilatare, coeficienți cinetici de transport etc. Mai trebuie adăugat că metoda statistică dă o fundamentare riguroasă metodei termodinamice și totodată stabilește limitele de aplicabilitate ale acesteia.

Ansamblul de probleme care sînt investigate cu ajutorul metodei termodinamice se constituie într-un capitol distinct al fizicii numit *termodinamică*. Problemele studiate cu ajutorul metodei statistice formează conținutul unui alt capitol al fizicii, numit *fizică statistică*. În practică, pentru studiul sistemelor termodinamice, cel mai adesea este nevoie de aportul conjugat al celor două metode de studiu menționate și, de aceea, cele două capitole amintite ale fizicii adesea sînt reunite sub titlul generic de *termodinamică statistică*.

Factorii macroscopici care caracterizează un sistem termodinamic și raporturile lui cu mediul ambiant (adică cu corpurile înconjurătoare) se numesc *parametri macroscopici*. Astfel de factori sînt presiunea ( $p$ ), volumul ( $V$ ) și temperatura (vezi § 4.2) pentru un gaz ideal sau lungimea ( $l$ ), aria secțiunii transversale ( $A$ ), forța de întindere ( $\mathcal{F}$ ), modulul de elasticitate ( $E$ ), temperatura pentru o bară elastică etc. Parametrii macroscopici, în raport cu un sistem termodinamic, pot fi *externi* și *interni*. Parametrii externi sînt determinați de poziția corpurilor exterioare (care nu intră în sistemul considerat) și se notează de obicei cu  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Exemple de parametri externi le oferă volumul unui sistem termodinamic sau un câmp de forțe care acționează asupra unui asemenea sistem. Această deoarece atît volumul cît și câmpul de forțe menționat depind de poziția corpurilor exterioare. Desigur că parametrii macroscopici externi  $a_i$  ai unui sistem termodinamic sînt funcții de poziția spațială (și deci de coordonatele) corpurilor exterioare care formează ambianța sistemului respectiv. Parametrii macroscopici interni ai unui sistem termodinamic, notați cu  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), sînt determinați de mișcarea globală de ansamblu a sistemului respectiv precum și de distribuția și mișcarea termică a microparticulelor constitutive ale sistemului. Ca exemplu de astfel de parametri pot fi citați densitatea, presiunea și energia, deoarece valoarea fiecăruia dintre acești parametri depind de distribuția și mișcarea microparticulelor în interiorul sistemului. Deoarece distribuția spațială și mișcarea microparticulelor constitutive ale unui sistem termodinamic depind de pozițiile și mișcările corpurilor exterioare rezultă că valorile parametrilor interni depind atît de mișcarea microparticulelor din sistem, cît și de valorile parametrilor externi.

De adăugat aici că parametrii macroscopici ce caracterizează un sistem termodinamic mai pot fi clasificați în *parametri intensivi* și *parametri extensivi* (sau aditivi). Cei intensivi (cum sînt, de exemplu, presiunea și temperatura) nu depind de masa sau numărul particulelor din sistem pe cînd cei extensivi (cum sînt, de exemplu, volumul, energia și entropia (pentru detalii vezi § 4.2)) sînt proporționali cu masa și numărul microparticulelor din sistem.



După cum am menționat mai sus, un sistem termodinamic este caracterizat printr-un număr de parametri macroscopici. Pentru un sistem termodinamic dat nu toți acești parametri sînt independenți unii de alții, ei putînd fi legați prin una sau mai multe relații matematice numite *ecuații de stare*. Astfel în cazul unui gaz există o legătură de forma  $f(p, V, T) = 0$  între presiunea  $p$ , volumul  $V$  și temperatura  $T$ . Forma analitică a ecuațiilor de stare nu poate fi stabilită teoretic prin metoda termodinamică și această metodă își extrage ecuațiile de stare din datele experimentale. În principiu stabilirea teoretică a formei analitice a ecuațiilor de stare rămîne o sarcină de rezolvat în cadrul metodei statistice. Dar rezolvarea respectivei sarcini ridică adesea dificultăți matematice considerabile și ea poate fi efectiv făcută relativ ușor doar pentru un număr restrîns de sisteme termodinamice simple.

Totalitatea parametrilor macroscopici, referitori la un sistem termodinamic, independenți între ei definesc (prin valorile lor) *starea termodinamică* (sau starea) sistemului considerat. În general, starea unui sistem termodinamic depinde de condițiile exterioare ale lui (condiții manifestate prin interacțiunile sistemului respectiv cu mediul său ambiant). Legat de această dependență un interes deosebit îl prezintă situațiile în care condițiile exterioare sînt constante în timp și omogene spațial (adică au aceleași valori în toate punctele suprafeței care delimitează sistemul termodinamic considerat). Experiența arată că în astfel de situații un sistem termodinamic trece întotdeauna în mod spontan (de la sine) într-o stare în care fiecare parametru macroscopic are aceeași valoare în toate părțile sistemului. În plus, o dată atinsă, o astfel de stare se menține de la sine o durată indefinit de lungă dacă nu sînt schimbate condițiile externe. O stare cu proprietățile menționate se numește *stare de echilibru termodinamic* (sau stare de echilibru).

În general, starea macroscopică a unui sistem termodinamic poate fi *staționară* (dacă nu se modifică în timp) sau *nestaționară* (dacă se modifică în timp). După cum am văzut mai sus un caz particular al stărilor staționare îl constituie stările de echilibru. De notat că există și stări staționare de neechilibru (care nu mai sînt stări de echilibru termodinamic). Într-o astfel de stare, spre deosebire de cazul stărilor de echilibru, cel puțin unul din parametrii macroscopici ce caracterizează sistemul nu mai are aceleași valori în toate părțile sistemului (un astfel de exemplu îl oferă starea unui gaz în care temperatura are diferite valori în diferite părți ale gazului). Modificarea în timp a stării macroscopice a unui sistem termodinamic se numește *proces termodinamic* (sau simplu proces). Procesul de trecere a unui sistem termodinamic dintr-o stare de neechilibru într-o stare de echilibru, în cazul cînd condițiile sale exterioare sînt constante în timp și omogene spațial, se numește *proces de relaxare*. Dintre procesele termodinamice un interes deosebit îl prezintă acelea care se desfășoară mult mai lent decît procesele de relaxare, astfel încît în orice moment starea sistemului să poată fi considerată drept o stare de echilibru. Asemenea procese se numesc *proces de echilibru* (sau cvasistatice). Ele pot parcurge o succesiune de stări atît în sens direct cît și în sens invers; de aceea se spune că respectivele procese sînt *reversibile*. Desigur că procesele de



echilibru nu sînt decît „o aproximație la limită” a proceselor termodinamice reale. Procesele reale fac sistemele termodinamice să evolueze în general prin stări de neechilibru și ele sînt de regulă ireversibile (în sensul că dacă parcurg o succesiune de stări într-un sens nu pot parcurge în sens invers respectiva succesiune de stări de la sine (fără să fie „forțate” din exterior)). Stările de echilibru și procesele de echilibru formează obiectul de studiu al *termodinamicii statistice de echilibru*, pe cînd studiul stărilor de neechilibru și a proceselor ireversibile formează obiectul de studiu al *termodinamicii statistice de neechilibru* (cunoscută și sub denumirile de *teoria proceselor ireversibile* sau *cinetică fizică*).

#### § 4.2. CONCEPTELE ȘI PRINCIPIILE TERMODINAMICII STĂRILOR ȘI PROCESELOR DE ECHILIBRU

După cum am menționat în paragraful precedent, proprietățile macroscopice ale sistemelor termodinamice sînt indisolubil legate de mișcarea termică a microparticulelor constituente, în interiorul lor. Dacă două sisteme termodinamice sînt aduse în contact, atunci microparticulele lor constituente vor interacționa, mijlocind astfel un schimb de energie (și eventual și de alte mărimi fizice) între cele două sisteme chiar și atunci cînd microparticulele nu trec dintr-un sistem în altul. Acest schimb de energie între microparticule poate genera, între cele două sisteme, un transfer de energie în cantități macroscopice (foarte mari în comparație cu energia unei microparticule). Se spune despre sistemul care cedează energie în acest mod că este mai *cald*, iar despre cel care primește energie că este mai *rece*. Experiența arată că transferul amintit de energie continuă pînă cînd ansamblul celor două corpuri atinge o stare finală (bine definită în raport cu stările inițiale și cu proprietățile sistemelor) în care fiecare sistem se află în echilibru termodinamic și transferul de energie încetează. Atunci se spune că cele două corpuri se află în *echilibru termic reciproc*. Tot experiența ne arată că echilibrul termic reciproc al sistemelor termodinamice este *tranzitiv* (adică dacă fiind date 3 sisteme termodinamice *A*, *B* și *C* și dacă *A* este în echilibru termic reciproc cu *B* și *B* și *C* sînt în echilibru termic reciproc, atunci și *A* și *C* sînt în echilibru termic reciproc).

Pentru caracterizarea cantitativă a gradului în care un corp este cald se folosește parametrul (mărimea) numit *temperatură*. Legat de precizarea proprietăților temperaturii se operează cu noțiunea de *termostat*. Prin termostat se înțelege un corp care conține un număr de microparticule constituente mult mai mare decît numărul microparticulelor din orice sistem termodinamic cu care el vine în contact astfel încît energia termostatului să rămînă practic constantă în decursul schimbărilor de energie între el și sistemele cu care este în contact. De aceea se admite că temperatura termostatului rămîne practic constantă în decursul respecti-



velor schimburi de energie și că ea se modifică numai odată cu modificarea energiei totale a termostatului.

Un sistem termodinamic aflat în contact cu un termostat poate avea mai multe stări macroscopice, diferite între ele (prin valorile unor parametri ca volum, presiune etc.), care toate sînt compatibile (corespund) cu aceeași stare de energie totală a termostatului. Astfel de stări macroscopice ale unui sistem termodinamic formează o *familie de stări izoterme*. Pentru o stare de altă energie totală a termostatului sistemul termodinamic aflat în contact cu termostatul va avea în general o altă familie de stări izoterme. Experiența arată că diferitele familii de stări izoterme ale aceluiași sistem termodinamic sînt disjuncte între ele (adică nu există stări ale sistemului care să aparțină la mai mult decît o familie). În plus, stările din aceeași familie formează o mulțime continuă, trecerea între ele putîndu-se face continuu prin procese izoterme. Pentru a ilustra cele afirmate mai sus să cităm în calitate de sistem termodinamic un gaz ideal. Pentru un astfel de sistem familiile de stări izoterme pot fi reprezentate în diagrama  $p - V$  prin puncte dispuse în lungul unor curbe continue numite *izoterme* (fig. 4.2.1).

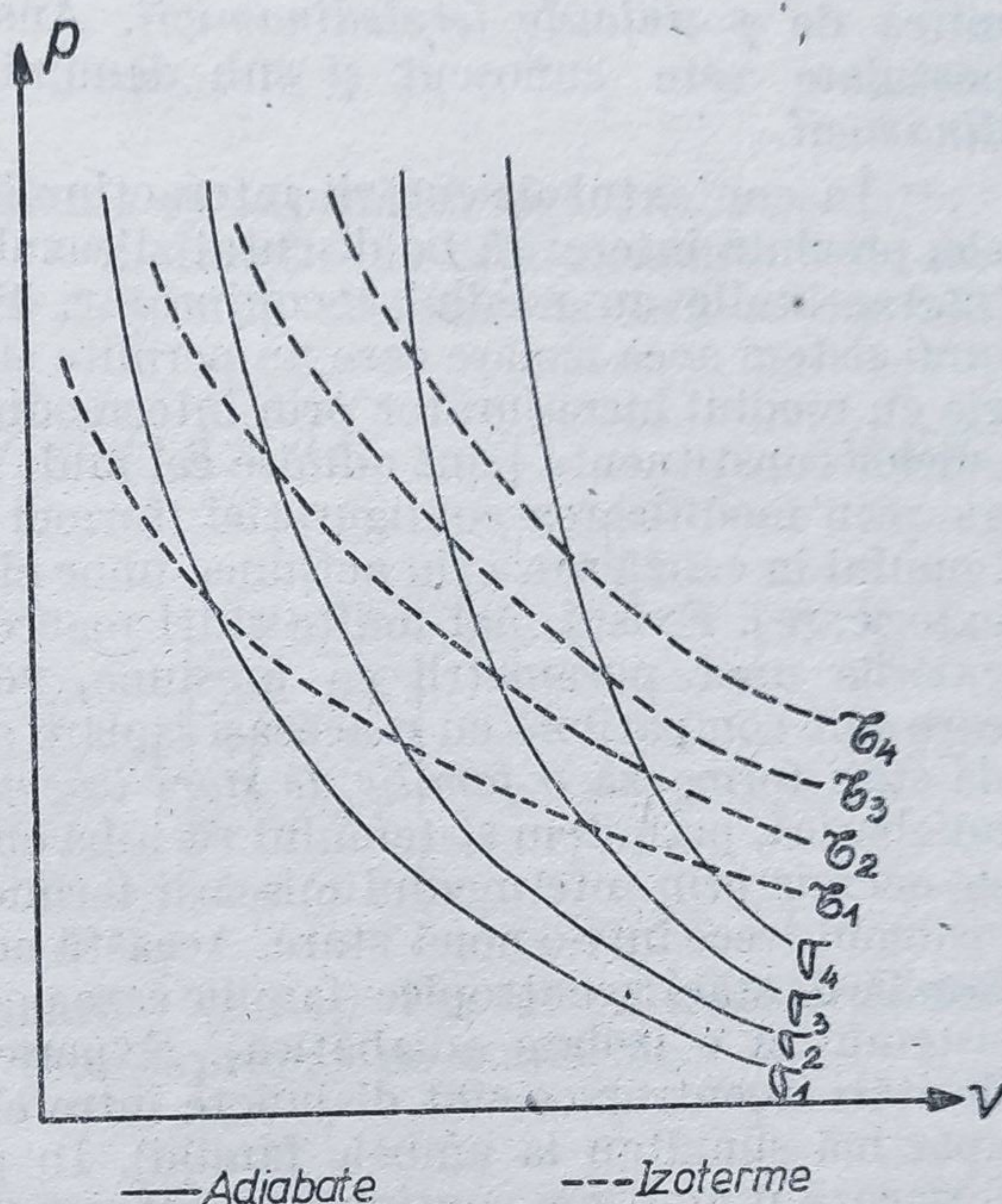


Fig. 4.2.1

Faptul că familiile de stări izoterme sînt disjuncte între ele este materializat în cazul exemplului citat prin faptul că curbele ce reprezintă (în diagrama  $p - V$ ) izotermele nu se intersectează între ele.

Proprietatea remarcabilă a familiilor de stări izoterme de a fi disjuncte între ele arată că putem defini o funcție univocă de stare  $\tau$ , numită *temperatură*, care se distinge prin proprietatea că are aceeași valoare pentru toate stările dintr-o familie de stări izoterme și își modifică valoarea prin trecerea de la o familie la alta. În particular, în cazul citat al unui gaz ideal aceasta înseamnă că izotermele pot fi indexate în mod univoc cu valorile  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  ale parametrului temperatură  $\tau$ .

Din caracterul univoc al temperaturii și din necesitatea unui sistem termodinamic pentru definirea ei rezultă următoarea consecință: o scară de temperatură  $\tau$  (definită cu ajutorul unui sistem termodinamic oarecare) este echivalentă cu o scară de temperatură  $\tau' = f_1(\tau)$  (definită cu ajutorul unui alt sistem termodinamic), unde  $f_1(\tau)$  este o funcție monotonă de  $\tau$ .



De notat că, după cum rezultă din cele discutate mai sus, în cadrul metodei termodinamice atât proprietatea de tranzitivitate a echilibrului termodinamic reciproc cât și proprietatea de existență a temperaturii ca funcție univocă de stare au caracter de postulat, ele fiind deduse prin sistematizarea și generalizarea datelor experimentale și neexistînd o demonstrație/justificare teoretică a lor. De aceea, cele două proprietăți poartă denumirea de *postulatele termodinamicii*. Ansamblul reunit al acestor două postulate este cunoscut și sub denumirea de *principiul zero al termodinamicii*.

În contextul discutării interacțiunii sistemelor termodinamice între ele, prezintă interes să fie discutat și cazul izolării unui sistem în raport cu interacțiunile cu mediul înconjurător. Se numește *izolare adiabatică* a unui sistem acea izolare care nu permite sistemului să facă schimb de energie cu mediul înconjurător prin intermediul mișcării termice a microparticulelor constitutive [sînt admise cel mult schimburi macroscopice de energie prin modificarea configurației (forme geometrice) macroscopice a sistemului în cauză sau prin acțiunea unor cîmpuri (electrice, magnetice etc.) exterioare]. Există mai multe stări macroscopice distincte între ele (prin valorile unor parametri ca presiune, volum etc.) ale aceluiași sistem, care sînt compatibile cu o aceeași izolare adiabatică. Mulțimea unor astfel de stări formează o *familie de stări izoentropice*. Dacă suprimăm izolarea adiabatică, permitem sistemului să aibă cu mediul înconjurător un schimb de energie prin intermediul mișcării termice. Ca urmare a acestui schimb sistemul trece într-o nouă stare. Această nouă stare face parte dintr-o altă familie de stări izoentropice (familie care poate fi obținută impunînd din nou sistemul la o izolare adiabatică). Experiența arată că cele două familii de stări izoentropice sînt disjuncte între ele (adică nu există stări care să aparțină simultan la ambele familii). În plus, stările din aceeași familie formează o mulțime continuă, trecerea între ele putîndu-se face continuu prin procese adiabatice (în decursul cărora sistemul rămîne izolat adiabetic). Pentru a ilustra cele afirmate mai sus să cităm din nou în calitate de sistem termodinamic un gaz ideal. Pentru un astfel de sistem familiile de stări izoentropice sînt reprezentate în diagrama  $p - V$  prin puncte dispuse în lungul unor curbe continue numite *adiabate* (vezi figura 4.2.1). Faptul că familiile de stări izoentropice sînt disjuncte între ele este materializat în cazul exemplului citat prin faptul că adiabatele nu se intersectează între ele.

Proprietatea remarcabilă a familiilor de stări izoentropice de a fi disjuncte între ele arată că putem defini o funcție univocă de stare numită *entropie*, care se remarcă prin proprietatea că are aceeași valoare pentru toate stările dintr-o familie de stări izoentropice și își modifică valoarea prin trecerea de la o familie de stări izoentropice la alta. În cazul exemplului unui gaz ideal rezultă că adiabatele pot fi indexate în mod univoc cu valorile  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  ale parametrului entropie. Din cele de mai sus rezultă, de asemenea, că dacă pentru caracterizarea, în sensul menționat, a familiilor de stări izoentropice folosim pentru entropie o scară  $\sigma$ , atunci, în mod echivalent, putem folosi și scara  $\sigma' = f_2(\sigma)$ , unde  $f_2(\sigma)$  este o funcție monotonă de  $\sigma$ .



Arbitraritatea în alegerea scării de evaluare a temperaturii  $\tau$  și a entropiei  $\sigma$  (manifestată prin echivalența scărilor  $\tau$  și  $\sigma$  cu scările  $\tau' = f_1(\tau)$  și  $\sigma' = f_2(\sigma)$ , unde  $f_1$  și  $f_2$  sînt funcții monotone) poate fi înlăturată în modul următor: pentru toate sistemele termodinamice avem o legătură între  $\tau$  și  $\sigma$  pe de o parte și  $p$  și  $V$  pe de altă parte, legătură exprimată prin relații de forma

$$p = p(\tau, \sigma), \quad V = V(\tau, \sigma), \quad (4.2.1)$$

Atunci, între altele, se pune problema să exprimăm legătura între „aria” elementară  $dp \, dV$  din planul  $p-V$  în funcție de aria elementară  $d\tau \, d\sigma$  din planul  $\tau - \sigma$ . Din matematică se știe că această legătură se exprimă prin relația

$$dp \, dV = J \cdot d\tau \cdot d\sigma \quad (4.2.2)$$

unde

$$J = \frac{\partial(p, V)}{\partial(\tau, \sigma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \tau} & \frac{\partial p}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} & \frac{\partial V}{\partial \sigma} \end{vmatrix} \quad (4.2.3)$$

se numește jacobianul transformărilor (4.2.1). Faptul că transformările (legăturile) (4.2.1) sînt univoco este exprimat de condițiile

$$J \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{1}{J} \neq 0. \quad (4.2.4)$$

Se poate conveni să se aleagă scările parametrilor  $\tau$  și  $\sigma$  astfel ca jacobianul  $J$  să fie egal cu unitatea ( $J = 1$ ). O asemenea calibrare a scărilor lui  $\tau$  și  $\sigma$ , notată cu  $\tau = T$  și  $\sigma = S$ , ne definește *temperatura absolută* ( $T$ ) și *entropia absolută* ( $S$ ) prin relația

$$\frac{\partial(p, V)}{\partial(T, S)} = 1. \quad (4.2.5)$$

De notat că există și sisteme termodinamice pentru care o asemenea calibrare a scărilor temperaturii și entropiei nu este posibilă în toate punctele planului  $p - V$ .

Să analizăm acum problema modificării energiei interne a sistemelor termodinamice. Prin energie internă a unui sistem termodinamic înțelegem energia lui totală dacă facem abstracție de energiile cinetică și potențială (în cîmpuri externe) ale sistemului privit ca un tot (întrucît respectivele energii (de care facem abstracție) de fapt nu joacă nici un rol în procesele



termodinamice). Vom nota cu  $U$  energia internă a unui sistem termodinamic definită în sensul menționat mai sus. Energia internă a unui sistem termodinamic include energiile tuturor formelor de mișcare și de interacțiune reciprocă a microparticulelor constitutive ale sistemului.

Deoarece energia internă  $U$  este un parametru intern, la echilibru termodinamic ea depinde de parametrii externi  $a_i$  și de temperatura  $T$ , adică

$$U = U(a_1, a_2, \dots, a_n, T). \quad (4.2.6)$$

La sistemele termodinamice obișnuite, pe care de regulă le întâlnim în natură, creșterea nelimitată a lui  $T$  este însoțită de o creștere de asemenea nelimitată a lui  $U$ . Această dependență a lui  $U$  de  $T$  se datorește faptului că în sistemele termodinamice obișnuite fiecare dintre microparticulele constitutive pot avea o energie oricât de mare. Există însă sisteme termodinamice „neobișnuite”, în care microparticulele constitutive pot avea, fiecare dintre ele, o energie limitată superior de o valoare maximă finită. La astfel de sisteme odată cu creșterea nelimitată a lui  $T$  energia internă  $U$  tinde către o anumită valoare limită finită.

Un sistem termodinamic interacționând cu corpurile din mediul înconjurător realizează cu acestea un schimb de energie în urma căruia energia internă  $U$  a sistemului suferă o variație. Variația lui  $U$  se poate produce în următoarele două moduri :

— prin modificarea parametrilor externi ai sistemului, dacă sistemul este izolat adiabatic (și deci nu poate schimba energie cu mediul prin intermediul mișcării termice);

— prin intermediul mișcării termice și fără modificarea parametrilor externi (cînd aceștia din urmă sînt menținuți constanți).

Primul tip de variație a lui  $U$  se numește *lucru mecanic*, iar al doilea *schimb de căldură*. În conformitate cu cele spuse mai sus, dacă energia internă  $U$  a unui sistem termodinamic suferă o variație infinitezimală  $dU$  (ca urmare a unei modificări infinitezimale a stării macroscopice a sistemului) respectiva variație poate fi scrisă în general sub forma

$$dU = \delta \mathcal{A} + \delta Q \quad (4.2.7)$$

Aici  $\delta \mathcal{A}$  este lucrul mecanic elementar efectuat asupra sistemului de corpurile înconjurătoare, iar  $\delta Q$  este cantitatea de căldură elementară primită ( $\delta Q > 0$ ) sau cedată ( $\delta Q < 0$ ) de sistem în decursul procesului reprezentat de modificarea infinitezimală a stării. De notat că deoarece  $U$  este o funcție de stare (vezi și (4.2.6))  $dU$  este o diferențială totală exactă. Aceasta înseamnă că  $dU$  depinde numai de stările (inițială și finală) între care se face modificarea stării sistemului și nu depinde de „traseul” urmat de respectiva modificare (adică nu depinde de succesiunea de stări prin care trece sistemul între starea inițială și cea finală). Mărimile  $\delta \mathcal{A}$  și  $\delta Q$  nu sînt diferențiale totale exacte întrucît atît lucrul  $\delta \mathcal{A}$  cît și cantitatea de căldură



$\delta Q$  depind de „traseul” urmat de sistem, adică depind de succesiunea de stări prin care trece sistemul între starea inițială și cea finală.

Afirmațiile menționate mai sus referitoare la variația energiei interne — inclusiv exprimarea lor cantitativă sub forma relației (4.2.7) — sînt cunoscute sub denumirea de *primul principiu al termodinamicii*.

Conceptul de lucru mecanic este preluat în termodinamică din mecanică (vezi § 1.2). În sensul mecanicii, o forță elementară  $d\mathbf{F}$ , care, acționînd asupra unui corp, își deplasează punctul de aplicație cu  $d\mathbf{r}$  efectuează asupra corpului respectiv, un lucru elementar  $\delta \mathcal{A}$  dat de relația

$$\delta \mathcal{A} = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.2.8)$$

În cazul unui fluid ideal dacă forța  $d\mathbf{F}$  acționează asupra elementului de arie  $dA$  ea poate fi scrisă sub forma (vezi § 2.3)

$$d\mathbf{F} = -pdA \quad (4.2.9)$$

unde  $p$  este presiunea în fluid și  $d\mathbf{A} = n dA$ ,  $n$  fiind normală la suprafața pe care acționează  $d\mathbf{F}$ . Avînd în vedere că

$$d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = dV \quad (4.2.10)$$

unde  $dV$  reprezintă variația volumului fluidului din (4.2.8) și (4.2.9) rezultă că în cazul unui fluid lucrul elementar  $\delta \mathcal{A}$  se scrie sub forma

$$\delta \mathcal{A} = -pdV. \quad (4.2.11)$$

Această relație este aplicabilă în particular și gazelor ideale. Se vede deci că în cazul menționat lucrul mecanic  $\delta \mathcal{A}$  este legat de schimbarea unui singur parametru extern al sistemului și anume a volumului. În general la variația infinit mică  $da$  a parametrului extern  $a$  lucrul mecanic elementar  $\delta \mathcal{A}$  efectuat asupra sistemului se scrie sub forma

$$\delta \mathcal{A} = \mathcal{A} da \quad (4.2.12)$$

unde  $\mathcal{A}$  reprezintă forța generalizată conjugată cu parametrul extern  $a$ . Ca exemple ale relației (4.2.12) (în afară de exemplul oferit de (4.2.11)) mai pot fi citate următoarele: lucrul mecanic al forțelor de tensiune superficială cînd  $a$  reprezintă  $A$  — aria suprafeței lichidului și  $\mathcal{A}$  reprezintă  $\sigma$  — coeficientul de tensiune superficială; lucrul mecanic de deformare elastică cînd  $a$  reprezintă  $l$  — lungimea unei bare elastice și  $\mathcal{A}$  reprezintă  $\mathcal{F}$  — forța de deformare elastică; lucrul de polarizare al unui dielectric cînd  $a$  reprezintă  $\mathbf{D}$  — inducția electrică și  $\mathcal{A}$  reprezintă  $\mathbf{E}$  — intensitatea cîmpului electric; lucrul de magnetizare al unei substanțe magnetice cînd  $a$  reprezintă  $\mathbf{B}$  — inducția magnetică și  $\mathcal{A}$  reprezintă  $\mathbf{H}$  — intensitatea cîmpului magnetic).



Cantitatea de căldură elementară  $\delta Q$  este legată de schimbul de energie între sistem și corpurile înconjurătoare prin intermediul mișcării termice. Un astfel de schimb de energie este posibil numai dacă sistemul nu este izolat adiabatic și deci el este însoțit de o modificare a stării sistemului. Dacă modificarea stării este infinitezimală și se face printr-un proces cvasistatic, atunci desigur că  $\delta Q$  este proporțional cu modificarea  $dS$  a entropiei. Mai mult chiar, în etalonarea dată de (4.2.5) pentru temperatură și entropie, relația respectivă de proporționalitate se scrie

$$\delta Q = TdS. \quad (4.2.13)$$

Existența entropiei  $S$  ca funcție de stare împreună cu relația (4.2.13) exprimă conținutul *principiului al doilea al termodinamicii* pentru procese cvasistatice.

Introducând (4.2.11) și (4.2.13) în (4.2.7) se vede ușor că pentru un fluid ideal, al cărui unic parametru extern este volumul variația elementară  $dU$  a energiei sale interne este dată de relația

$$dU = TdS - pdV. \quad (4.2.14)$$

Din (4.2.13) se vede că pentru un proces cvasistatic infinitezimal modificarea  $dS$  a entropiei se poate scrie sub forma

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.2.15)$$

Deoarece  $S$  este o funcție de stare,  $dS$  este o diferențială totală exactă. Atunci (4.2.15) arată că, în cazul proceselor cvasistatice, inversul temperaturii este un factor integrant pentru cantitatea elementară de căldură  $\delta Q$ .

De notat că dacă starea sistemului se schimbă prin procese nestatice atunci cantitatea de căldură elementară  $\delta Q_{nest}$  primită de sistem nu mai este proporțională cu modificarea infinitezimală  $dS$  a entropiei. În astfel de situații are loc relația

$$dS > \frac{\delta Q_{nest}}{T}. \quad (4.2.16)$$

Această relație arată că dacă sistemul suferă un proces nestatic adiabatic (adică  $\delta Q_{nest} = 0$ ) într-un astfel de proces entropia sistemului crește deoarece

$$dS > 0. \quad (4.2.17)$$

Acest fapt reprezintă *legea creșterii entropiei* și exprimă cel de al doilea principiu al termodinamicii pentru procese nestatice.



Ținând cont de (4.2.16) se vede ușor că în cazul proceselor nestatice în locul relației (4.2.14) avem relația

$$dU < TdS - pdV. \quad (4.2.18)$$

Din (4.2.17) se poate trage o concluzie importantă privitoare la sensul în care are loc transferul de căldură între două corpuri cu temperaturi diferite, aduse în contact termic. Fie două corpuri cu temperaturile  $T_1$  și  $T_2$ , aduse în contact termic și ansamblul lor izolat adiabatic de exterior și  $\delta Q$  cantitatea de căldură cedată de corpul 1 corpului 2. Schimbul de căldură duce la stabilirea echilibrului și pentru ansamblul celor două sisteme este un proces ireversibil, pentru fiecare sistem în parte putînd fi un proces reversibil. Atunci din (4.2.17) și (4.2.15) se poate scrie

$$dS = dS_1 + dS_2 = -\frac{\delta Q}{T_1} + \frac{\delta Q}{T_2} = \delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0. \quad (4.2.19)$$

Această relație arată că dacă  $\delta Q > 0$  trebuie să avem  $T_1 > T_2$ , ceea ce înseamnă că spontan (în mod natural) căldura trece de la corpul cu temperatură mai mare la corpul cu temperatură mai mică.

În încheierea acestui paragraf să menționăm și care este comportarea entropiei  $S$  cînd temperatura  $T$  tinde spre zero. Din (4.2.15) se observă că se pot scrie relațiile

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}, \quad S_T = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} + S_0. \quad (4.2.20)$$

Generalizînd datele obținute din experiență Nernst a stabilit că are loc relația

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = \lim_{T \rightarrow 0} (S_2 - S_1) = 0. \quad (4.2.21)$$

Această relație arată că pentru  $T \rightarrow 0$  entropia încetează să mai fie o funcție de stare (deoarece ea nu se mai modifică prin trecerea de la o stare 1 la o stare 2). Planck, plecînd de la faptul că, în viziunea clasică, la  $T \rightarrow 0$  mișcarea termică încetează, a suplimentat relația (4.2.20) cu condiția

$$S_0 = \lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (4.2.22)$$

Ansamblul relațiilor (4.2.21) și (4.2.22) exprimă cel de al treilea principiu al termodinamicii.



### § 4.3. ECUAȚII DE STARE, FUNCȚII TERMODINAMICE ȘI COEFICIENȚI TERMODINAMICI

La echilibru starea macroscopică a unui sistem termodinamic este complet definită de parametrii externi ai sistemului și de temperatură. Dar aceasta înseamnă că la echilibru parametrii interni  $\{b_k\}_{k=1}^n$  ai unui sistem termodinamic sînt funcții de parametrii săi externi  $\{a_i\}_{i=1}^n$  și de temperatura  $T$ , adică

$$b_k = b_k(a_1, a_2, \dots, a_n, T). \quad (4.3.1)$$

Dacă parametrul intern este energia internă  $U(b_k = U)$ , atunci (4.3.1) se particularizează în relația

$$U = U(a_1, a_2, \dots, a_n, T) \quad (4.3.2)$$

numită și *ecuația energiei* sau *ecuația calorică de stare*. Dacă parametrul intern  $b_k$  este forța generalizată  $\mathcal{A}_i(b_k = \mathcal{A}_i)$  conjugată cu parametrul extern  $a_i$  (vezi comentariile în legătură cu (4.2.12)), atunci relațiile (4.3.1) se transcriu în relațiile

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, T) \quad (4.3.4)$$

numite și *relații termice de stare*.

Numărul ecuațiilor (4.3.2)–(4.3.4) este determinat de numărul de grade de libertate macroscopice independente ale sistemului. După cum reiese din principiul al doilea al termodinamicii exprimat prin relația (4.2.14) (sau mai general prin relațiile (4.2.7), (4.2.12) și (4.2.13)), ecuațiile (4.3.2)–(4.3.4) nu sînt independente între ele, ci sînt legate prin ecuații diferențiale cu derivate parțiale (unele dintre aceste ecuații diferențiale vor fi discutate mai jos).

Modalitățile de variație a parametrilor externi  $a_i$  sau a forțelor generalizate  $\mathcal{A}_i$  atunci cînd variază temperatura definesc *proprietățile termice* ale unui sistem termodinamic. Felul cum se modifică energia internă  $U$  a unui sistem termodinamic atunci cînd se modifică temperatura sau parametrii externi determină *proprietățile calorice* ale sistemului respectiv. Pentru caracterizarea cantitativă a proprietăților calorice ale unui sistem se folosesc capacitățile calorice și căldurile latente.

*Capacitatea calorică*  $C$  se definește prin raportul între cantitatea de căldură  $\delta Q$  primită de sistem și variația de temperatură  $dT$  cauzată de căldura respectivă, adică prin relația

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (4.3.5)$$



Deoarece  $\delta Q$  depinde de „traseul” (succesiunea de stări) procesului urmat de sistem rezultă că și  $C$  depinde de „traseul” procesului respectiv. De aceea se vorbește de mai multe tipuri de capacități calorice, de exemplu, de capacități calorice la volum constant ( $C_V$ ) și la presiune constantă ( $C_p$ ), definite prin relația

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V, \quad C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p. \quad (4.3.6)$$

Căldura latentă  $l_a$  asociată parametrului extern  $a$  se definește ca raportul între căldura  $\delta Q$  primită de sistem și variația  $da$  a parametrului extern cauzată de căldura respectivă, dacă temperatura sistemului este menținută constantă. Din (4.2.7), (4.2.12) și (4.3.2) se poate scrie

$$\delta Q = dU - \delta \mathcal{A} = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_a dT + \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)_T da - \mathcal{A} da. \quad (4.3.7)$$

De aici rezultă pentru căldura latentă expresia

$$l_a = \left( \frac{\delta Q}{da} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T - \mathcal{A}. \quad (4.3.8)$$

În continuare ne vom referi la un sistem termodinamic simplu caracterizat printr-un singur parametru extern și anume prin volumul  $V$ . Atunci  $a = V$  și  $\mathcal{A} = -p$  și ecuația calorică (4.3.2) devine

$$U = U(V, T) \quad (4.3.9)$$

iar ecuația termică (4.3.4) capătă forma

$$p = p(V, T). \quad (4.3.10)$$

Forma analitică a ecuațiilor (4.3.9) și (4.3.10) (și mai general a ecuațiilor (4.3.2) și (4.3.4)) nu poate fi stabilită pe cale teoretică în limitele termodinamicii. Acest lucru este posibil numai în cadrul fizicii statistice (vezi capitolul următor). În cadrul termodinamicii ecuațiile (4.3.9) și (4.3.10) (și generalizările lor (4.3.2) și (4.3.4)) se stabilesc pe baza generalizării datelor experimentale și pe baza legăturii între ecuația termică (4.3.10) și cea calorică (4.3.9). Astfel, pentru un sistem simplu entropia  $S$  fiind de asemenea o funcție de stare se poate scrie

$$S = S(V, T). \quad (4.3.11)$$

Din (4.3.9) și (4.3.11) se poate scrie

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV; \quad dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV. \quad (4.3.12)$$



Introducând aceste expresii în (4.2.14) se obține

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right] dV. \quad (4.3.13)$$

Această relație, deoarece  $T$  și  $V$  sînt variabile independente, implică relațiile.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right]. \quad (4.3.14)$$

Introducând aceste expresii în relația

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right) \quad (4.3.15)$$

se obține relația

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p. \quad (4.3.16)$$

Pentru un gaz ideal, din experiență se stabilește că ecuația termică (4.3.10) are expresia

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (4.3.17)$$

unde  $n$  este numărul de moli și  $R$  este constanta molară a gazelor. Introducând (4.3.17) în (4.3.16) se obține că pentru un gaz ideal este satisfăcută relația

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \quad (4.3.18)$$

cunoscută sub denumirea de *legea lui Joule*. Cu această relație introdusă în (4.3.12) și ținînd cont de (4.2.13), (4.2.14) și (4.3.6) obținem că pentru un gaz ideal avem

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_T dT = C_V dT. \quad (4.3.19)$$

Experiența arată, de asemenea, că în condiții obișnuite la gazele ideale  $C_V = \text{const.}$  Atunci din (4.3.19) obținem următoarea ecuație calorică de stare

$$U = \int_{T_0}^T C_V dT + U_0 = C_V T + U_0. \quad (4.3.20)$$



Ecuatiile termice de stare, ecuația calorică precum și proprietățile termice și calorice ale sistemelor termodinamice pot fi obținute și cu ajutorul așa-numitor *funcții* (sau *potențiale*) termodinamice. Pentru a explicita această afirmație să ne referim tot la un sistem termodinamic simplu. Pentru un astfel de sistem avem cinci parametrii macroscopici de stare:  $T$ ,  $S$ ,  $U$ ,  $p$  și  $V$ . Ecuatia (4.2.14), numită și ecuația fundamentală a termodinamicii, stabilește o legătură între cele cinci funcții. Pe de altă parte, starea macroscopică a unui sistem termodinamic este definită complet doar prin două funcții independente. Dacă cele două funcții independente se aleg a fi  $T$  și  $V$ , atunci, după cum am văzut mai sus, proprietățile sistemului sînt complet definite de relațiile (4.2.14), (4.3.9) și (4.3.10).

În acest caz din (4.2.14) se poate scrie relația

$$dF = -SdT - pdV \quad (4.3.21)$$

unde mărimea

$$F = U - TS \quad (4.3.24)$$

se numește *energie liberă*. Ținînd cont de faptul că  $F = F(T, V)$  și de (4.3.21) se poate scrie

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T dV = -SdT - pdV \quad (4.3.25)$$

de unde rezultă

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (4.3.26)$$

Ținînd cont de (4.3.24) și (4.3.26) se găsește pentru căldura specifică la volum constant  $C_V$  următoarele expresii

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V + S + T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \quad (4.3.27)$$

Relațiile (4.3.26) și (4.3.27) arată că dacă pentru un sistem se cunoaște  $F = F(T, V)$  atunci se pot calcula mărimile  $S$ ,  $p$  și  $C_V$  pentru sistemul respectiv.

Dacă se iau ca variabile independente  $S$  și  $V$  și se ia  $U = U(S, V)$  atunci din (4.2.14), prin cîteva calcule simple, se obțin relațiile

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S, \quad C_V = T \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right)_V \right]^{-1} \quad (4.3.28)$$

Aceste relații arată că din funcția  $U = U(S, V)$  se pot calcula mărimile  $T$ ,  $p$  și  $C_V$ , care caracterizează sistemul.



Definind *entalpia*  $H = H(S, p)$  prin relația

$$H = U + pV \quad (4.3.29)$$

din (4.2.14) se obține

$$dH = TdS + Vdp. \quad (4.3.30)$$

De aici, prin câteva calcule simple, rezultă

$$T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_s, \quad C_p = T \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} \right)_p \right]^{-1}. \quad (4.3.31)$$

Aceste relații arată că din funcția  $H = H(S, p)$  se pot calcula mărimile  $T$ ,  $V$  și  $C_p$ .

Dacă se definește *potențialul Gibbs*  $G = G(T, p)$  prin relația

$$G = H - TS \quad (4.3.32)$$

din (4.3.30) rezultă

$$dG = -SdT + Vdp. \quad (4.3.33)$$

Prin câteva calcule simple de aici se obține

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T, \quad C_p = - T \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p \quad (4.3.34)$$

Aceste relații arată că din funcția  $G = G(T, p)$  pot fi calculate mărimile  $S$ ,  $V$  și  $C_p$ .

În concluzie, se poate spune deci că dacă se cunosc una din funcțiile: energie internă ( $U$ ), energie liberă ( $F$ ), entalpie ( $H$ ) sau potențial Gibbs ( $G$ ) se pot calcula — via relațiile (4.3.21) — (4.3.34) — mărimi termodinamice care caracterizează starea sistemului. În această posibilitate rezidă utilitatea funcțiilor respective pentru studiul sistemelor termodinamice.

În termodinamică în afară de capacitățile calorice  $C_p$  și  $C_v$  și de căldurile latente  $l_a$  se mai folosesc și alți *coeficienți termodinamici* definiți prin relații de forma

$$\left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)_Z \quad (4.3.35)$$

unde  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  semnifică una din mărimile  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $S$ . Astfel de coeficienți sînt:

— *coeficienții de dilatare* (izobar respectiv adiabetic)

$$\gamma_p = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \gamma_s = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_s; \quad (4.3.36)$$



— coeficienții de compresibilitate (izoterm respectiv adiabatic)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S; \quad (4.3.37)$$

— coeficienții termici ai presiunii (izocor respectiv adiabatic)

$$\beta_V = -\frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \beta_S = -\frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_S. \quad (4.3.38)$$

De notat că deoarece între mărimile  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $S$  și funcțiile termodinamice  $U$ ,  $F$ ,  $H$  și  $G$  menționate mai sus există întotdeauna anumite relații de legătură (vezi mai sus) coeficienții termodinamici (4.3.36)–(4.3.38) și capacitățile calorice  $C_p$  și  $C_V$  nu sînt independente între ele. Se poate demonstra (lăsăm calculele în seama cititorului interesat) că, pentru orice sistem termodinamic, între coeficienții menționați există următoarele relații de legătură

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_S}{\kappa_T}, \quad C_V = \frac{TV\gamma_p^2\kappa_S}{(\kappa_T - \kappa_S)\kappa_T}, \quad C_p = \frac{TV\gamma_p^2}{\kappa_T - \kappa_S}. \quad (4.3.39)$$

Aceste relații pot fi utile în practică pentru calculul unor coeficienți în funcție de valorile altora.

#### § 4.4. TERMODINAMICA SISTEMELOR CU CANTITATE VARIABILĂ DE SUBSTANȚĂ

În paragrafele precedente ne-am referit la sisteme termodinamice a căror cantitate de substanță rămînea constantă în decursul proceselor analizate. Prezintă, însă, interes și cazul sistemelor termodinamice a căror cantitate de substanță variază în decursul proceselor la care ele participă. Ca exemple pot fi citate sistemele termodinamice în care se petrec anumite reacții chimice (în acest caz cantitatea de substanță de o anumită specie este variabilă) sau sistemele în care se produc tranziții de fază (cum ar fi vaporizarea, condensarea, sublimarea sau trecerea dintr-o formă de cristalizare în alta — cînd se modifică cantitatea de substanță a uneia din faze).

Evident că energia internă  $U$  a unui sistem cu cantitate variabilă de substanță depinde nu numai de volumul  $V$  și entropia  $S$  (în sensul discutat în paragraful precedent), ci și de cantitatea de substanță, pe care o putem caracteriza de exemplu prin numărul de moli  $n$  sau prin numărul



de particule  $N$  (ne referim aici, deocamdată, la cazul unui sistem cu o singură specie (tip) de substanță). Aceasta înseamnă că o modificare infinitesimală  $dn$  a cantității de substanță implică o modificare infinitesimală  $dU_{(dn)}$ , a energiei interne. Cauza apariției variației  $dU_{(dn)}$  fiind exclusiv variația  $dn$  și ambele aceste variații fiind infinitesimale trebuie ca ele să fie proporționale, adică

$$dU_{(dn)} = \mu dn. \quad (4.4.1)$$

Dacă sistemul, pe lângă variația  $dn$  a cantității de substanță, mai suferă și o variație  $dV$  a volumului și o variație  $dS$  a entropiei, atunci, ținând cont de cele discutate în paragrafele precedente, se vede ușor că variația  $dU$  a energiei interne se scrie sub forma

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \quad (4.4.2)$$

unde de data aceasta  $U = U(S, V, n)$ . Mărimea  $\mu$  definită de relațiile (4.4.1) și (4.4.2) se numește *potențial chimic*. Din (4.4.2) se vede că  $\mu$  se poate defini ca derivata parțială a energiei interne în raport cu numărul de moli  $n$  când  $S$  și  $V$  sînt constante, adică

$$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S,V} \quad (4.4.3)$$

Cele discutate mai sus relevă faptul că energia internă a unui sistem termodinamic depinde de cantitatea de substanță din sistem. În general, însă, nu numai energia internă ci și alte mărimi ce caracterizează starea unui sistem termodinamic pot să depindă de cantitatea de substanță (adică de numărul de moli  $n$ ). În raport cu această dependență mărimile termodinamice se împart în *extensive* (sau aditive) și *intensive*. Din clasa mărimilor extensive fac parte acele mărimi cum sînt volumul  $V$  al substanței și energia internă  $U$  a ei pentru care avem

$$V = n\tilde{V}, \quad U = n\tilde{U} \quad (4.4.4)$$

unde  $\tilde{V}$  și  $\tilde{U}$  sînt volumul respectiv energia internă a unui mol de substanță. Deci mărimile extensive cresc proporțional cu  $n$  odată cu modificarea cantității de substanță. Mărimile intensive (cum sînt de exemplu temperatura  $T$  și presiunea  $p$ ) nu se modifică la schimbarea cantității de substanță. Datorită relației  $dS = \delta Q/T$  și faptului că  $\delta Q$  fiind energie este extensivă, rezultă că și entropia  $S$  este o mărime extensivă. Aceasta arată că entropia unui sistem aflat în echilibru este egală cu suma entropiilor părților componente ale sistemului și deci se poate scrie

$$S = n\tilde{S} \quad (4.4.5)$$

unde  $\tilde{S}$  reprezintă entropia unui mol de substanță.



Să facem acum câteva observații legate de relația (4.4.2). Avînd în vedere că  $U = U(S, V, n)$ , rezultă că pentru ca membrul drept din (4.4.2) să reprezinte o diferențială totală exactă trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,n} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,n}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,n}, \quad -\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,n}. \quad (4.4.6)$$

Din expresia (4.3.2) a variației energiei interne  $U$  se pot obține variațiile energiei libere  $F$ , a entalpiei  $H$  și a potențialului Gibbs  $G$ , pentru un sistem termodinamic cu cantitate variabilă de substanță. Variațiile respective se exprimă prin relațiile

$$\begin{aligned} dF &= d(U - TS) = -SdT - pdV + \mu dn \\ dH &= d(U + pV) = TdS + Vdp + \mu dn \\ dG &= d(U - TS + pV) = -SdT + Vdp + \mu dn. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Din relațiile (4.4.2) și (4.4.7) se vede că potențialul chimic  $\mu$  poate fi dat prin una din următoarele expresii

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{S,p} = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p}. \quad (4.4.8)$$

Din relațiile (4.4.2) și (4.4.7) se vede că mărimile termodinamice  $U, F, H$  și  $G$  sînt funcții de variabilele  $S, V, n, T, p$  și se pot scrie în funcție de mărimile molare corespunzătoare  $\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{H}$  și  $\tilde{G}$  după cum urmează

$$\begin{aligned} U &= U(S, V, n) = n\tilde{U}\left(\frac{S}{n}, \frac{V}{n}\right) = n\tilde{U}(\tilde{S}, \tilde{V}) \\ F &= F(T, V, n) = n\tilde{F}\left(T, \frac{V}{n}\right) = n\tilde{F}(T, \tilde{V}) \\ G &= G(T, p, n) = n\tilde{G}(T, p). \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Din (4.4.8) și (4.4.9) se vede că potențialul chimic  $\mu$  poate fi scris sub forma

$$\mu = \mu(T, p) = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,p} = \tilde{G}(T, p). \quad (4.3.10)$$



Această relație arată că potențialul chimic este tocmai potențialul termodinamic Gibbs referitor la un mol de substanță.

De notat că dacă într-un sistem termodinamic sînt prezente mai multe specii de substanță caracterizate prin numerele de moli  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) atunci în relațiile (4.4.1), (4.4.2) și (4.4.7) în loc de termenul  $\mu dn$  trebuie să se ia un termen de forma  $\sum_i \mu_i dn_i$ , în care  $\mu_i$  are semnificația de potențial chimic al substanței de specie „ $i$ ”. De adăugat că între diferitele specii de substanțe pot să decurgă schimburi de substanță (prin reacții chimice sau prin transformări de fază) care duc la trecerea substanței de la o specie la alta.

*Observație.* Adesea în tratatele de termodinamică referitor la sistemele cu cantitate variabilă de substanță se operează cu numărul de molecule  $N$  și nu cu numărul de moli  $n$ . Într-o astfel de abordare relațiile (4.4.1)–(4.4.10) se transcriu cu  $N$  în loc de  $n$  deosebirea fiind marcată de faptul că potențialul chimic are atunci semnificația de potențial Gibbs raportat la o moleculă (nu la un mol de substanță cum s-a discutat mai sus).

## § 4.5. TERMODINAMICA CORPURILOR ELASTICE

Este știut că solidele reale supuse acțiunii unor forțe mecanice suferă deformări. Dacă deformările respective dispar cînd acțiunea forței încetează se spune că corpul este *elastic* (respectiv că deformările au fost elastice). Deoarece însă corpurile elastice sînt alcătuite și ele din microparticule (atomi, molecule) este evident că și în astfel de corpuri este prezentă o mișcare termică. Dacă respectiva mișcare termică afectează esențial proprietățile macroscopice ale corpurilor elastice acestea se comportă ca și sisteme termodinamice. În acest paragraf vom prezenta unele considerații referitoare la astfel de sisteme.

Pentru simplitate ne vom referi la o bară elastică de lungime  $l$  care manifestă și proprietăți termodinamice. Lucrul elementar  $\delta \mathcal{A}_{\text{elast}}$  pentru a alungi bara cu  $dl$  este de forma

$$d\mathcal{A}_{\text{elast}} = \mathcal{F} dl \quad (4.5.1)$$

unde  $\mathcal{F}$  reprezintă forța care provoacă alungirea. Atunci pentru bara elastică care este caracterizată prin parametrii externi volum ( $V$ ), lungime ( $l$ ) și temperatură ( $T$ ) variația energiei interne este dată de relația

$$dU = TdS - pdV + \mathcal{F} dl. \quad (4.5.2)$$

Din această relație rezultă imediat următoarele relații

$$d(U + pV - Fl) = TdS + Vdp - ld\mathcal{F} \quad (4.5.3)$$

$$d(U - TS) = -SdT - pdV + \mathcal{F} dl \quad (4.5.4)$$

$$d(U - TS + pV - \mathcal{F}l) = -SdT + Vdp - ld\mathcal{F}. \quad (4.5.5)$$



Se vede ușor că pentru ca termenii din dreapta ai relațiilor (4.5.2) — (4.5.5) să reprezinte diferențiale totale exacte trebuie să fie îndeplinite următoarele relații

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_{S,V} &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S}\right)_{V,l}, & \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}}\right)_{S,p} &= -\left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_{p,\mathcal{F}} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_{T,V} &= -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_{l,V}, & \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{F}}\right)_{T,p} &= \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{p,\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Aceste relații pot fi transcrise în forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{S,V} &= \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{F}}\right)_{V,l}, & \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_{p,\mathcal{F}} &= -\left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}}\right)_{S,p} \\ \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_{T,V} &= -\left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}}\right)_{l,V}, & \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{p,\mathcal{F}} &= \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{F}}\right)_{T,p}. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Aceste ultime relații dau coeficienții de variație ai lungimii ( $l$ ) în raport cu variațiile temperaturii ( $T$ ) sau ale entropiei ( $S$ ) în diferite condiții.

În multe situații de interes practic volumul barei nu variază în decursul deformării elastice astfel că se poate lua  $dV = 0$  și relația (4.5.2) devine

$$dU = TdS + \mathcal{F}dl. \quad (4.5.8)$$

Adesea în practică, pentru caracterizarea deformării elastice a unei bare se folosește mărimea

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4.5.9)$$

numită *alungire relativă*, unde  $l_0$  este lungimea barei în absența forței de întindere  $\mathcal{F}$  și  $l$  este lungimea barei când asupra ei acționează  $\mathcal{F}$ . În aceste condiții, dacă alungirea relativă  $\varepsilon$  nu este prea mare, experiența arată că forța  $\mathcal{F}$  este dată de legea lui Hooke

$$\mathcal{F} = AE\varepsilon \quad (4.5.10)$$

unde  $A$  este aria secțiunii transversale a barei și  $E$  este *modulul de elasticitate* (modulul Young). De notat că mărimea  $E$  este o constantă de material și că în termodinamică valoarea ei trebuie luată din experiență (Cu titlu de exemplu menționăm că pentru metale  $E \approx 10^{11} \text{N/m}^2$ , pentru granit  $E \approx 5 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$  pentru beton  $E \approx 2 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$  și pentru cauciuc



$E \approx 8 \text{ N/m}^2$ ). Modulul de elasticitate  $E$  în general depinde de temperatură și anume el scade o dată cu creșterea temperaturii. Totuși, pentru majoritatea materialelor de interes practic  $E$  nu se modifică decât foarte puțin în intervalul de temperatură de la  $-50^\circ\text{C}$  până la  $+50^\circ\text{C}$  (modificările respective sînt mai mici de 2%). De aceea, pentru calcule se poate lua dependența lui  $E$  de  $T$  în aproximația liniară sub forma

$$E = E_0 + \frac{dE}{dT} (T - T_0) \quad (4.5.11)$$

unde  $E_0$  este valoarea lui  $E$  la  $T = T_0 = 273 \text{ K } 0^\circ\text{C}$  și  $\frac{dE}{dT}$  este o mărime negativă aproximativ constantă.

În cazul în care  $p = \text{const.}$  și  $V = \text{const.}$  ecuația de stare a barei elastice este de forma

$$l = l(T, \mathcal{F}) \quad (4.5.12)$$

lungimea ei depinzînd de temperatura  $T$  și de forța de alungire  $\mathcal{F}$ . Dezvoltînd în serie după  $\mathcal{F}$  în aproximația de ordinul întîi obținem

$$l = l_0 + \left( \frac{\partial l}{\partial \mathcal{F}} \right)_T \cdot \mathcal{F}. \quad (4.5.13)$$

Din (4.5.9), (4.5.10) și (4.5.13) rezultă atunci că modulul de elasticitate  $E$  este definit de relația

$$E = \frac{l_0}{A} \left[ \left( \frac{\partial l}{\partial \mathcal{F}} \right)_T \right]^{-1}. \quad (4.5.14)$$

Se vede ușor atunci că din relația (4.5.13) se poate scrie

$$l = l_0 \left( 1 + \frac{\mathcal{F}}{AE} \right) \quad \text{sau} \quad \mathcal{F} = E \left( \frac{l}{l_0} - 1 \right). \quad (4.5.15)$$

Mai adăugăm că mărimea

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \left( \frac{\partial l_0}{\partial T} \right)_p \quad (4.5.16)$$

poartă denumirea de *coeficient de dilatare liniară* al barei.

Să analizăm acum influența deformațiilor elastice asupra proprietăților termice ale barei. Evident că dacă ne referim la deformarea în condiții de temperatură și presiune constante entropia barei în stare deformată,



la temperatura  $T$ , poate fi scrisă sub forma

$$S(T, \mathcal{F}) = S(T, \mathcal{F} = 0) + \int_0^{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial S}{\partial \mathcal{F}} \right)_{T,p} d\mathcal{F} \quad (4.5.17)$$

unde  $S(T, \mathcal{F} = 0)$  este entropia barei în stare nedeformată ( $l = l_0$ ) și la temperatura  $T$ . Având în vedere ultima din relațiile (4.5.6) relația (4.5.17) se transcrie

$$S(T, \mathcal{F}) = S(T, \mathcal{F} = 0) + \int_0^{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_{\mathcal{F},p} d\mathcal{F}. \quad (4.5.18)$$

Din relațiile (4.5.15) și (4.5.11) se poate scrie

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_{\mathcal{F},p} = \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[ l_0 \left( 1 + \frac{\mathcal{F}}{AE} \right) \right] \right\}_{\mathcal{F},p} = \left( \frac{\partial l_0}{\partial T} \right)_p \left( 1 + \frac{\mathcal{F}}{EA} \right) - \\ - \frac{\mathcal{F} l_0}{E^2 A} \frac{dE}{dT}. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

De notat că modulul de elasticitate  $E$  și lungimea nedeformată  $l_0$  nu depind de  $\mathcal{F}$ . În consecință, nu depind de  $\mathcal{F}$  nici mărimile  $(\partial l_0 / \partial T)_p$  și  $dE/dT$ . Atunci, introducând (4.5.19) în (4.5.18), efectuând integrarea după  $\mathcal{F}$  și utilizând relația (4.5.16), se obține pentru entropia barei deformate următoarea expresie

$$S(T, \mathcal{F}) = S(T, \mathcal{F} = 0) + \left[ \alpha_l \frac{\mathcal{F}}{A} + \frac{1}{2E} \left( \alpha_l - \frac{1}{E} \frac{dE}{dT} \right) \frac{\mathcal{F}^2}{A^2} \right] V_0 \quad (4.5.20)$$

unde  $V_0 = l_0 A$  este volumul barei. Această relație dă dependența entropiei de forța de deformare  $\mathcal{F}$ . Din această relație se poate stabili și expresia entropiei în funcție de lungimea  $l$ , dacă se face uz de a doua dintre relațiile (4.5.15).

Dacă deformarea se face izoterm și la volum constant, energia internă a barei în stare deformată este dată de relația

$$U(T, l) = U(T, l_0) + \int_{l_0}^l \left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T,V} dl. \quad (4.5.21)$$

Din (4.5.8) și (4.5.6) se obține

$$\left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T,V} = \mathcal{F} + T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T,V} = \mathcal{F} - T \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{l,V}. \quad (4.5.22)$$



Introducând aici  $\mathcal{F}$  din (4.5.15) și ținând cont de (4.5.16), această relație se transcrie în forma

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{T,V} = A \left[ \left( E - T \frac{dE}{dT} \right) \left( \frac{l}{l_0} - 1 \right) + \frac{ET}{l_0} \cdot \alpha_l \cdot l \right]. \quad (4.5.23)$$

Cu această expresie din (4.5.21) se obține

$$U(T, l) = U(T, l_0) + \frac{l - l_0}{l_0^2} \left[ \left( E - T \frac{dE}{dT} \right) + ET\alpha_l(l + l_0) \right] V_0. \quad (4.5.24)$$

Această relație dă energia internă a barei elastice în stare deformată în funcție de lungimea  $l$ . Energia internă  $U$  se poate exprima desigur și în funcție de forța de deformare  $\mathcal{F}$  dacă în (4.5.24)  $l$  este înlocuit cu expresia sa dată de (4.5.15). Având expresia entropiei  $S$  a barei deformate se pot calcula desigur și capacitățile calorice

$$c_{\mathcal{F},p} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mathcal{F},p}, \quad c_{l,p} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{l,p}. \quad (4.5.25)$$

Să calculăm cantitatea de căldură schimbată de bară cu mediul înconjurător într-un proces de deformare izotermă. Respectiva cantitate de căldură se scrie

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 T dS = T(S_2 - S_1) \quad (4.5.26)$$

unde 1 și 2 reprezintă starea nedeformată respectiv deformată a barei. Din (4.5.20), dacă ne limităm la aproximația de ordinul întâi a entropiei în funcție de  $\mathcal{F}$ , avem

$$S_2 = S(T, \mathcal{F}) = S(T, \mathcal{F} = 0) + \alpha_l V_0 \frac{\mathcal{F}}{A} = S_1 + \alpha_l V_0 \frac{\mathcal{F}}{A}. \quad (4.5.27)$$

Atunci din (4.5.26) se obține

$$Q_{12} = \alpha_l V_0 \frac{\mathcal{F}}{A}. \quad (4.5.27)$$

Cantitatea de căldură schimbată de bară cu mediul înconjurător în cursul deformării izoterme, raportată la unitatea de masă va fi

$$q_{12} = \frac{Q_{12}}{m} = \frac{\alpha_l V_0}{\rho V_0} \frac{\mathcal{F}}{A} = \frac{\alpha_l}{\rho} \frac{\mathcal{F}}{A} \quad (4.5.28)$$



unde  $\rho$  este densitatea barei. Cu titlu de exemplu cităm că pentru oțel la o tensiune de deformare  $(\mathcal{F}/A) \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $q_{12} \approx 84 \text{ J/kg}$ .

În sfârșit, legat de proprietățile termodinamice ale barelor elastice vrem să menționăm *efectul elastotermic*. Acest efect constă în modificarea temperaturii barei într-un proces de deformare adiabatică (fără schimb de căldură în mediul înconjurător). Evident că o asemenea modificare a temperaturii este descrisă de relația

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}} \right)_{S,p} d\mathcal{F}. \quad (4.5.29)$$

Ținând cont de (4.5.6), (4.5.16) și (4.5.25) se poate scrie

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}} \right)_{S,p} &= - \left( \frac{\partial l}{\partial S} \right)_{\mathcal{F},p} = - \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_{\mathcal{F},p} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{\mathcal{F},p} = - l \cdot \alpha_l \cdot \frac{T}{c_{p,\mathcal{F}}} = \\ &= - l \alpha_l \frac{T}{c_{p,\mathcal{F}} \rho l A} = - \frac{\alpha_l T}{\rho c_{p,\mathcal{F}} A} \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

unde  $\rho$  este densitatea barei și  $c_{p,\mathcal{F}}$  — căldura specifică (la  $\mathcal{F}$  și  $p$  constante) a unității de masă. Introducând (4.5.30) în (4.5.29) avem

$$\frac{dT}{T} = - \frac{\alpha_l}{\rho c_{p,\mathcal{F}} A} d\mathcal{F} \quad (4.5.31)$$

de unde prin integrare se obține

$$T = T_0 e^{-\frac{\alpha_l \mathcal{F}}{c_{p,\mathcal{F}} \rho A}} \quad (4.5.32)$$

Pentru forțe de deformare nu prea mari exponentul din această relație este o mărime mică, și prin dezvoltare în serie se obține

$$T \approx T_0 - \frac{\alpha_l T_0}{c_{p,\mathcal{F}} \rho} \frac{\mathcal{F}}{A}. \quad (4.5.33)$$

Această formulă descrie modificarea temperaturii sub acțiunea deformărilor adiabactice, adică efectul elastotermic.

#### § 4.6. ELEMENTE DE TERMODINAMICA PROCESELOR IREVERSIBILE

În paragrafele precedente am prezentat unele din proprietățile sistemelor termodinamice aflate în stări de echilibru. În natură însă se întâlnesc și sisteme termodinamice aflate în stări de neechilibru. Respecti-



vele stări de neechilibru apar atunci cînd interacțiunea sistemului cu mediul înconjurător este variabilă în timp sau neomogenă (adică este diferită în diferite puncte ale suprafeței sistemului). Evoluția în timp a sistemelor termodinamice reprezintă ceea ce numim *proces irreversibile*. Această denumire provine de la faptul că respectivele procese se pot desfășura, de la sine (fără să fie „forțate” din exterior), într-un singur sens. Am văzut în § 4.2 că pentru procese oarecare variația entropiei  $dS$  satisface relația :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (4.6.1)$$

unde  $\delta Q$  reprezintă cantitatea de căldură schimbată de sistem cu mediul înconjurător în respectivul proces. Mărimea

$$d_e S = \frac{\delta Q}{T} \quad (4.6.2)$$

reprezintă deci variația entropiei sistemului datorită schimbului de căldură cu mediul. Mărimea  $\delta Q$  poate fi pozitivă, negativă sau nulă, în funcție de faptul dacă sistemul primește sau cedează căldură or nu schimbă căldură. Atunci rezultă că și  $d_e S$  poate fi pozitivă, negativă sau nulă. Din (4.6.1) și (4.6.2) rezultă că pentru un proces oarecare se poate scrie

$$dS = d_e S + d_i S \quad (4.6.3)$$

cu

$$d_i S \geq 0. \quad (4.6.4)$$

Mărimea  $d_i S$  reprezintă variația entropiei sistemului care apare ca urmare a proceselor ireversibile ce au loc în interiorul sistemului, adică entropia produsă în interiorul sistemului. Egalitatea în (4.6.4) apare, conform cu principiul al II-lea al termodinamicii, numai în cazul proceselor cvasistatice (cînd succesiunea de stări prin care evoluează sistemul sînt stări de echilibru).

Considerînd sistemul termodinamic ca un mediu continuu pentru mărimile care apar în (4.6.3) se pot scrie

$$S = \int_V \rho s dV, \quad \frac{d_e S}{dt} = - \oint_A \mathbf{J}_S dA, \quad \frac{d_i S}{dt} = \int_V \sigma_S dV \quad (4.6.5)$$

unde  $V$  reprezintă volumul sistemului, iar  $dA$  este elementul de arie de pe suprafața ce delimitează volumul respectiv ( $dA = n dA$ ,  $n$  fiind versorul normalei exterioare la suprafață în locul unde se ia elementul  $dA$ );  $\rho$  este densitatea masică a sistemului,  $s$  entropia unității de masă;  $\mathbf{J}_S$  este fluxul de entropie (entropia transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață);



$\sigma_s$  se numește *producție de entropie* (entropia produsă în unitatea de timp în unitatea de volum).

Introducînd (4.6.5) în (4.6.3), aplicînd teorema Gauss și ținînd cont de (4.6.4) se obține relația

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \mathbf{J}_s = \sigma_s \geq 0 \quad (4.6.6)$$

numită și *ecuația locală de bilant entropic*.

Din cele de mai sus rezultă că procesele ireversibile sînt însoțite de o producție internă de entropie și deci ele pot fi caracterizate cu ajutorul mărimii  $\sigma_s$ . Deoarece procesele ireversibile se produc în interiorul unui sistem termodinamic datorită acțiunilor exterioare, mărimea  $\sigma_s$  trebuie să depindă de respectivele acțiuni. Acțiunile externe pot fi descrise cantitativ cu ajutorul unor forțe termodinamice generalizate, notate generic cu  $\{X_i\}_{i=1}^n$ . Exemple de astfel de forțe sînt : gradientii de temperatură  $-\frac{\partial T}{\partial x_i}$

( $i = 1, 2, 3$ ) (adică componentele vectorului  $-\nabla T$ ), gradienti de presiune  $-\frac{\partial p}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) [(adică componentele vectorului  $-\nabla p$ ), gradientii

vitezelor într-un fluid (adică componentele tensorului  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ ) etc. Forțele

generalizate dau naștere în sistem la diferite fluxuri (transporturi de anumite mărimi fizice prin interiorul sistemului) notate generic cu  $\{J_i\}_{i=1}^n$ . Exemple de fluxuri pot fi citate fluxul de căldură (energie) — descris de componentele vectorului  $\mathbf{J}_Q$ , fluxul de substanță, descris de componentele vectorului  $\mathbf{J}_n$ , fluxul de sarcină electrică (descris de densitatea de curent electric) etc. În termodinamica proceselor ireversibile se demonstrează că, în cazul cînd forțele  $X_i$  nu sînt prea mari, producția de entropie se exprimă sub forma

$$\sigma_s = \sum_i J_i X_i \quad (4.6.7)$$

dacă  $J_i$  și  $X_i$  se referă la unitatea de volum a sistemului termodinamic.

Forțele generalizate  $X_i$  sînt cauzele care impun ca sistemul să evolueze în cadrul unor procese ireversibile prin stări de neechilibru. Dar cum aceste procese sînt caracterizate prin fluxurile  $J_i$  este important de cunoscut care este dependența funcțională a fluxurilor  $J_i$  de forțele  $X_i$ . Analiza fenomenologică (adică generalizarea datelor experimentale) arată că în principiu fiecare flux termodinamic  $J_i$  dintr-un sistem depinde de toate forțele care acționează asupra sistemului (restricțiile de la această regulă vor fi menționate mai jos), adică

$$J_i = J_i(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4.6.8)$$



Avînd în vedere că în absența forțelor termodinamice sistemul se află într-o stare de echilibru în care sînt absente fluxurile rezultă că

$$J_i(0) = J_i(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (4.6.9)$$

Dacă ne referim doar la situații cînd forțele termodinamice  $X_i$  nu sînt prea mari (și cînd stările de neechilibru prin care evoluează sistemul sînt în vecinătatea imediată a unor stări de echilibru), dezvoltînd funcțiile  $J_i(X_k)$  în serie Taylor după puterile forțelor  $X_k$ , în prima aproximație, dacă ținem cont de (4.6.9) avem

$$J_i \cong J_i(0) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial J_i}{\partial X_k} \right)_{X_j=0} \cdot X_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial J_i}{\partial X_k} \right)_{X_j=0} \cdot X_k \quad (4.6.10)$$

Cu notația  $(\partial J_i / \partial X_k)_{X_j=0} = L_{ik}$  aceste relații se transcriu sub forma

$$J_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k. \quad (4.6.11)$$

Aceste relații sînt denumite *ecuații fenomenologice*, iar mărimile  $L_{ik}$  se numesc coeficienți *fenomenologici*.

Referitor la dependența (4.6.11) a fluxurilor  $J_i$  de forțele  $X_k$  trebuie notat că în termodinamica proceselor ireversibile se adaugă următorul principiu restrictiv, numit și *principiul Curie*: un flux  $J_i$  poate depinde (poate fi condiționat) numai de acele forțe termodinamice  $X_i$  care au același caracter tensorial cu fluxurile respective (de exemplu fluxurile vectoriale (care formează componentele unui vector) nu pot fi condiționate de forțe tensoriale). Această restricție impusă ecuațiilor fenomenologice (4.6.11) își are originea în cerința ca proprietățile de simetrie ale sistemelor termodinamice față de operațiile de rotație și oglindire să fie reflectate în respectivele relații.

Ca exemple de relații de tipul (4.6.11) pot fi citate următoarele relații (cunoscute și sub denumirea de legi):

— *legea lui Fourier*

$$\mathbf{J}_Q \equiv \mathbf{q} = -K \nabla T. \quad (4.6.12)$$

referitoare la proporționalitatea între densitatea fluxului termic  $\mathbf{q}$  (cantitatea de căldură transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață) și gradientul temperaturii  $T$ ;

— *legea lui Fick*

$$\mathbf{J} = -D \nabla \rho \text{ sau } \mathbf{J} = -D' \nabla c \quad (4.6.13)$$

referitoare la proporționalitatea dintre vectorul curent de difuzie  $\mathbf{J}$  (cantitatea de masă transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafață, și gradientul densității  $\rho$ , sau al concentrației  $c$ );



— legea lui Newton

$$\frac{dF}{dA} = -\eta \nabla v \quad (4.6.14)$$

referitoare la proporționalitatea dintre forța de frecare internă (pe unitatea de arie) și gradientul vitezei  $v$ ;

— legea lui Ohm

$$\mathbf{J}_{el} = -\sigma_{el} \cdot \nabla \varphi \quad (4.6.15)$$

referitoare la proporționalitatea dintre densitatea de curent electric  $\mathbf{J}_{el}$  și gradientul potențialului electric  $\varphi$  (vezi și cap. VI).

După cum am menționat legat de introducerea relației (4.6.11) un flux poate fi cauzat de toate forțele (cu același caracter tensorial ca el) ce acționează asupra sistemului. Când fluxurile sînt generate de forțe de altă natură fizică — de exemplu gradiente de temperatură determină un flux de masă — avem de a face cu *efecte încrucișate*. În exemplul citat efectul poartă denumirea de *tormodifuzie* și relația ce-l caracterizează poate fi scrisă sub forma

$$\mathbf{J} = -D \nabla \rho - K \nabla T. \quad (4.6.16)$$

Coeficienții  $L_{ik}$  din (4.6.11) sînt mărimi fenomenologice a căror valoare, în limitele termodinamicii, nu poate fi determinată din considerente teoretice. În termodinamică valorile coeficienților  $L_{ik}$  trebuie luate din experiență pentru fiecare sistem în parte. Calculul teoretic al valorilor coeficienților  $L_{ik}$  se poate face în principiu doar în teoria statistică a proceselor ireversibile (teorie numită și cinetică statistică). Respectivul calcul este însă foarte laborios și el poate fi efectiv făcut practic doar pentru modele simple de sisteme termodinamice.

Din relațiile (4.6.10) rezultă că forțele  $X_i$  pot fi exprimate în funcție de fluxurile  $J_k$  prin relații liniare de forma

$$X_k = \sum_i R_{ki} J_i. \quad (4.6.17)$$

Mărimile  $R_{ki}$  se numesc *rezistențe generalizate* și se leagă de coeficienții cinetici  $L_{ik}$  prin relațiile

$$\sum_{k=1}^n L_{ik} R_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (4.6.18)$$

Să prezentăm acum și alte proprietăți ale coeficienților cinetici. În termodinamica proceselor ireversibile se admite că respectivii coeficienți nu depind de timp, adică

$$L_{ik} = \text{const.} \quad (4.6.19)$$



O proprietate importantă a coeficienților cinetici  $L_{ik}$  este aceea că ei formează o matrice simetrică adică ei satisfac relațiile

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (4.6.20)$$

numite și *relațiile de reciprocitate ale lui Onsager*. Aceste relații joacă în cadrul termodinamicii proceselor ireversibile rolul de postulat. Ele nu pot fi demonstrate în limitele teoriei termodinamice (fenomenologice) a proceselor ireversibile. Demonstrarea respectivelor relații se poate face numai în cadrul teoriei statistice a proceselor ireversibile. Demonstrația respectivă are la bază principiul reversibilității microscopice, conform căruia ecuațiile de mișcare ale microparticulelor constitutive, în interiorul sistemelor termodinamice, sînt reversibile (simetrice) în raport cu operația de schimbare a semnelui timpului.

Din relațiile (4.6.6), (4.6.7), (4.6.11) și (4.6.17) rezultă

$$\sigma_S = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k = \sum_{i,k} R_{ik} J_i J_k \geq 0 \quad (4.6.21)$$

adică producția de entropie este o formă pătratică nenegativ definită de forțele generalizate sau de fluxurile generalizate. Pentru ca relațiile (4.6.21) să fie îndeplinite trebuie ca determinantul format din coeficienții cinetici  $L_{ik}$  respectiv din rezistențele generalizate  $R_{ik}$  și minorii lor principali să fie nenegativi, adică

$$\text{Det}|L_{ik}| \geq 0, \quad \text{Det}|R_{ik}| \geq 0 \quad (4.6.22)$$

cu  $i, k = 1, 2, \dots, l$ ;  $l = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Dintre stările unui corp în care decurg procese ireversibile un interes deosebit îl prezintă *stările staționare*. Se numește *stare staționară de ordinul m* o stare care se atinge atunci cînd  $m$  din cele  $n$  forțe  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sînt menținute constante, restul de forțe (în număr de  $n - m$ ) fiind nule. În această terminologie stările de echilibru termodinamic sînt stări staționare de ordinul zero. În termodinamica proceselor ireversibile stările staționare joacă rol oarecum similar cu cel al stărilor de echilibru din termodinamica obișnuită. În termodinamica obișnuită stările de echilibru sînt caracterizate prin valori maxime ale entropiei. Se pune problema de a găsi o proprietate analoagă pentru stările staționare din termodinamica proceselor ireversibile. Pentru procesele ireversibile care satisfac anumite condiții (dintre care cele mai importante sînt condițiile (4.6.11), (4.6.19) — (4.6.22)) stările staționare sînt caracterizate prin faptul că producția de entropie are valoare minimă relativ la condițiile exterioare la care este supus sistemul. Această proprietate este cunoscută sub denumirea de *principiul minimei producții de entropie* (formulat de către I. Prigogine). Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_m$  sînt forțele menținute constante atunci principiul minimei producții de entropie este exprimat prin relațiile:

$$\frac{\partial \sigma_S}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.6.23)$$



Teoria fenomenologică a proceselor ireversibile prezentată succint în acest paragraf este aplicabilă la o clasă mare de fenomene fizice. Pot fi citate dintre acestea : conductibilitatea termică, conductibilitatea electrică, fenomenele termoelectrice, difuzia, termodifuzia, curgerile vîscoase etc.

De menționat faptul că există și procese ireversibile care nu pot fi descrise în limitele teoriei prezentate aici. Așa sînt procesele care apar cînd forțele termodinamice  $X_k$  ce acționează asupra sistemului nu mai sînt mici, iar stările sistemului nu mai sînt în vecinătatea apropiată a unor stări de echilibru. De consemnat faptul foarte important că în astfel de situații sistemele termodinamice pot trece *sub acțiunea forțelor exterioare* din stări dezordonate (în ceea ce privește aranjarea microparticulelor) în stări care posedă o anumită ordonare spațială sau temporală. Sistemele cu astfel de stări ordonate au fost denumite *structuri disipative* (denumire propusă de I. Prigogine). Evoluția menționată spre stări ordonate este în totală opoziție cu evoluția sistemelor izolate, care după cum am văzut tind totdeauna spre o stare de echilibru termodinamic caracterizată (din punct de vedere al dispunerii și mișcării microparticulelor constitutive) printr-o dezordine maximă. Evoluția spre stări ordonate în cazul proceselor ireversibile se pare că se datorește unor efecte de „cooperare” între microparticulele constitutive ale sistemelor termodinamice. Studiul sistematic, atît teoretic cît și experimental, al structurilor disipative are o vechime de mai puțin de un deceniu și jumătate și el tinde să se constituie într-o ramură de sine stătătoare a științelor fizice denumită *sinergetică* (denumire propusă și cultivată de H. Haken).



## Elemente de fizică statistică

## § 5.1. DESCRIEREA STATISTICĂ A SISTEMELOR TERMODINAMICE

După cum am mai menționat în capitolul precedent sistemele termodinamice sînt formate dintr-un număr enorm de particule constitutive care se află într-o continuă mișcare. Atunci ar apare ca firească încercarea de a proceda la o descriere microscopică mecanică a sistemelor respective, în sensul de a le preciza proprietățile pornind de la ideea că mișcarea particulelor constitutive este guvernată de legile mecanicii clasice (prezentate în cap. I). Din punctul de vedere al legilor mecanicii clasice cunoașterea la un moment dat a coordonatelor și vitezelor particulelor individuale permite a se determina pozițiile și vitezele (adică starea mecanică) particulelor la orice moment ulterior. Astfel o abordare mecanică a descrierii unui sistem de particule ar permite nu numai determinarea stării sistemului la un moment dat, ci ar mijloci și studiul modificării stării lui în decursul timpului.

Totuși, în cazul sistemelor termodinamice descrierea mecanică implică dificultăți majore care o fac inaplicabilă în versiunea simplistă prezentată mai sus. În primul rînd trebuie reținut faptul că sistemele termodinamice conțin un număr foarte mare de particule constitutive (un număr  $N$  se numește foarte mare dacă  $\ln N \gg 1$ . Ca exemplu menționăm că numai  $1 \text{ cm}^3$  de aer în condiții normale conține  $2,69 \cdot 10^{19}$  particule (molecule)). Pentru descrierea stării mecanice a unei singure particule la un moment dat este necesar să fie cunoscute trei coordonate  $x, y, z$  și trei componente  $v_x, v_y, v_z$  ale vitezei (sau, echivalent, trei componente  $p_x, p_y, p_z$  ale impulsului). Cunoașterea evoluției în timp a stării mecanice a unei particule necesită scrierea a trei ecuații diferențiale scalare de ordinul doi (ecuații Newton sau ecuații Lagrange) sau șase ecuații diferențiale de ordinul întâi (ecuații Hamilton). Integrarea acestor ecuații necesită șase parametri inițiali (trei coordonate și trei viteze sau, echivalent, trei impulsuri). În cazul unui sistem format din  $N$  particule descrierea lui necesită scrierea unui număr de  $3N$  ecuații diferențiale de ordinul doi (sau, echivalent,  $6N$  ecuații diferențiale de ordinul întâi) și cunoașterea unui număr de  $6N$  parametri



inițiali. [Dacă sistemul este supus la anumite legături, exprimate prin  $K$  relații, și deci are  $3N - K$  grade de libertate atunci numerele respective sînt  $3N - K$  (sau, echivalent,  $2(3N - K)$  și respectiv  $2(3N - K)$ ]. În cazul sistemelor termodinamice  $N$  (și chiar și  $3N - K$ ) este foarte mare. De aceea scrierea și integrarea unui număr corespunzător de ecuații diferențiale sînt practic imposibile. În plus, este practic imposibil să fie determinați parametrii inițiali (coordonate și impulsuri) pentru un număr așa de mare de particule și deci nu se poate determina starea inițială a sistemului.

Cele spuse mai sus arată că abordarea microscopică mecanică a studiului sistemelor termodinamice este lipsită de sens practic. De aceea, pentru respectivele sisteme trebuie căutate alte metode de descriere chiar dacă avem în vedere alcătuirea lor din particule constitutive care execută, fiecare în parte, mișcări mecanice. Astfel de metode sînt metodele statistice și probabiliste și ele formează obiectul de studiu al fizicii statistice.

Așa cum am arătat în capitolul precedent în cazul sistemelor termodinamice, pe lîngă descrierea microscopică se poate folosi și o descriere macroscopică pentru care este necesar doar un număr redus de parametri macroscopici. Respectiva descriere macroscopică se poate folosi atunci cînd sistemul se află într-o stare de echilibru sau în vecinătatea imediată a unei astfel de stări. În astfel de situații comportarea sistemului este deosebit de simplă și parametrii macroscopici nu depind de timp — în cazul stărilor de echilibru, sau sînt funcții foarte lent variabile de timp (în comparație cu mișcările microscopice ale particulelor constitutive) — în cazul stărilor apropiate de stări de echilibru. Orice parametru macroscopic al unui sistem termodinamic este o funcție de parametrii microscopici ai particulelor constitutive. De exemplu presiunea într-un gaz, fiind un parametru macroscopic este o funcție complet determinată de impulsurile moleculelor care alcătuiesc gazul respectiv.

Pentru un sistem termodinamic orice stare macroscopică (descrișă prin valorile bine precizate ale parametrilor macroscopici) poate fi realizată prin mai multe stări microscopice (descrie fiecare în parte prin valori bine precizate ale parametrilor referitori la mișcarea particulelor constitutive). (De exemplu, într-un gaz ideal o stare macroscopică cu energia internă  $U$  poate fi realizată printr-o stare microscopică în care avem  $N_1, N_2, N_3, \dots$  particule cu energiile corespunzătoare  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  sau printr-o stare microscopică în care avem  $N'_1, N'_2, N'_3, \dots$  particule cu energiile  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \dots$  dacă  $\sum_i N_i \varepsilon_i = \sum_i N'_i \varepsilon'_i = U$ ). Dat fiind faptul că o macrostare (stare macroscopică) este caracterizată printr-un număr mic de parametri macroscopici, iar o stare microscopică este caracterizată printr-un număr foarte mare de parametri microscopici, rezultă că unei stări macroscopice îi corespunde un număr foarte mare de microstări (stări microscopice). În plus, datorită mișcării permanente a particulelor constitutive, microstările trec încontinuu una în alta. Mulțimea microstărilor care corespund (sînt compatibile) cu o macrostare dată se numește *ansamblu statistic*. Ansamblurile statistice ale diferitelor macrostări conțin, în general, numere diferite de microstări. O macrostare este cu atît mai probabil a fi



întîlnită cu cît numărul microstărilor din ansamblul său statistic este mai mare. Legat de această proprietate a macrostărilor se introduce conceptul de *probabilitate termodinamică*, definită ca numărul de microstări prin care se realizează o macrostare dată. (De reținut că există o distincție între probabilitatea termodinamică și probabilitatea matematică (definită ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile), prima se exprimă printr-un număr natural, iar a doua printr-un număr  $\leq 1$ .)

Să considerăm un sistem termodinamic format din  $N$  microparticule componente. Dacă presupunem că mișcările microparticulelor sînt conforme cu legile mecanicii clasice atunci, la un moment dat, o microstare a sistemului este complet definită dacă se cunosc valorile coordonatelor generalizate  $\{q_i\}_{i=1}^{3N}$  și ale impulsurilor generalizate  $\{p_i\}_{i=1}^{3N}$  la momentul respectiv. Putem spune atunci că microstarea sistemului la un moment dat este reprezentată de un punct într-un spațiu abstract,  $6N$ -dimensional, care are drept axe de coordonate, coordonatele  $\{q_i\}_{i=1}^{3N}$  și impulsurile  $\{p_i\}_{i=1}^{3N}$ . Un asemenea spațiu abstract se numește *spațiu fazelor*, iar un punct din respectivul spațiu este denumit *fază* sau *punct reprezentativ*. Dacă microparticulele au grade de libertate legate de mișcări interne (cum ar fi mișcările de rotație ale moleculelor poliatomice sau mișcările de vibrație ale atomilor în interiorul unor astfel de molecule) sau mișcările lor în interiorul sistemului sînt supuse la anumite legături, atunci microstarea sistemului va trebui precizată printr-un număr de  $2n$  parametri microscopici ( $n \neq 3N$ ) și dimensiunile spațiului fazelor asociat sistemului va fi  $2n$ .

Microparticulele dintr-un sistem termodinamic se află într-o continuă mișcare datorită căreia microstarea sistemului se schimbă încontinuu. În consecință, punctul reprezentativ al sistemului se va mișca în spațiul fazelor și va descrie o curbă continuă numită *traietorie fazică*. (De notat că traietoria fazică este o curbă abstractă, care trebuie deosebită de traietoriile reale, în număr de  $N$ , ce reprezintă curbele de-a lungul cărora se mișcă cele  $N$  microparticule în spațiul real tridimensional). Mișcarea mecanică clasică este univoc determinată în sensul că unui set de valori inițiale pentru coordonate și impulsuri îi corespunde un set unic de valori ale coordonatelor și impulsurilor pentru orice moment ulterior. De aceea traietoria fazică a unui sistem nu se poate intersecta cu ea însăși decît în cazul cînd formează o curbă închisă.

Ansamblul statistic asociat unei macrostări este reprezentat în spațiul fazelor printr-un set de puncte numit *ansamblu fazic*. Dacă fiecărui punct din ansamblul fazic îi atribuim, cu ajutorul unei funcții de distribuție, o anumită probabilitate, atunci respectivul ansamblu ne ajută să definim probabilitatea termodinamică a oricărei macrostări. Să vedem cum poate fi introdusă o funcție de distribuție de genul amintit. Vom nota poziția unui punct din spațiul fazelor cu variabila  $6N$ -dimensională  $x \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_{3N}; x_{3N+1}, x_{3N+2}, \dots, x_{6N}\} \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_{3N}; p_1, p_2, \dots, p_{3N}\}$  iar un element infinitezimal de volum în jurul punctului  $x$  îl vom nota cu  $dx \equiv dx_1, dx_2, \dots, dx_{3N} dx_{3N+1} dx_{3N+2} \dots dx_{6N} \equiv dq_1 dq_2 \dots dq_{3N} dp_1 dp_2 \dots dp_{3N}$ . Dat fiind faptul că mișcarea microparticulelor



în interiorul sistemului este complet aleatoare (întîmplătoare, haotică) variabila  $x$  poate fi considerată ca o variabilă aleatoare  $6N$ -dimensională. Atunci se pune problema de a găsi care este probabilitatea ca un sistem termodinamic să aibă microstarea cuprinsă în elementul de volum  $dx$  în jurul punctului  $x$ . Deoarece  $dx$  este o mărime infinitezimală, și respectiv probabilitate trebuie să fie infinitezimală  $dW$ . Mai mult,  $dW$  este proporțională cu  $dx$ , adică

$$dW = w(x) dx. \quad (5.1.1)$$

Mărimea  $w = w(x)$  se numește *densitate de probabilitate* sau *funcție de distribuție* în spațiul fazelor.

Microstările distincte sînt statistic independente între ele, adică probabilitatea de realizare a unei microstări nu depinde de probabilitatea de realizare a unei microstări diferite de ea. De aceea se poate scrie că probabilitatea ca punctul reprezentativ al sistemului să se afle într-un domeniu finit  $\Gamma$  din spațiul fazelor este definită de integrala pe domeniul respectiv a probabilității (5.1.1), adică prin formula

$$W(\Gamma) = \int_{\Gamma} dW = \int_{\Gamma} w(x) dx. \quad (5.1.2)$$

Desigur că funcția de distribuție  $w(x)$  trebuie să satisfacă condiția de normare

$$\int_{\Gamma_{total}} w(x) dx = 1 \quad (5.1.3)$$

unde  $\Gamma_{total}$  reprezintă domeniul total din spațiul fazelor accesibil mișcării punctului reprezentativ al sistemului.

Funcția de distribuție  $w(x)$  permite să se calculeze o anumită valoare medie pentru orice mărime macroscopică care depinde de microstarea sistemului. Orice mărime macroscopică  $A$  referitoare la un sistem termodinamic este o funcție de cele  $6N$  variabile microscopice notate generic prin  $x$  și de timpul  $t$ , adică

$$A = A(x, t) \quad (5.1.4)$$

Datorită mișcărilor termice ale microparticulelor din sistem mărimea  $A(x, t)$  variază continuu în timp. Dar în orice experiment fizic, datorită folosirii dispozitivelor macroscopice de măsură, nu se măsoară valoarea instantanee  $A(x, t)$  a lui  $A$ , ci doar o anumită valoare medie în timp definită prin relația

$$\langle A \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A(x, \tau) d\tau \quad (5.1.5)$$

unde  $\tau$  reprezintă durata procesului de măsură. De notat, însă, că valoarea  $\langle A \rangle_{\tau}$  nu poate fi calculată teoretic dacă nu se cunoaște dependența de



timp a lui  $A(x, t)$ , lucru care este practic imposibil, din cauza complexității mișcărilor termice. Pe de altă parte, se poate însă demonstra că, pentru sistemele aflate în echilibru termodinamic, valoarea unei mărimi macroscopice care se măsoară în experiență poate fi definită ca fiind valoarea medie calculată pe mulțimea microstărilor compatibile cu macrostarea dată, adică valoarea medie fazică

$$\langle A \rangle = \int_{\Gamma_{total}} A(x, t) w(x) dx. \quad (5.1.6)$$

Afirmațiile de mai sus implică deci ipoteza că, pentru un sistem termodinamic aflat într-o stare de echilibru, media fazică  $\langle A \rangle$  (definită de (5.1.6)) este egală cu media în timp (definită de (5.1.5)). Această ipoteză poartă denumirea de *ipoteză ergodică*.

Mărimea  $A(x, t)$  fiind o mărime aleatoare la scară macroscopică, nu este caracterizată numai prin valoarea medie  $\langle A \rangle$ , ci și prin abateri de la această valoare — abateri care în fizică se numesc *fluctuații*. La scară macroscopică fluctuațiile se caracterizează cantitativ prin *momentele centrate de ordinul  $n$*  ( $n \geq 2$ ), definite prin relațiile

$$\langle (\Delta A)^n \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^n \rangle = \int_{\Gamma_{total}} (A(x, t) - \langle A \rangle)^n w(x) dx. \quad (5.1.7)$$

Momentul centrat de ordinul doi ( $n = 2$ ), se numește *dispersia* mărimii  $A$  iar radicalul din dispersie se numește *abatere medie pătratică*. Dacă avem de a face cu două mărimi macroscopice referitoare la același sistem termodinamic, atunci fluctuațiile lor sînt caracterizate prin *momentele centrate mixte de ordinul  $m, n$*  ( $m, n \geq 0, m + n \geq 2$ ) definite prin relațiile

$$\begin{aligned} \langle (\Delta A)^m \cdot (\Delta B)^n \rangle &= \\ &= \int_{\Gamma_{total}} (A(x, t) - \langle A \rangle)^m (B(x, t) - \langle B \rangle)^n w(x) dx. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

## § 5.2. DISTRIBUȚIA CANONICĂ

Valoarea medie a oricărei mărimi fizice referitoare la un sistem termodinamic aflat într-o stare de echilibru termodinamic nu trebuie să depindă de timp, întrucît o asemenea stare persistă nemodificată un timp indefinit de lung. De aceea, funcția de distribuție a unui sistem aflat în stare de echilibru nu trebuie să depindă de timp, ci numai de integralele prime ale ecuațiilor de mișcare ale microparticulelor ce alcătuiesc sistemul. O astfel



de integrală primă a unui sistem de microparticule ce execută mișcări supuse legilor mecanicii clasice o reprezintă hamiltonianul  $\mathcal{H}$  (sau energia mecanică totală). Deci funcția de distribuție  $w(x)$  a unui sistem în echilibru trebuie să depindă de  $x$  implicit prin intermediul lui  $\mathcal{H}$ , adică  $w(x) = w(\mathcal{H}(x))$ . (Dependența lui  $w$  de integralele prime impuls total  $\mathbf{P}$  și moment cinetic total  $\mathbf{L}$  trebuie exclusă, deoarece translația globală, în ansamblu, a sistemului (legată de  $\mathbf{P}$ ) nu are nici o semnificație termodinamică, iar dacă sistemul se află într-o mișcare de rotație globală (legată de  $\mathbf{L}$ ) el nu este în echilibru termodinamic). Expresia analitică concretă a lui  $w(\mathcal{H})$  trebuie căutată în funcție de particularitățile stării de echilibru și de cerința ca diversele consecințe ce decurg din expresia respectivă să fie conforme cu experiența.

Să abordăm problema găsirii funcției  $w(\mathcal{H})$  pentru un sistem aflat într-o stare de echilibru fiind în contact termic cu un termostat. Sistemul în cauză poate fi considerat ca o parte mai mică a unui sistem global alcătuit din el și din termostat. Vom nota cu  $x_1$  și  $V_1$  respectiv  $x_2$  și  $V_2$  ansamblul coordonatelor fazice și volumul referitoare la sistem respectiv termostat. Funcțiile de distribuție  $w_1$  și  $w_2$  ale sistemului, respectiv termostatului vor fi de forma

$$w_1 = w_1(\mathcal{H}_1, (x_1, V_1)), \quad w_2 = w_2(\mathcal{H}_2(x_2, V_2)) \quad (5.2.1)$$

$\mathcal{H}_1$  și  $\mathcal{H}_2$  fiind funcțiile Hamilton ale sistemului respectiv ale termostatului. Energia ansamblului sistem plus termostat este evident de forma

$$\mathcal{H}_{total}(x, V) = \mathcal{H}_1(x_1, V_1) + \mathcal{H}_2(x_2, V_2) + \mathcal{H}_{12} \quad (5.2.2)$$

unde  $\mathcal{H}_{12}$  reprezintă energia de interacțiune între sistem și termostat. Pentru un sistem termodinamic aflat în echilibru cu un termostat  $\mathcal{H}_{12}$  este întotdeauna mic în comparație cu  $\mathcal{H}_1$  și  $\mathcal{H}_2$  deci poate fi neglijat în comparații cu acești termeni. Aceasta deoarece  $\mathcal{H}_1$  și  $\mathcal{H}_2$  sînt proporționali cu numerele de particule din volumele  $V_1$  și  $V_2$ , iar  $\mathcal{H}_{12}$  este proporțional cu numărul de particule de pe suprafața ce delimitează volumul  $V_1$ . De aceea în locul relației (5.2.2) se poate scrie, cu foarte bună aproximație, următoarea relație

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2. \quad (5.2.3)$$

Deoarece probabilitățile de realizare ale diferitelor microstări ale sistemului și ale termostatului sînt independente între ele, în conformitate cu regula de compunere a probabilităților independente, se poate scrie

$$w(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = w(\mathcal{H}_1) \cdot w(\mathcal{H}_2). \quad (5.2.4)$$

Prin logaritmare, de aici avem

$$\ln w(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = \ln w(\mathcal{H}_1) + \ln w(\mathcal{H}_2). \quad (5.2.5)$$



Diferențiind (5.2.3) și (5.2.5) și avînd în vedere că  $\mathcal{H}_{total} = \text{const.}$ , obținem

$$d\mathcal{H}_{total} = d\mathcal{H}_1 + d\mathcal{H}_2 = 0 \quad (5.2.6)$$

$$[\ln w(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)]' d(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = [\ln w(\mathcal{H}_1)]' d\mathcal{H}_1 + [\ln w(\mathcal{H}_2)]' d\mathcal{H}_2 \quad (5.2.7)$$

cu notația  $f'(x) = df/dx$ . Introducînd (5.2.6) în (5.2.7) rezultă relația

$$\{[\ln w_1(\mathcal{H}_1)]' - [\ln w_2(\mathcal{H}_2)]'\} d\mathcal{H}_1 = 0. \quad (5.2.8)$$

Dar cum  $d\mathcal{H}_1$  poate fi arbitrar de aici rezultă relația

$$[\ln w(\mathcal{H}_1)]' = [\ln w(\mathcal{H}_2)]' = \alpha \quad (5.2.9)$$

unde  $\alpha$  este o constantă ce nu depinde nici de  $x_1$  nici de  $x_2$  (ea trebuie să aibă aceeași valoare atît pentru sistem cît și pentru termostat). Folosind pentru sistem notația  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$  și integrînd (5.2.9) obținem

$$\ln w(\mathcal{H}) = \alpha\mathcal{H} + \lambda \quad (5.2.10)$$

sau

$$w(x, V) = e^{\alpha\mathcal{H}(x, V) + \lambda} \quad (5.2.11)$$

unde  $\lambda$  este o constantă de integrare. În fizica statistică în locul constantelor  $\alpha$  și  $\lambda$  se introduc constantele  $\Theta$  și  $F$  prin relațiile

$$\alpha = -\frac{1}{\Theta}, \quad \lambda = \frac{F}{\Theta}. \quad (5.2.12)$$

Atunci (5.2.11) se transcrie în forma

$$w(x, V) = e^{\frac{F - \mathcal{H}(x, V)}{\Theta}} \quad (5.2.13)$$

Această expresie este cunoscută sub denumirea de *distribuția canonică a lui Gibbs*. Constanta  $\Theta$  se numește *modulul distribuției canonice*. Constanta  $F$  se determină din condiția de normare

$$\int_{\Gamma_{total}} w(x) dx = 1. \quad (5.2.14)$$



Intr oducînd (5.2.13) în (5.2.14) și notînd

$$Z = \int_{\Gamma_{total}} e^{-\frac{\mathcal{H}(x, V)}{\Theta}} dx. \quad (5.2.15)$$

obținem

$$F = -\Theta \ln Z. \quad (5.2.16)$$

Mărimea  $Z$  definită de (5.2.15) se numește *sumă de stare* (sau integrală de stare).

Ținînd cont de (5.1.6) valoarea medie a oricărei mărimi  $A(x)$  referitoare la un sistem descris de distribuția canonică se definește, prin relația

$$\langle A \rangle = \int_{\Gamma_{total}} A(x) e^{-\frac{F - \mathcal{H}(x, V)}{\Theta}} dx \quad (5.2.17)$$

În particular, valoarea medie a hamiltonianului sistemului, care de fapt nu este altceva decît energia internă  $U$  a sistemului, se scrie

$$U = \langle \mathcal{H} \rangle = \int_{\Gamma_{total}} \mathcal{H}(x, V) e^{-\frac{F - \mathcal{H}(x, V)}{\Theta}} dx \quad (5.2.18)$$

Din (5.2.15) și (5.2.16) rezultă că parametrul  $F$  este funcție de  $\Theta$  și  $V$ , adică

$$F = F(\Theta, V). \quad (5.2.19)$$

Derivînd (5.2.14) în raport cu  $V$  și ținînd cont de (5.2.13), (5.2.19) și (5.2.17) se poate scrie următorul șir de relații

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \int_{\Gamma_{total}} e^{-\frac{F(x, V) - \mathcal{H}(x, V)}{\Theta}} dx &= \frac{1}{\Theta} \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{\Theta} \int_{\Gamma_{total}} e^{-\frac{F - \mathcal{H}}{\Theta}} dx - \\ - \frac{1}{\Theta} \int_{\Gamma_{total}} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \right)_{\Theta} e^{-\frac{F - \mathcal{H}}{\Theta}} dx &= \frac{1}{\Theta} \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \right)_{\Theta} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

adică

$$\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{\Theta} = \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \right)_{\Theta} \right\rangle. \quad (5.2.21)$$

Media derivatei energiei mecanice a sistemului (adică a lui  $\mathcal{H}$ ) în raport cu parametrul extern volum  $V$  este egală cu minusul presiunii (presiunea fiind forța termodinamică conjugată cu volumul), adică

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \right\rangle = -p. \quad (5.2.22)$$



Din (5.2.21) și (5.2.22) rezultă relația

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\Theta} = -p. \quad (5.2.23)$$

Derivând (5.2.14) în raport cu  $\Theta$  și ținând cont de (5.2.13) și (5.2.18) — (5.2.19) se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} \int_{\Gamma_{total}} e^{\frac{F-\mathcal{H}}{\Theta}} dx &= \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V \int_{\Gamma_{total}} e^{\frac{F-\mathcal{H}}{\Theta}} dx - \\ &- \frac{1}{\Theta^2} \int_{\Gamma_{total}} (F-\mathcal{H}) e^{\frac{F-\mathcal{H}}{\Theta}} dx = \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V - \frac{1}{\Theta^2} (F - \langle \mathcal{H} \rangle) = \\ &= \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V - \frac{F - U}{\Theta^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

adică

$$U = F - \Theta \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V. \quad (5.2.25)$$

Să arătăm acum că modulul  $\Theta$  al distribuției canonice are, din punct de vedere fizic, semnificația de temperatură absolută  $T$ . Pentru a arăta aceasta este suficient să arătăm că  $\Theta$  satisface următoarele două proprietăți ale temperaturii termodinamice:

— sistemele cu aceeași temperatură se află în echilibru termodinamic între ele;

— inversul temperaturii este un factor integrant pentru cantitatea de căldură  $\delta Q$  schimbată de un sistem cu mediul său înconjurător.

Pentru a demonstra că  $\Theta$  satisface prima proprietate, să considerăm două sisteme ale căror funcții de distribuție sînt

$$w_1(x_1) = e^{\frac{F_1 - \mathcal{H}_1(x_1, V_1)}{\Theta_1}}, \quad w_2(x_2) = e^{\frac{F_2 - \mathcal{H}_2(x_2, V_2)}{\Theta_2}}. \quad (5.2.26)$$

Dacă cele două sisteme sînt aduse în contact termic între ele va apare un schimb de energie. Deoarece energia de interacțiune este mică în comparație cu  $\mathcal{H}_1$  și  $\mathcal{H}_2$ , suma  $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$  va rămîne practic constantă, adică

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \text{const.} \quad (5.2.27)$$



Pe de altă parte, cele două sisteme fiind în echilibru, probabilitățile lor sînt independente între ele și deci se poate scrie

$$w(x_1, x_2) = w(x_1) \cdot w(x_2). \quad (5.2.28)$$

Introducînd aici expresiile (5.2.28) obținem

$$w(x_1, x_2) = e^{\left(\frac{F_1}{\Theta_1} + \frac{F_2}{\Theta_2}\right) - \left(\frac{\mathcal{H}_1}{\Theta_1} + \frac{\mathcal{H}_2}{\Theta_2}\right)} \quad (5.2.29)$$

Deoarece sistemul global format din ansamblul celor două sisteme este tot un sistem termodinamic aflat în echilibru trebuie să avem

$$\frac{\mathcal{H}_1}{\Theta_1} + \frac{\mathcal{H}_2}{\Theta_2} = \text{const.} \quad (5.2.30)$$

Admițînd un schimb infinitesimal de energie între cele două sisteme din (5.2.29) și (5.2.32) se poate scrie

$$d\mathcal{H}_1 + d\mathcal{H}_2 = 0 \quad \frac{d\mathcal{H}_1}{\Theta_1} + \frac{d\mathcal{H}_2}{\Theta_2} = 0 \quad (5.2.31)$$

adică

$$\left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2}\right) d\mathcal{H}_1 = 0. \quad (5.2.32)$$

Deoarece  $d\mathcal{H}_1$  (modificarea energiei sistemului „1”) poate fi arbitrară, relația (5.2.32) este îndeplinită numai dacă

$$\Theta_1 = \Theta_2. \quad (5.2.33)$$

Această relație arată că parametrul  $\Theta$  al distribuției canonice satisface prima proprietate a temperaturii.

Să arătăm acum că  $\Theta$  satisface și proprietatea a doua a temperaturii. Din primul principiu al termodinamicii (vezi § 4.2) se poate scrie

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (5.2.34)$$

Pentru a dovedi că  $\Theta$  satisface proprietatea respectivă, trebuie să arătăm că mărimea

$$\frac{\delta Q}{\Theta} = \frac{dU + p dV}{\Theta} \quad (5.2.35)$$



este o diferențială totală exactă. Ținând cont de (5.2.23) și (5.2.25) se poate scrie

$$\begin{aligned}\frac{\delta Q}{\Theta} &= \frac{1}{\Theta} \left\{ d \left[ F - \Theta \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V \right]_V - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_\Theta dV \right\} = \\ &= \frac{1}{\Theta} \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V d\Theta + \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_\Theta dV - \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V d\Theta - \right. \\ &\quad \left. - \Theta d \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_\Theta dV \right\} = - d \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V\end{aligned}\quad (5.2.36)$$

adică

$$\frac{\delta Q}{\Theta} = d \left\{ - \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_V \right\} \quad (5.2.37)$$

deci inversul parametrului  $\Theta$  este un factor integrant pentru cantitatea de căldură  $\delta Q$ . Dar această proprietate o manifestă în termodinamică temperatura absolută  $T$  (vezi § 4.2). Deci  $\Theta$  este analogul statistic al temperaturii absolute și de aceea se numește *temperatură statistică*. Legătura între temperatura statistică  $\Theta$  și temperatura termodinamică  $T$  este dată de relația

$$\Theta = kT \quad (5.2.38)$$

unde  $k$  este constanta Boltzmann ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ). De notat că justificarea relației (5.2.38) rezidă în ultimă instanță în concordanța rezultatelor calculelor statistice cu datele experimentale și cu rezultatele din termodinamică.

Luând semnificația dată de (5.2.38) pentru  $\Theta$  din relațiile (5.2.23) și (5.2.25), prin comparație cu formulele termodinamicii (vezi § 4.3), rezultă că parametrul  $F$  din distribuția canonică are semnificație de energie liberă. Aceasta implică faptul că din (5.2.25) se poate scrie

$$\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -S, \quad (5.2.39)$$

$S$  fiind entropia sistemului. Ținând cont de această relație precum și de relațiile (5.2.25), (5.2.18) și (5.2.13) se vede ușor că se poate scrie

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{T} (U - F) = \frac{1}{T} (\langle \mathcal{H} \rangle - F) = -k \int_{\Gamma_{total}} \frac{\mathcal{H} - F}{kT} e^{\frac{F - \mathcal{H}}{kT}} dx = \\ &= -k \int_{\Gamma_{total}} [\ln w(x)] w(x) dx = -k \langle \ln w(x) \rangle.\end{aligned}\quad (5.2.40)$$



Această relație arată că entropia se poate exprima cu ajutorul valorii medii a densității de probabilitate.

*Observație.* De notat că expresia (5.2.40) a entropiei termodinamice este analoagă cu expresia dată de Shannon pentru entropia informațională. Formula (5.2.40) evidențiază faptul că entropia unui sistem nu este o valoare medie a unor parametri mecanici, ci ea are o natură esențialmente statistică (probabilistă). De aici decurge și faptul că nu se pot concepe dispozitive care să măsoare direct (nemijlocit) entropia, această mărime putându-se măsura numai prin intermediul măsurării altor mărimi — de exemplu, măsurînd cantitatea de căldură schimbată de sistem și temperatura lui.

Trecînd de la o distribuție continuă de probabilități la o distribuție discretă (cînd microstările sistemului formează o mulțime discretă) expresia (5.2.40) a entropiei trebuie înlocuită (prin analogie) cu expresia

$$S = -k \langle \ln W \rangle = -k \sum_{i=1}^N W_i \ln W_i \quad (5.2.41)$$

unde  $N$  reprezintă numărul microstărilor posibile în macrostarea dată iar  $W_i$  reprezintă probabilitatea de realizare a microstării „ $i$ ”. Dacă presupunem că toate cele  $N$  microstări sînt egal de probabile, atunci  $W_i = \frac{1}{N}$

și din (5.2.41) rezultă

$$S = -k \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = k \ln N. \quad (5.2.42)$$

Această formulă arată că într-o stare macroscopică dată entropia unui sistem termodinamic este proporțională cu logaritmul numărului de microstări compatibile cu macrostarea respectivă. Dar, după cum am arătat în § 5.1, numărul  $N$  de microstări prin care se poate realiza o macrostare dată reprezintă probabilitatea termodinamică  $W_{\text{termo}}$  a macrostării respective. Atunci, din (5.2.42) prin înlocuirea lui  $N$  cu  $W_{\text{termo}}$  se obține

$$S = k \ln W_{\text{termo}}. \quad (5.2.43)$$

Această relație care leagă entropia  $S$  de probabilitatea termodinamică  $W_{\text{termo}}$  este cunoscută sub denumirea de *formula lui Boltzmann*.

În încheierea acestui paragraf să dăm cîteva formule legate de suma statistică  $Z$ , care să ateste utilitatea mărimii respective în calculele de fizică statistică. Din (5.2.16) și (5.2.38) rezultă

$$F = -k T \ln Z. \quad (5.2.44)$$

Introducînd această expresie a lui  $F$  în (5.2.25) obținem

$$U = k T^2 \left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T} \right)_V = - \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \left( \frac{1}{kT} \right)} \right)_V. \quad (5.2.45)$$

Atunci capacitatea calorică la volum constant  $C_V$  poate fi calculată cu ajutorul relațiilor

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = k T \left\{ 2 \cdot \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V + k T \left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2} \right) \right\}. \quad (5.2.46)$$



Din (5.2.23) și (5.2.44) rezultă

$$p = -kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T \quad (5.2.47)$$

iar din (5.2.39) și (5.2.44) rezultă

$$S = k \ln Z + kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \quad (5.2.48)$$

Relațiile (5.2.45)–(5.2.48) arată că cunoașterea sumei de stare  $Z$  pentru un sistem termodinamic permite calcularea pentru sistemul respectiv a mărimilor macroscopice: energie ( $U$ ), presiune ( $p$ ), entropie ( $S$ ) și căldură specifică la volum constant ( $C_V$ ). Din aceste mărimi, via relațiile discutate în § 4.3, pot fi calculate și alte mărimi termodinamice macroscopice cum ar fi: entalpia ( $H$ ), potențialul Gibbs ( $G$ ), căldura specifică la presiune constantă ( $C_p$ ) și alți coeficienți termodinamici. De aceea în fizica statistică unul din scopurile importante urmărite în calcule este aflarea sumei de stare  $Z$ . Aflarea lui  $Z$  se face pornind de la diferite ipoteze și modele privind structura microscopică a sistemului termodinamic și mișcarea microparticulelor constitutive în interiorul respectivului sistem. De exemplu pentru un gaz ideal (vezi § 5.3) se admite că este alcătuit din microparticule care nu interacționează între ele.

În încheiere vrem să subliniem încă o dată faptul că distribuția canonică prezentată în paragraful de față este distribuția statistică corespunzătoare unui sistem termodinamic aflat într-o stare macroscopică proprie de echilibru termodinamic și în contact termic și mecanic cu un termostat, contact care permite schimbul de energie între sistem și termostat. Desigur că un sistem în echilibru se poate afla și în alte situații în raport cu termostatul și atunci distribuția statistică care îl descrie va fi alta decât cea canonică. Astfel dacă sistemul este izolat adiabatic și mecanic de mediul înconjurător (adică nu are nici un schimb de energie cu mediul), atunci el va fi descris de o distribuție numită *microcanonică*, iar dacă sistemul poate schimba cu mediul, pe lângă energie, și cantitate de substanță, el va fi descris de o distribuție numită *macrocanonică*. În prezentul volum nu vom intra însă în detaliile prezentării distribuțiilor microcanonică și macrocanonică.

### § 5.3. DESCRIEREA STATISTICĂ A GAZULUI IDEAL

Din punctul de vedere al fizicii statistice un gaz ideal este un sistem termodinamic format din microparticule constitutive care nu interacționează între ele. Atunci rezultă că pentru un gaz ideal format din  $N$  microparticule constitutive hamiltonianul  $\mathcal{H}$  are forma

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{i=1}^N h_i(x_i) \quad (5.3.1)$$



unde  $\mathcal{H}_i(x_i)$  este hamiltonianul particulei „ $i$ ”, iar  $x_i$  reprezintă ansamblul coordonatelor și impulsurilor particulei respective. Ținând cont de (5.3.1) din (5.2.13), (5.2.16) și (5.2.38) rezultă că pentru un gaz ideal distribuția canonică este de forma

$$w(x) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathcal{H}(x, V)}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i [\mathcal{H}_i(x_i, V)/kT]} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\zeta_i} e^{-\frac{\mathcal{H}_i(x_i, V)}{kT}} = \prod_{i=1}^N w_i(x_i) \quad (5.3.2)$$

unde

$$w_i(x_i) = \frac{1}{\zeta_i} e^{-\frac{\mathcal{H}_i(x_i, V)}{kT}}, \quad \zeta_i = \int e^{-\frac{\mathcal{H}_i(x_i, V)}{kT}} dx_i. \quad (5.3.3)$$

Distribuția  $w_i = w_i(x_i)$  dată de această relație poate fi considerată ca o distribuție într-un spațiu fazic 6-dimensional (corespunzător unei particule) numit și *spațiu  $\mu$* . Mărimea  $\zeta_i$  definită de (5.3.3) se numește *sumă de stare per particulă*. Din (5.3.2) și (5.3.3) se vede că suma de stare  $Z$  a unui gaz ideal se scrie sub formă de produs a sumelor de stare per particule, adică

$$Z = \prod_{i=1}^N \zeta_i. \quad (5.3.4)$$

Dacă gazul este format din particule identice, atunci evident că

$$Z = \zeta^N. \quad (5.3.5)$$

unde  $\zeta$  este desigur suma de stare calculată pentru o particulă.

Întrucât energia mecanică totală  $\mathcal{H}$  a unei particule punctiforme de masă  $m$  constă din energia sa cinetică  $\varepsilon_{cin}$  și din energia potențială  $\varepsilon_{pot}$  în câmpurile de forță exterioare sistemului (de exemplu într-un câmp gravitațional sau într-un câmp electric) se poate scrie

$$\mathcal{H} = \varepsilon_{cin} + \varepsilon_{pot} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \varepsilon_{pot}(x, y, z) \quad (5.3.6)$$

$p_x$ ,  $p_y$  și  $p_z$  fiind componentele impulsului  $\mathbf{p}$  al particulei, iar  $(x, y, z) \equiv \mathbf{r}$  coordonatele particulei respective. Atunci din (5.3.3) se obține că pentru o particulă punctiformă, dintr-un gaz de particule identice, distribuția canonică este de forma

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\zeta} e^{-\frac{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m] + \varepsilon_{pot}(x, y, z)}{kT}} \quad (5.3.7)$$



cu

$$\zeta = \int e^{-\frac{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m] + \varepsilon_{pot}(x, y, z)}{kT}} dp_x dp_y dp_z dx dy dz. \quad (5.3.8)$$

Avînd în vedere că în (5.3.7) exponentul conține dependența de impulsurile  $p_x, p_y, p_z$  într-un termen separat de dependența de  $x, y, z$  se vede că distribuția (5.3.7) factorizează în forma

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = w_M(\mathbf{p}) \cdot w_B(\mathbf{r}), \quad \zeta = \zeta_p \cdot \zeta_r \quad (5.3.9)$$

cu

$$w_M(\mathbf{p}) = \frac{1}{\zeta_p} e^{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2mkT}}, \quad \zeta_p = \int e^{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z \quad (5.3.10)$$

și

$$w_B(\mathbf{r}) = \frac{1}{\zeta_r} e^{-\frac{\varepsilon_{pot}(x, y, z)}{kT}}, \quad \zeta_r = \int e^{-\frac{\varepsilon_{pot}(x, y, z)}{kT}} dx dy dz. \quad (5.3.11)$$

Distribuțiile  $w_M(\mathbf{p})$  respectiv  $w_B(\mathbf{r})$  date de (5.3.10) respectiv (5.3.11) sînt cunoscute sub denumirea de *distribuția Maxwell* respectiv *distribuția Boltzmann*, iar distribuția  $w(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  dată de (5.3.7) este cunoscută sub denumirea de *distribuție Maxwell-Boltzmann*.

Din (5.3.10) avînd în vedere că componentele  $p_x, p_y$ , și  $p_z$  ale impulsului unei particule în mecanica clasică poate să aibă valori în intervalul  $(-\infty, \infty)$  și ținînd cont că

$$I_0(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (5.3.12)$$

rezultă

$$\zeta_p = (2mkT)^{3/2}. \quad (5.3.13)$$

Din (5.3.10) și (5.3.14) rezultă că probabilitatea ca o moleculă a unui gaz să aibă componentele impulsurilor cuprinse în intervalele  $(p_x, p_x + dp_x)$   $(p_y, p_y + dp_y)$  și  $(p_z, p_z + dp_z)$  este

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}) &= w_M(\mathbf{p}) dp_x dp_y dp_z = \\ &= (2mkT)^{-3/2} e^{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Dar, avînd în vedere semnificația matematică a probabilităților,  $dW(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$  poate fi scris și sub forma

$$dW(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}) = \frac{1}{N_0} dN(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}) \quad (5.3.15)$$



unde  $N_0$  reprezintă numărul total de molecule din gazul ideal și  $dN(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$  reprezintă numărul de molecule cu impulsurile în intervalul  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ . Din (5.3.15) și (5.3.14) se obține

$$dN(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}) = N_0 (2mkT)^{3/2} e^{-\frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z. \quad (5.3.16)$$

Această formulă dă distribuția moleculelor după impulsuri. Dacă în loc de impulsul  $\mathbf{p}$  folosind ca variabilă viteza  $\mathbf{v}$  a moleculei, avînd în vedere că  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , din (5.3.16) rezultă

$$dN(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}) = N_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \quad (5.3.17)$$

Această relație exprimă numărul de molecule  $dN(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$  cu vitezele în intervalul  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ , adică distribuția moleculelor după viteze. Avînd în vedere forma exponentului din (5.3.17) se vede că se poate scrie

$$dN(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}) = N_0 \prod_{\alpha=1}^3 dW(v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, 3 = x, y, z) \quad (5.3.18)$$

cu

$$\begin{aligned} dW(v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha) &= \frac{1}{N_0} dN(v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha) = \\ &= \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_\alpha^2}{2kT}} dv_\alpha. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Mărimea  $dN(v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, 3 = x, y, z$ ) exprimă distribuția moleculelor după valorile unei componente ( $\alpha$ ) a vitezei.

Dacă dorim să cunoaștem distribuția moleculelor după modulul  $v = |\mathbf{v}|$  al vitezei atunci vom trece de la componentele carteziene  $v_x, v_y$  și  $v_z$  la componentele sferice  $v, \varphi$  și  $\theta$  prin relațiile (vezi și tabelul 1.1.1)

$$v_x = v \sin \theta \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \varphi, \quad v_z = v \cos \theta. \quad (5.3.20)$$

Cu aceste transformări avem

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2, \quad dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi. \quad (5.3.21)$$

Pentru a obține numai dependența de  $v$  și a înlătura deci dependența de  $\theta$  și  $\varphi$ , introducem (5.3.21) în (5.3.17) și integrăm după  $\theta$  și  $\varphi$ . Avînd în vedere că

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \quad (5.3.22)$$



din (5.3.17) rezultă atunci relația

$$dN(v, v + dv) = N_0 \left[ \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{kT} \right)^3 \right]^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (5.3.23)$$

care dă numărul de molecule  $dN(v, v + dv)$  cu modulul vitezei cuprins în intervalul  $(v, v + dv)$ .

Legat de distribuția moleculelor după viteze, în fizica statistică se definesc următoarele viteze caracteristice ale moleculelor: viteza cea mai probabilă ( $\hat{v}$ ), viteza medie ( $\langle v \rangle$ ) și viteza medie pătratică ( $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ ).

Viteza cea mai probabilă  $\hat{v}$  se definește ca valoarea modulului vitezei  $v$  a moleculei pentru care mărimea

$$\frac{1}{N_0} \frac{dN(v, v + dv)}{dv} \quad (5.3.24)$$

definită în sensul relației (5.2.23) are valoarea cea mai mare. Atunci se vede ușor că  $\hat{v}$  trebuie să fie rădăcina ecuației

$$\left[ \frac{d}{dv} \left( e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) \right]_{v=\hat{v}} = 0. \quad (5.3.25)$$

Această ecuație are următoarele 3 rădăcini

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \infty, \quad \text{și} \quad v_3 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (5.3.26)$$

Se poate arăta ușor că expresia (5.3.24) realizează un maxim numai pentru  $v_3$ . Deci se poate scrie

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (5.2.27)$$

Viteza medie  $\langle v \rangle$  se definește prin relația

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty v dN(v, v + dv) \quad (5.2.28)$$

cu  $dN(v, v + dv)$  definit de (5.2.23). Introducând (5.2.23) în (5.2.28) și efectuând calculele se obține

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (5.2.29)$$



Viteza medie pătratică  $u \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  se definește ca rădăcina pătrată a mărimii

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N_0} \int v^2 dN(v, v + dv) \quad (5.2.30)$$

cu  $dN(v, v + dv)$  definit de (5.3.17). Introducând (5.3.17) în [(5.2.30) și efectuând calculele se găsește

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \quad (5.2.31)$$

și deci viteza medie pătratică  $u$  este dată de

$$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (5.2.32)$$

Luând în considerare (5.2.31) se vede ușor că energia cinetică medie a unei molecule de gaz ideal monoatomic este

$$\langle \varepsilon_{cin} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (5.2.33)$$

Această relație arată că energia cinetică medie a unei molecule într-un gaz ideal nu depinde de natura gazului (întrucât nu depinde de masa  $m$  a moleculei de gaz) și este proporțională cu temperatura absolută  $T$  a gazului.

De notat că distribuția Maxwell (5.3.10), respectiv distribuțiile (5.3.17), (5.3.19) și (5.3.23) ale moleculelor după viteze, își păstrează validitatea și în cazurile când între particulele sistemului se manifestă interacțiuni (deci și în cazul lichidelor și solidelor) dacă respectivele interacțiuni nu depind de vitezele particulelor. Aceasta deoarece în cazurile respective distribuția după impulsuri ori după viteze nu este afectată de energia de interacțiune. De aceea formulele (5.3.14) — (5.3.33) sînt aplicabile și pentru gazele reale, lichidele și solidele în interiorul cărora interacțiunile dintre particule nu depind de vitezele particulelor.

Să trecem acum la problema aflării funcțiilor termodinamice și a ecuației de stare a unui gaz ideal închis într-un recipient de volum  $V$ . Pentru un astfel de gaz energia potențială a unei molecule este de forma

$$\varepsilon(\mathbf{r})_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \mathbf{r} = (x, y, z) \in V \\ \infty & \text{pentru } \mathbf{r} = (x, y, z) \notin V. \end{cases} \quad (5.3.34)$$

Introducând această relație în (5.3.11), obținem

$$\zeta_{\mathbf{r}} = V. \quad (5.3.35)$$



Cu această expresie pentru  $\zeta_r$  și cu expresia (5.3.13) pentru  $\zeta_p$  din (5.3.9) obținem că suma de stare per moleculă este

$$\zeta = (2\pi mkT)^{3/2} V. \quad (5.3.37)$$

Introducând această expresie a lui  $Z$  în relațiile (5.2.46), (6.2.47) și (5.2.50) obținem că energia liberă  $F$ , energia internă  $U$  și respectiv entropia  $S$  pentru gazul considerat au expresiile

$$F = - \frac{3kTN}{2} \ln(2\pi mkTV^2) \quad (5.3.38)$$

$$U = \frac{3}{2} NkT \quad (5.3.39)$$

$$S = \frac{3Nk}{2} [\ln(2\pi mkTV^2) + 1]. \quad (5.3.40)$$

Introducând (5.3.37) în (5.2.48) obținem pentru capacitate calorică la volum constant  $C_V$  a gazului expresia

$$C_V = \frac{3}{2} Nk. \quad (5.3.41)$$

Din (5.3.49) și (5.3.37) obținem

$$p = \frac{kTN}{V}. \quad (5.3.42)$$

Observînd că  $N = \nu N_A$  (cu  $\nu$  — numărul de moli și  $N_A$  numărul lui Avogadro) și că  $N_A \cdot k = R$  (constanta gazelor ideale) relațiile (5.3.41) și (5.3.42) se transcriu

$$C_V = \nu \frac{3}{2} R \quad (5.3.43)$$

$$pV = \nu RT. \quad (5.3.44)$$

Ultima relație reprezintă *ecuația de stare* a gazului considerat întrucît ea stabilește o legătură (dependență funcțională) între parametrul intensiv presiune, parametrul extensiv volum și temperatură. Relația (5.3.44) mai este cunoscută și sub denumirea de ecuație Clapeyron—Mendeleev.

Să considerăm acum un gaz ideal aflat într-un recipient cilindric vertical cu aria bazei  $A$  și înălțimea  $z_0$  plasat în câmpul de atracție gravita-



țională de la suprafața Pământului. Pentru un astfel de gaz energia potențială a unei molecule este de forma

$$\varepsilon_{pot}(x, y, z) = mgz \quad (5.3.45)$$

dacă se ia axa  $Oz$  perpendiculară pe suprafața Pământului și cu originea pe baza recipientului. Introducând (5.4.45) în (5.3.11) se obține

$$\zeta_r = \frac{kT}{mg} A(1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}}). \quad (5.3.46)$$

Din (5.3.46), (5.3.13), (5.3.9) și (5.3.5) rezultă că suma de stare  $Z$  a gazului considerat este dată de expresia

$$Z = \frac{(2\pi)^{3N/2} A^N}{g^N} [m(kT)^5]^{N/2} (1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}})^N. \quad (5.3.47)$$

Introducând această expresie în relațiile (5.2.46) și (5.2.47) obținem că energia liberă  $F$  și energia internă  $U$  pentru gazul în câmpul gravitațional au expresiile

$$F = -NkT \ln \left\{ \frac{(2\pi)^{3/2} A}{g} [m(kT)^5]^{1/2} (1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}}) \right\} \quad (5.3.48)$$

$$U = NkT^{5/2} \left[ \frac{5}{2} T - \left( \frac{5}{2} T + \frac{mgz_0}{k} \right) e^{-\frac{mgz_0}{kT}} \right]. \quad (5.3.49)$$

Capacitatea calorică la volum constant a gazului considerat va fi

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{z_0} = \frac{25}{2} NkT^{5/2} (1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}}) - \frac{5N}{2} mgz_0 T^{1/2} e^{-\frac{mgz_0}{kT}} \left( \frac{9}{2} T - \frac{mgz_0}{k} \right). \quad (5.3.50)$$

Pentru presiunea gazului la capătul superior al cilindrului din (5.2.44) și (5.3.48) obținem expresia

$$p = -kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T = -\frac{kT}{A} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial z_0} \right) = \frac{Nmg}{A} \frac{e^{-\frac{mgz_0}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}}}. \quad (5.3.51)$$



Ținând cont de (5.3.11) și (5.2.45) se vede că numărul de molecule  $dN(z, z + dz)$  cuprinse în intervalul  $(z, z + dz)$  se scrie

$$dN(z, z + dz) = An(z) dz = An(0) e^{-(mgz/kT)} dz \quad (5.3.52)$$

unde  $n(0)$  și  $n(z)$  sint numerele de molecule din unitatea de volum la altitudinile  $z = 0$  respectiv  $z = z$ . Atunci se poate scrie

$$N = \int_0^{z_0} dN(z, z + dz) = An(0) \frac{kT}{mg} [1 - e^{-\frac{mgz_0}{kT}}]. \quad (5.3.53)$$

Introducând această expresie a lui  $N$  în (5.3.51) se obține

$$p(z_0) = n(0) kT e^{-\frac{mgz_0}{kT}} = p(0) e^{-\frac{mgz_0}{kT}}$$

unde  $p(0) = n(0) kT$  este presiunea la altitudinea  $z = 0$

Formula (5.2.54) poartă denumirea de *formulă barametrică*. Ea este aplicabilă, de exemplu, la calculul variației presiunii cu altitudinea  $z_0$  în atmosferă, dacă se consideră că atmosfera este un gaz în echilibru termodinamic și se lucrează cu valori ale lui  $z_0$  mult mai mici decât raza Pământului. (Ultima condiție este impusă de corectitudinea aproximării energiei potențiale a unei molecule cu expresia (5.3.45).) De consemnat că întrucât pentru gazul considerat în câmpul gravitațional,  $z_0$  este un parametru extensiv iar  $p(z_0)$  este un parametru intensiv, relația (5.3.54) poate fi privită și ca ecuație de stare a gazului respectiv.

De notat în încheiere că toate rezultatele obținute și discutate în paragraful de față se referă la gaze ideale, pentru care energia de interacțiune între molecule este neglijabilă în comparație cu energia lor cinetică și cu energia lor potențială în câmpuri externe. Dacă dorim să ne referim la cazul gazelor reale, când energia de interacțiune între molecule poate deveni comparabilă cu energia lor cinetică și cu energia lor potențială în câmpuri externe, acest fapt trebuie luat în considerare în calcule și atunci formulele prezentate în acest paragraf se vor modifica în mod corespunzător.

#### § 5.4. TEORIA DULONG-PETIT A CĂLDURILOR SPECIFICE ALE SOLIDELOR IDEALE

Să considerăm un solid cristalin ideal format din  $N$  atomi identici de masă  $m$ . Datorită forțelor de interacțiune puternice dintre ei atomii în cadrul mișcărilor termice nu se pot depărta prea mult de anumite poziții



de echilibru ale lor, poziții reprezentate de nodurile rețelei cristaline. Într-o primă aproximație (propusă de Dulong și Petit) se poate considera că mișcările termice ale atomilor sînt mici oscilații în jurul poziției de echilibru. În această aproximație energia de interacțiune a atomilor între ei poate fi înlocuită cu o energie potențială de tip oscilator pentru fiecare atom. Dacă vom considera cristalul cu simetrie cubică energia potențială de oscilație a unui atom poate fi scrisă sub forma

$$\varepsilon_{pot} = \frac{\eta}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (5.4.1)$$

dacă notăm cu  $\eta$  constanta elastică și presupunem atomul plasat în originea axelor de coordonate. De notat că în aproximația menționată energia sistemului de particule poate fi scrisă, ca în cazul gazelor, sub forma dată de relațiile (5.3.1) și (5.3.6) cu energia potențială dată de (5.4.1). Atunci suma de stare  $Z$  a solidului poate fi calculat via relațiile (5.3.5), (5.3.10), (5.3.11) și (5.3.13).

Introducînd (5.4.1) în (5.3.11), integrînd după  $x$ ,  $y$  și  $z$  de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , cu ajutorul relației (5.3.12) avem

$$\zeta_r = \left( \frac{2\pi k T}{\eta} \right)^{3/2}. \quad (5.4.2)$$

De notat că în calculul lui  $\zeta_r$  cu ajutorul lui  $\varepsilon_{pot}$  dat de (5.4.1) ar trebui să luăm limitele de integrare după  $x$ ,  $y$  și  $z$  în limitele volumului  $V$  ocupat de solid. Dar, deoarece funcțiile  $\exp \left\{ -\frac{\eta}{2kT} x_\alpha^2 \right\}$  ( $x_\alpha \equiv x, y, z$ ) sînt foarte rapid descrescătoare cu creșterea distanței față de poziția de echilibru a atomului, se comite o eroare relativ mică luînd pentru  $x_\alpha$  ca limite de integrare valorile  $-\infty$  și  $+\infty$ .

Din (5.3.5), (5.3.9), (5.3.11) și (5.4.2) rezultă că suma de stare a unui solid ideal este

$$Z = \left( \frac{2\pi k T}{\omega_0} \right)^{3N}. \quad (5.4.3)$$

unde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\eta}{m}} \quad (5.4.4)$$

reprezintă pulsația oscilațiilor atomilor.

Introducînd (5.4.3) în formula (5.2.46) obținem că energia internă  $U$  a solidului în aproximația considerată este egală cu

$$U = 3NkT. \quad (5.4.5)$$



Cu această expresie pentru  $U$  din (5.2.28) obținem pentru capacitatea calorică a solidului expresia

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk. \quad (5.4.6)$$

Dacă notăm din nou  $N = \nu N_A$  (cu  $\nu$  numărul de moli și  $N_A$  numărul lui Avogadro), avînd în vedere că  $N_A \cdot k = R$  (constanta gazelor ideale) relația (5.4.6) se transcrie

$$C = 3\nu R. \quad (5.4.7)$$

Această relație este cunoscută sub denumirea de *formula Dulong-Petit*. Ea exprimă valoarea capacității calorice a solidelor în aproximația menționată.

De notat că formula (5.4.7) este confirmată de experiență doar pentru temperaturi în jurul celor obișnuite ( $T \approx 300$  K). Aceasta denotă că numai la astfel de temperaturi este justificată aproximația menționată în descrierea corpurilor solide.

## § 5.5. ELEMENTE DE TEORIA FLUCTUAȚILOR

Dacă un sistem termodinamic se află într-o stare de echilibru, atunci orice mărime macroscopică  $A$  dependentă de microstările sistemului (adică, în limbajul notațiilor folosite, orice mărime  $A = A(x)$ ) nu va fi constantă în timp ci se va modifica încontinuu în jurul unei valori medii de echilibru  $\langle A \rangle$  (fig. 5.5.1).

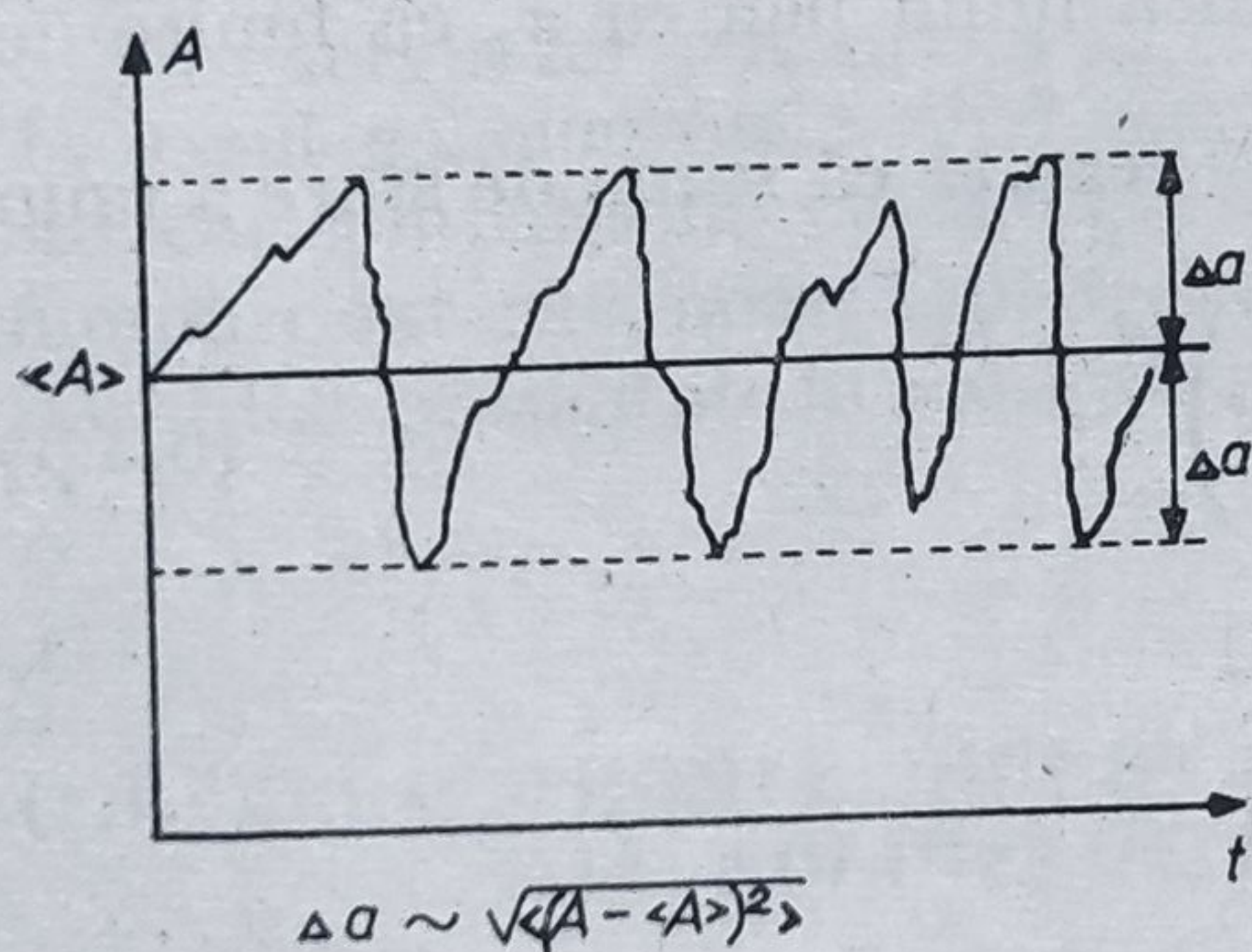


Fig. 5.5.1

Această modificare continuă se datorește mișcărilor termice ale microparticulelor ce alcătuiesc sistemul. Abaterile continue ale mărimilor fizice de la valorile lor medii, cauzate de mișcările termice, poartă denumirea de *fluctuații*. În studiul sistemelor termodinamice pe lângă calculul valorilor medii macroscopice este adesea important să fie calculate și mărimi ce caracterizează cantitativ fluctuațiile. De consemnat că fluctuațiile apar

numai în descrierea statistică a sistemelor termodinamice și nu apar în descrierea termodinamică (fenomenologică) a respectivelor sisteme. Fluctuațiile explică o serie de fenomene fizice cum ar fi opalescența critică și



aparitia „zgomotelor” în circuitele electronice și permit estimarea limitei de sensibilitate a instrumentelor de măsură.

După cum am menționat și în § 5.1 descrierea fluctuațiilor se face cu ajutorul momentelor centrate  $\langle (A - \langle A \rangle)^n \rangle$  pentru o mărime  $A$  și cu ajutorul momentelor mixte  $\langle (A - \langle A \rangle)^m (B - \langle B \rangle)^n \rangle$  pentru două mărimi  $A$  și  $B$ . În practică, însă adesea pentru caracterizarea fluctuațiilor se folosesc doar primele dintre momentele amintite, respectiv mărimile  $\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$  și  $\langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle$ . Prima dintre ele se numește *dispersia* mărimii  $A$ , iar ultima se numește *corelația* mărimilor  $A$  și  $B$ . Radicalul de ordinul doi din dispersie, adică mărimea  $\sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$ , se numește *abaterea medie pătratică* a mărimii  $A$ .

Având în vedere relațiile (5.1.7) și (5.1.8) se vede că mărimile ce caracterizează fluctuațiile (în particular dispersiile și corelațiile) depind de distribuția  $w(x)$  ce caracterizează sistemul termodinamic. În continuare vom prezenta unele probleme ale descrierii fluctuațiilor prin dispersie și corelații, pentru cazul când sistemul termodinamic este descris de o distribuție canonică.

Să calculăm pentru început dispersia  $\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$  în cazul când mărimea  $A$  reprezintă energia internă a sistemului, adică  $A(x) = \mathcal{H}(x)$  (hamiltonianul sistemului). Avem,

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle = \langle (\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}\langle \mathcal{H} \rangle + \langle \mathcal{H}^2 \rangle) \rangle = \langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2. \quad (5.5.1)$$

Ținând cont că distribuția canonică se poate scrie sub forma

$$w(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad Z = \int_{\Gamma_{tot}} e^{-\beta \mathcal{H}} dx, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (5.5.2)$$

se pot scrie următoarele relații

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle &= \int_{\Gamma_{tot}} \mathcal{H}(x) w(x) dx = \frac{1}{Z} \int_{\Gamma_{tot}} \mathcal{H}(x) e^{-\beta \mathcal{H}(x)} dx = \\ &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\Gamma_{tot}} e^{-\beta \mathcal{H}(x)} dx = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}^2 \rangle &= \int_{\Gamma_{tot}} \mathcal{H}^2(x) w(x) dx = \frac{1}{Z} \int_{\Gamma_{tot}} \mathcal{H}^2(x) e^{-\beta \mathcal{H}(x)} dx = \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_{\Gamma_{tot}} e^{-\beta \mathcal{H}(x)} dx = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$



Combinând relațiile (5.5.1)–(5.5.4) rezultă că dispersia fluctuațiilor energiei unui sistem termodinamic descris de distribuția canonică este dată de relația

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left[ \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right]^2. \quad (5.5.5)$$

Această relație arată că din suma de stare  $Z$  se poate calcula și dispersia fluctuațiilor energiei.

În cazul unui gaz ideal nesupus acțiunii vreunui câmp extern de forțe  $Z$  este dat de expresia (5.3.37). Introducând expresia respectivă în (5.5.5) obținem pentru dispersia energiei

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle = \frac{3N}{2} \beta^{-2} = \frac{3N}{2} k^2 T^2. \quad (5.5.6)$$

În cazul unui solid cristalin în aproximația Dulong-Petit suma de stare este dată de relația (5.4.3). Atunci din (5.5.5) și (5.4.3) rezultă că pentru un solid în aproximația respectivă dispersia fluctuațiilor energiei are expresia

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle = 3N\beta^{-2} = 3Nk^2 T^2. \quad (5.5.7)$$

Drept exemplu de corelație a două mărimi  $\langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle$  cităm cazul când  $A = \mathcal{H}$  — energia internă și  $B = p$  — presiunea. Evident putem scrie

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)(p - \langle p \rangle) \rangle = \langle \mathcal{H} p \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle \langle p \rangle. \quad (5.5.8)$$

Din (5.2.49) se vede că, notînd  $\beta = 1/kT$ , se poate scrie:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= -\beta^{-1} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_\beta = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_\beta = - \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial V} \int e^{-\beta \mathcal{H}(x, V)} dx = \frac{1}{Z} \int \frac{\partial \mathcal{H}(x, V)}{\partial V} e^{-\beta \mathcal{H}(x, V)} dx = \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(x, V)}{\partial V} \right\rangle = \langle p(x) \rangle. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Ținînd cont de expresia lui  $p(x)$  definită de această relație rezultă că putem scrie

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} p \rangle &= \langle \mathcal{H}(x) p(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{H}(x, V) \frac{\partial \mathcal{H}(x, V)}{\partial V} e^{-\beta \mathcal{H}(x, V)} dx = \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} e^{-\beta \mathcal{H}} dx = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( -\frac{1}{\beta} \int e^{-\beta \mathcal{H}} dx \right) \right] = \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{Z}{\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5.10)$$



Combinând relațiile (5.5.3), (5.5.9) și (5.5.10) găsim că în cazul unui sistem termodinamic descris de o distribuție canonică fluctuațiile energiei și presiunii sînt caracterizate prin corelația dată de relația:

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle) (p - \langle p \rangle) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{Z}{\beta} \right) \right] - \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) \cdot \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right). \quad (5.5.11)$$

În cazul unui gaz ideal, în absența cîmpurilor externe de forțe, suma de stare  $Z$  este dată de (5.3.37). Introducînd respectiva expresie în (5.5.11) se obține că în cazul unui gaz ideal corelația fluctuațiilor energiei și presiunii are expresia

$$\langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle) (p - \langle p \rangle) \rangle = - N \beta^{-2} V^{-1} = - \frac{N k^2 T^2}{V}. \quad (5.5.12)$$

Să prezentăm acum un exemplu concret al modului cum fluctuațiile influențează sensibilitatea aparatelor de măsură. Ne vom referi la aparatele de măsură a căror piesă principală constă dintr-un fir de torsiune de care se suspendă o piesă activă asupra căreia acționează un cuplu de forțe exterioare, al cărui moment este proporțional cu mărimea de măsurat. Vizualizarea unghiului de rotire al firului se face cu ajutorul unui fascicul luminos ce se reflectă pe o oglinjoară lipită de firul de torsiune (fig. 5.5.2, a)

Datorită mișcării termice a moleculelor și atomilor din firul de cuarț și din piesa activă suspendată de fir (care împreună formează un sistem termodinamic) firul va executa mici oscilații haotice în jurul poziției de echilibru chiar și în absența unor acțiuni exterioare. Aceste oscilații nu sînt altceva decît fluctuații ale unghiului de rotație  $\varphi$  al firului, fluctuații care se traduc prin fluctuații ale indicațiilor pe scara gradată a aparatului (fig. 5.5.2, b).

Să vedem cum pot fi caracterizate cantitativ fluctuațiile amintite ale unghiului  $\varphi$ . Firul împreună cu piesa activă formează un sistem mecanic cu un singur grad de libertate descris de coordonata generalizată  $\varphi$ .

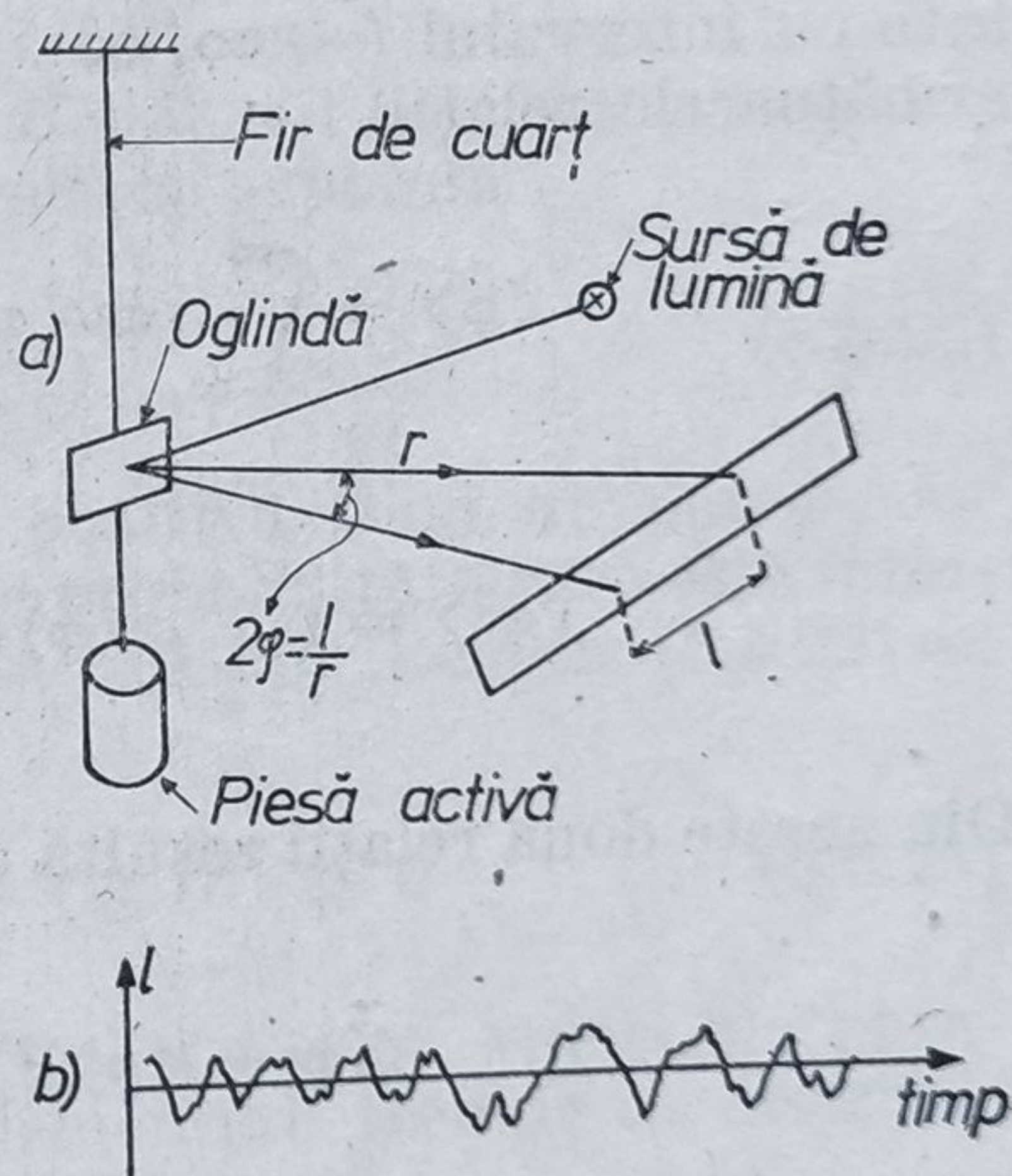


Fig. 5.5.2



Răsucirea firului cu un unghi  $\varphi$  este însoțită de înmagazinarea în fir a unei energii potențiale dată de relația

$$\varepsilon_{pot} = \frac{1}{2} G \varphi^2 \quad (5.5.13)$$

unde  $G$  este modulul de elasticitate de torsiune al firului. Atunci prin analogie cu (5.3.11) fluctuațiile unghiului sînt descrise de densitatea de probabilitate

$$w(\varphi) = \frac{1}{\zeta_\varphi} e^{-\frac{\varepsilon_{pot}(\varphi)}{kT}} = \frac{1}{\zeta_\varphi} e^{-\frac{G\varphi^2}{2kT}} \quad (5.5.14)$$

unde

$$\zeta_\varphi = \int e^{-\frac{\varepsilon_{pot}(\varphi)}{kT}} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G\varphi^2}{2kT}} d\varphi = \sqrt{\frac{2\pi kT}{G}}. \quad (5.5.15)$$

De notat că în (5.5.15) integrarea ar trebui în principiu să se facă pentru valori ale lui  $\varphi$  cuprinse în limitele domeniului de elasticitate ale firului.

Dar deoarece  $e^{-\frac{G\varphi^2}{2kT}}$  este o funcție rapid descrescătoare de variabila  $\varphi$  nu se comite o eroare prea mare înlocuind la integrare domeniul de elasticitate cu intervalul  $(-\infty, \infty)$ . Cu distribuția (5.5.14) — (5.5.15) se obțin următoarele relații

$$\langle \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi w(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\zeta_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-\frac{G\varphi^2}{2kT}} d\varphi = 0 \quad (5.5.16)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 w(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\zeta_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 e^{-\frac{G\varphi^2}{2kT}} d\varphi = \frac{kT}{G}. \quad (5.5.17)$$

Din aceste două relații rezultă că dispersia fluctuațiilor unghiului este

$$\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \frac{kT}{G}. \quad (5.5.18)$$

Deci abaterea medie pătratică a fluctuațiilor este

$$\Delta\varphi = \sqrt{\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{G}}. \quad (5.5.19)$$

Este evident că aparatul de măsură nu poate fi folosit la măsurarea unor mărimi care provoacă în aparat rotații cu unghiuri mai mici decît



$\Delta\varphi$ , deoarece astfel de rotații nu mai pot fi deosebite de fluctuațiile termice spontane ale aparatului și deci rezultatul înregistrat de aparat nu mai are nici o semnificație din punct de vedere al măsurătorilor. Aceasta înseamnă că dacă avem o mărime de măsurat  $A$  și relația de proporționalitate a lui  $A$  cu  $\varphi$  este de forma

$$A = \alpha\varphi \quad (5.5.20)$$

precizia limită  $\Delta A_{lim}$  cu care mai poate fi măsurată mărimea  $A$  este dată de relația

$$\Delta A_{lim} = [\alpha\Delta\varphi = \alpha \sqrt{\frac{kT}{G}}. \quad (5.5.21)$$

Valoarea lui  $\Delta\varphi$  și a lui  $\Delta A_{lim}$  trebuie desigur cunoscute pentru fiecare aparat în parte. Ca exemplu cităm că pentru un aparat la care  $G = 5,14 \cdot 10^{-18}$  J/rad<sup>2</sup> din (5.5.19) rezultă  $\Delta\varphi \approx 1,8^\circ$ . Deci un aparat cu astfel de caracteristici nu poate fi folosit pentru măsurat mărimi cu o eroare în  $\varphi$  de ordinul  $1,8^\circ$  sau mai mică, deoarece unghiului de măsurat i se suprapun fluctuațiile de torsiune ale aparatului.

Revenind la problema generală a fluctuațiilor să prezentăm o relație între dispersiile și corelațiile a două mărimi macroscopice  $A$  și  $B$  referitoare la un același sistem termodinamic și dependente de microstarea sistemului (adică sînt mărimi de forma  $A = A(x)$ ,  $B = B(x)$  în limbajul folosit în acest capitol). Vom nota cu  $\langle A \rangle$  și  $\langle B \rangle$  valorile medii ale celor două mărimi și  $\Delta A = A - \langle A \rangle$  respectiv  $\Delta B = B - \langle B \rangle$ . Fie  $\lambda$  un parametru real arbitrar. Atunci se poate scrie relația evidentă

$$\langle (\lambda \Delta A - \Delta B)^2 \rangle \geq 0 \quad (5.5.22)$$

(aceasta deoarece mărimea de mediat este pozitivă fiind un pătrat, iar medierea se face cu ajutorul unei densități de probabilitate care este întotdeauna pozitivă — vezi și relațiile (5.1.6) — (5.1.8)). Relația (5.5.22) se transcrie în forma

$$\lambda^2 \langle \Delta A^2 \rangle - 2\lambda \langle \Delta A \cdot \Delta B \rangle + \langle \Delta B^2 \rangle \geq 0 \quad (5.5.23)$$

Pentru ca relația (5.5.23) să fie satisfăcută pentru orice valori ale parametrului  $\lambda$ , după cum se știe din algebra elementară trebuie ca discriminantul ecuației în  $\lambda$  să nu fie pozitiv, adică

$$\langle \Delta A \cdot \Delta B \rangle^2 - \langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \leq 0. \quad (5.5.24)$$

De aici rezultă relația

$$\langle \Delta A^2 \rangle \cdot \langle \Delta B^2 \rangle \geq \langle \Delta A \cdot \Delta B \rangle^2. \quad (5.5.25)$$



Această relație arată că în cazul a două mărimi macroscopice  $A$  și  $B$  care fluctuează produsul dispersiilor lor este mai mare sau cel puțin egal cu pătratul corelației lor. Introducând notațiile  $\Delta A = \sqrt{\langle \Delta A^2 \rangle}$  și  $\Delta B = \sqrt{\langle \Delta B^2 \rangle}$  din (5.5.25) se obține următoarea relație pentru abaterile medii pătratice  $\Delta A$  și  $\Delta B$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq |\langle \Delta A \cdot \Delta B \rangle|. \quad (5.5.26)$$

De notat că relația (5.5.26) este înrudită<sup>1</sup> din multe puncte de vedere cu așa numitele relații de nedeterminare din mecanica cuantică în versiunea lor teoretică (adică în versiunea în care sînt deduse din aparatul matematic al mecanicii cuantice și nu din analiza așa-numitelor experimente mentale).

---

<sup>1</sup> Pentru detalii asupra acestui punct de vedere a se vedea :  
S. Dumitru, Physica scripta (Sweden), **10** (1974), p. 101—103 și S. Dumitru, Epistemological Letters (Lausanne), **15** (1977), p. 1—78.



## Elemente de electromagnetism

### 6.1. SARCINI ELECTRICE ȘI CÎMP ELECTROMAGNETIC

Conform reprezentărilor noastre actuale, în natură există particule elementare și sisteme mai complexe constituite din astfel de particule. Sistemele formate dintr-un număr mic de particule elementare (atomi, molecule), împreună cu particulele elementare sînt denumite cu numele generic de microsistem sau microparticule. Caracteristica cea mai generală a tuturor microparticulelor este legea de interacțiune dintre ele. Interacțiunile dintre microparticule sînt complexe și studiul lor complet este încă departe de a fi încheiat. La ora actuală se cunosc următoarele tipuri de interacțiuni (luate în ordinea intensității lor) între microparticule: interacțiuni tari, interacțiuni electromagnetice, interacțiuni slabe și interacțiuni gravitaționale.

Interacțiunile electromagnetice — pe care le vom prezenta în acest capitol — au următoarele caracteristici: se manifestă chiar dacă microparticulele se află la distanțe mari între ele și nu depind de masa particulelor. Experiența arată că în cazul cel mai simplu a două microparticule aflate în repaus una față de cealaltă, interacțiunea electromagnetică se manifestă prin forțe, egale și de sens contrar, ce acționează asupra microparticulelor. Aceste forțe depind de: distanța dintre particule, de o mărime caracteristică particulelor numită *sarcină electrică* și de proprietățile mediului care înconjoară particulele. În cazul unui mediu omogen și izotrop constatările experimentale menționate pot fi exprimate cantitativ prin *legea lui Coulomb*

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.1.1)$$

Aici  $\mathbf{F}$  semnifică forța cu care particula 1 acționează asupra particulei 2, iar  $\mathbf{r}$  raza vectorială a particulei 2 în raport cu particula 1. Mărimile  $Q_1$  și  $Q_2$  sînt sarcinile electrice ale celor două particule,

$$\epsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1} [F/m] \quad (6.1.2)$$

este constanta dielectrică (permitivitatea) vidului, iar  $\epsilon_r$  este constanta dielectrică (permitivitatea) relativă a mediului în care se află particulele.



Întrucît forța dată de (6.1.1) se referă la cazul static — cînd cele două particule se află în repaus una față de cealaltă — ea se numește forță de interacțiune electrostatică. Experiența arată că legea lui Coulomb (6.1.1) este adevărată numai pentru sarcini electrice aflate în repaus și de dimensiuni neglijabile în raport cu distanța dintre ele (sarcini punctiforme). În același timp trebuie remarcat că din această lege nu rezultă și cum anume se realizează interacțiunea între sarcinile electrice, ea menținînd vechea idee a interacțiunii la distanță introdusă în fizică prin legea atracției universale.

Forțele de interacțiune electrostatică, după cum arată experiența, sînt de atracție și de respingere. Între particule identice avem întotdeauna forțe de respingere. Există două tipuri de sarcini electrice, unele numite *sarcini pozitive* și altele numite *sarcini negative*. Între sarcini de același semn intervin forțe de respingere, iar între cele de semne contrare, forțe de atracție. De remarcat apoi că, în conformitate cu datele de pînă acum ale experienței fizice, admitem că toate sarcinile electrice cunoscute pînă în prezent se dovedesc a fi multipli întregi ai unei sarcini electrice elementare de valoare  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Menționăm aici că teoria fizică prevede existența unor particule numite quark, care ar trebui să aibă sarcina electrică fracționară (respectiv  $\pm \frac{1}{3} |e|$  și  $\pm \frac{2}{3} |e|$ ), dar pînă în prezent

existența acestor particule ipotetice nu a fost atestată de experiență. Legat de existența sarcinilor electrice elementare se poate pune în principiu problema dacă există vreo diferență între valoarea absolută a sarcinii elementare negative (purată de exemplu de electron) și cea a sarcinii elementare pozitive (purată de exemplu de proton). Experiențele arată că dacă o astfel de diferență există, ea este mai mică decît  $10^{-20} |e|$ .

Electronii pot fi îndepărtați din atomi sau molecule prin procese de ionizare, iar corpurile, în ansamblul lor, pot primi sau ceda electroni devenind prin aceasta încărcate negativ sau pozitiv. Ceea ce este remarcabil este faptul că în toate aceste procese, ca și în general în toate procesele naturii, acționează *legea conservării sarcinilor electrice*. Această lege consemnează că în toate procesele din natură suma algebrică a sarcinilor electrice nu se modifică și ea se dovedește a fi una din legile fundamentale ale naturii.

În cazul sarcinilor electrice aflate în mișcare s-a constatat că între ele intervine și o *interacțiune magnetică*, pe care o putem considera ca pe un efect relativist al mișcării. Interacțiunea dintre sarcini devine, în acest caz, mai complexă și se realizează prin forțe electromagnetice. Studiul acestor forțe s-a putut face pe baza noțiunii de *cîmp electromagnetic*, introdusă de Faraday încă din anul 1851. Experimental s-a dovedit că în cazul cel mai general forța care acționează asupra unei sarcini electrice punctiforme aflată în mișcare depinde numai de viteza ei  $v$ , de valoarea sarcinii ei  $Q$  și de poziția ei față de alte sarcini. Aceste constatări sînt cuprinse în următoarea expresie a forței  $\mathbf{F}$  ce acționează asupra sarcinii  $Q$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.1.3)$$



Aici  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt două mărimi vectoriale care determină cîmpul electromagnetic în punctul în care se găsește sarcina  $Q$ . Vectorul  $\mathbf{E}$  reprezintă *intensitatea cîmpului electric*, iar vectorul  $\mathbf{B}$  *inducția cîmpului magnetic*. Relația (6.1.3) ne arată că putem concepe interacțiunile dintre sarcinile electrice ca pe interacțiuni ale unei sarcini cu cîmpul electromagnetic creat de restul sarcinilor electrice. Așa cum vom arăta în continuare, cîmpul electromagnetic este definit printr-un număr relativ mic de mărimi fizice și de legi care îl caracterizează în mod univoc și complet. Cunoașterea acestor legi oferă posibilitatea tratării unitare a multitudinii de fenomene electromagnetice cunoscute pînă în prezent.

Cazul interacțiunii electrostatice a două particule aflate în repaus (cînd forța de interacțiune este dată de (6.1.1)) evident că poate fi considerat ca un caz particular al cazului general al sarcinilor în mișcare arbitrară (cînd forța de interacțiune ce acționează asupra unei sarcini electrice este dată de (6.1.3.)). În cazul static avem desigur numai un cîmp electrostatic. Atunci, dacă în interacțiunea descrisă de (6.1.1) considerăm particula 2 ca aflîndu-se în cîmpul creat de particula 1, din (6.1.3) rezultă că am putea scrie

$$\mathbf{F} = Q_2 \mathbf{E}. \quad (6.1.4)$$

Comparînd această formulă cu (6.1.1) se vede că expresia cîmpului electrostatic creat de o sarcină punctiformă  $Q$  este dată de relația

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.1.5)$$

unde  $\mathbf{r}$  reprezintă vectorul de poziție al punctului unde se socotește cîmpul în raport cu punctul unde se află sarcina ce crează cîmpul.

Revenind la discuțiile generale legate de proprietățile cîmpului electromagnetic, observăm că în conformitate cu (6.1.3) un cîmp electromagnetic acționează cu o forță asupra oricărei particule purtătoare de sarcină electrică plasată în cîmpul respectiv. În urma acestei acțiuni particula își schimbă în general energia, impulsul și momentul cinetic, ceea ce înseamnă că însuși cîmpul electromagnetic posedă astfel de mărimi. Rezultată deci, că însuși cîmpul electromagnetic este o entitate fizică cu existență reală și cu proprietăți specifice care îl definesc. Așa cum vom arăta mai tîrziu, cîmpul electromagnetic are o existență reală, independentă de sarcinile electrice. Cîmpul electromagnetic reprezintă o formă de existență a materiei prin intermediul căreia interacțiunile electromagnetice se transmit din aproape în aproape cu viteză finită ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Pentru a putea defini un cîmp electromagnetic la nivel macroscopic și în cadrul unei teorii clasice, fără a face apel în mod direct la forțele cu care el acționează asupra sarcinilor electrice, să observăm că din relația (6.1.3) respectiv din faptul că  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  [adică  $\mathbf{F}$  depinde de poziția ( $\mathbf{r}$ ) și de timpul ( $t$ )] rezultă că avem  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

În aceste dependențe continue de poziția ( $\mathbf{r}$ ) și de timpul ( $t$ ) ale valorilor macroscopice ale cîmpului electromagnetic vom înțelege prin  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  valorile medii ale cîmpurilor microscopice create de particulele încărcate



electric (electroni, protoni etc.), aflate într-o stare de mișcare rapidă. Aceste valori medii se definesc cu ajutorul noțiunii de „infini mic din punct de vedere fizic” prin care, potrivit lui Lorentz, trebuie înțelese elemente de volum, de arie, de linie sau intervale de timp suficient de mari în comparație cu distanțele dintre particule microscopice, perioadele lor de rotație  $T_0$ , respectiv în comparație cu neomogenitățile microscopice ale mediului și câmpului, dar în același timp, aceste elemente trebuie să fie suficient de mici în comparație cu neomogenitățile macroscopice ale mediului și câmpului, în așa fel încât valorile medii ale câmpului în două astfel de elemente vecine, să difere foarte puțin între ele. Aceasta înseamnă că funcțiile

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mathcal{V} T_0} \int \mathbf{E}^{micro}(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} dt \quad (6.1.6)$$

trebuie să fie funcții continue de poziție și timp. (Pentru detalii vezi și considerațiile făcute în § 6.8).

În aceste condiții, pentru a afla funcțiile  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  trebuie să cunoaștem anumite ecuații pe care le satisfac. Astfel de ecuații le putem obține din datele experimentale și cu ajutorul raționamentului matematic. Ecuațiile fundamentale pe care le satisfac funcțiile vectoriale  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  sînt cunoscute sub denumirea de *ecuațiile lui Maxwell*. Aceste ecuații joacă în electromagnetism un rol similar cu rolul pe care îl joacă în mecanica clasică ecuațiile lui Newton.

Pentru a face intuitive unele proprietăți ale câmpului electromagnetic se folosește noțiunea de *linie de câmp*. Linia de câmp reprezintă curba tangentă la vectorul  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  (respectiv la  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ). Experiența arată că liniile câmpului electrostatic își au originea în sarcinile pozitive și se sfîrșesc în cele negative sau la infinit, în timp ce liniile câmpului magnetic sînt întotdeauna curbe închise. Legat de acest fapt, se spune că în cazul electric câmpul are surse (aceste surse fiind tocmai sarcinile electrice), iar în cazul magnetic câmpul nu are surse (nu există „sarcini magnetice”; facem abstracție aici și în restul cărții de teoriile recente, neconfirmate încă experimental, conform cărora în natură ar exista și sarcini magnetice, așa numiții „unipoli Dirac”).

Facem de asemenea precizarea că teoria clasică a câmpului electromagnetic și a particulelor încărcate electric, cuprinde legile fundamentale ale electrodinamicii clasice cu valabilitate numai în acele cazuri în care lungimea de undă asociată particulelor  $\left( \lambda = \frac{h}{p}, h \text{ fiind constanta lui} \right.$

Planck, iar  $p$  impulsul particulei purtătoare de sarcină electrică) este mică în comparație cu dimensiunile spațiale ce sînt luate în considerație. În această aproximație însă, pot fi studiate o serie de fenomene electromagnetice, inclusiv mișcarea nerelativistă a unor particule grele (protoni, deuteroni, particule  $\alpha$  etc.) și mișcarea relativistă a particulelor ușoare (a electronilor), în care cazuri tratarea cuantică nu aduce decît corecții neglijabile. Firește, există multe fenomene electromagnetice la scară atomică și subatomică care nu pot fi studiate decît în cadrul unor teorii cuantice, dar care nu vor fi abordate în acest volum.



## § 6.2. ECUAȚIILE MAXWELL-LORENTZ

Proprietatea esențială a „părții” magnetice a unui câmp electromagnetic de a avea numai linii de câmp închise poate fi exprimată printr-o lege diferențială ce se obține cu ajutorul noțiunii de flux. Numim *flux* al vectorului  $\mathbf{B}$  prin elementul de suprafață  $dS$  mărimea  $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , unde  $d\mathbf{S} = n dS$  este vectorul asociat (fig. 6.2.1). Dacă ne referim la o suprafață finită, vom numi flux al vectorului  $\mathbf{B}$  prin suprafața respectivă mărimea

$$\Phi = \iint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.6.1)$$

Întrucît, după cum s-a menționat, experiența arată că liniile câmpului magnetic sînt întotdeauna curbe închise, luînd o suprafață închisă arbitrară numerele liniilor de câmp magnetic care intră și a celor care ies prin această suprafață sînt egale între ele. Aceasta înseamnă că fluxul total al vectorului  $\mathbf{B}$  printr-o suprafață închisă arbitrară este nul. Matematic aceasta se exprimă prin relația

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (6.2.2)$$

Aplicînd teorema Gauss-Ostrogradski [62] integrala de suprafață se poate transforma în integrală de volum conform relației

$$\oiint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \nabla \mathbf{B} dV. \quad (6.2.3)$$

Întrucît suprafața închisă  $(S)$  care intră în discuție în (6.2.3) este arbitrară, relația (6.2.3) este îndeplinită numai dacă

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (6.2.4)$$

Această relație reprezintă una dintre ecuațiile lui Maxwell și exprimă faptul că nu avem surse ale câmpului magnetic în nici un punct din spațiul unde este definit câmpul respectiv.

Un alt fenomen remarcabil legat de câmpul electromagnetic îl constituie *inducția electromagnetică*. Din experiență cunoaștem o lege a inducției electromagnetice (legea lui Faraday), care leagă tensiunea electromotoare (t.e.m)  $\mathcal{E}$  indusă într-un circuit închis  $(\Gamma)$  de variația în timp a fluxului magnetic  $\Phi$  printr-o suprafață arbitrară  $(S)$ , ce se sprijină pe conturul  $(\Gamma)$  al circuitului (fig. 6.2.2), prin relația

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.2.5)$$



Reamintim că t.e.m.  $\mathcal{E}$  este egală cu lucrul mecanic al câmpului electric  $\mathbf{E}$  necesar pentru deplasarea unității de sarcină electrică în lungul circuitului închis  $(\Gamma)$ .

Ținând cont de expresia (6.1.3) avem atunci

$$\mathcal{E} = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (6.2.6)$$

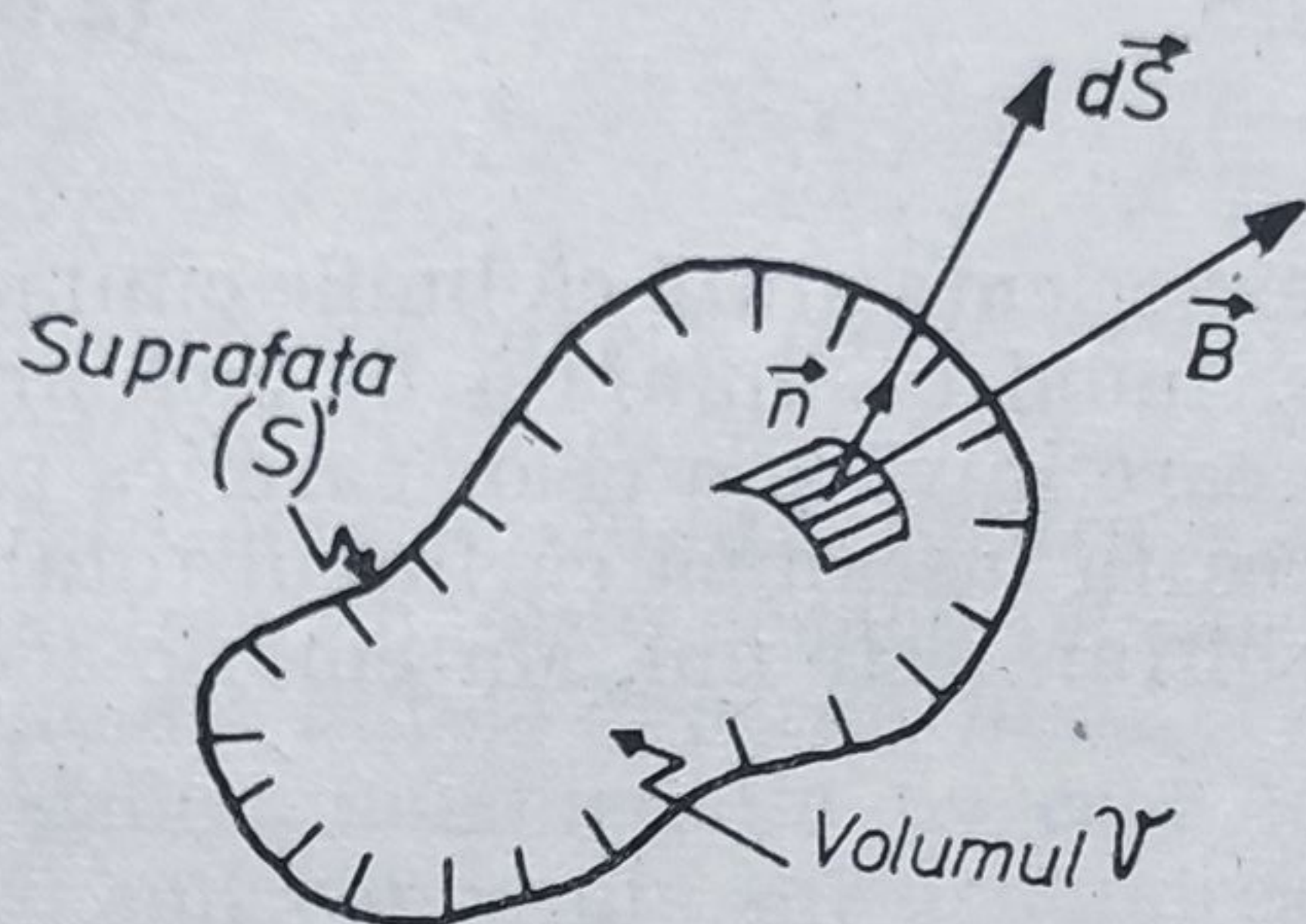


Fig. 6.2.1

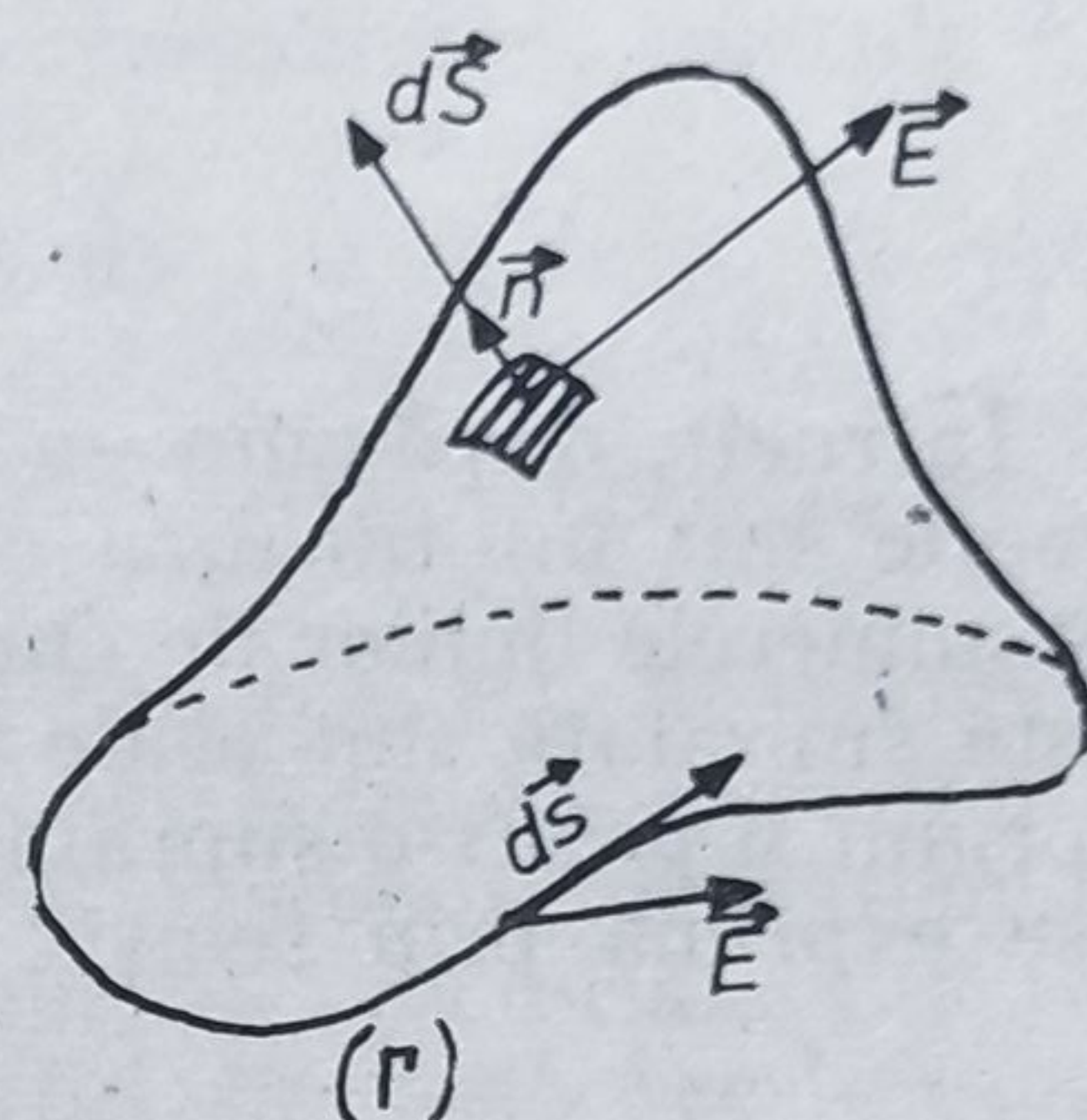


Fig. 6.2.2

Relațiile (6.2.5) și (6.2.6) sînt adevărate pentru orice contur închis, arbitrar ales. Aplicînd teorema lui Stokes [62] transformăm integrala pe contur (6.2.6) (numită și circulația vectorului  $\mathbf{E}$  pe conturul  $\Gamma$ ), într-o integrală pe o suprafață arbitrară ce se sprijină pe conturul  $(\Gamma)$ , prin relația

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.2.7)$$

Ținînd cont de (6.2.5) și de (6.2.1) obținem

$$\iint_{(S)} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

sau

$$\iint_{(S)} \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (6.2.8)$$

Întrucît curba închisă  $(\Gamma)$  și suprafața  $(S)$ , ce se sprijină pe ea sînt arbitrar alese, înseamnă că relația (6.2.8) este îndeplinită numai dacă este satisfăcută relația

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.2.9)$$



Aceasta este tot o ecuație a lui Maxwell și împreună cu (6.2.4) constituie prima pereche de ecuații Maxwell.

Vom trece acum să căutăm cea de a doua pereche de ecuații Maxwell. Pentru aceasta să considerăm în spațiu o distribuție arbitrară macroscopică, de sarcini electrice. Fie  $\rho(\mathbf{r}, t) = dQ/d\mathcal{V}$  densitatea distribuției lor volumetrice. Atunci, câmpul electric creat de sarcina  $dQ'$  la distanța  $\mathbf{r}$  de ea (fig. 6.2.3), într-un mediu omogen și izotrop, caracterizat prin constanta dielectrică  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , va fi dat de expresia

$$d\mathbf{E}' = \frac{dQ'}{4\pi\epsilon r^3} \cdot \mathbf{r} = \frac{\rho d\mathcal{V}'}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.2.10)$$

Fluxul vectorului  $d\mathbf{E}'$  printr-un element de suprafață  $d\mathbf{S}$  va fi edat de expresia

$$d\Phi' = d\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.2.11)$$

Dacă integrăm acest flux pe o suprafață închisă arbitrară  $S$ , care închide în interiorul său elementul de volum  $d\mathcal{V}'$ , vom avea fluxul total prin suprafața închisă creat de sarcina  $dQ'$  dat de expresia

$$d\Phi = \oint d\Phi' = \frac{\rho d\mathcal{V}'}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{\rho d\mathcal{V}'}{4\pi\epsilon} \oint d\Omega = \frac{\rho d\mathcal{V}'}{\epsilon} = \frac{dQ'}{\epsilon} \quad (6.2.12)$$

unde  $d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}$  este unghiul solid sub

care se vede elementul de suprafață  $d\mathbf{S}$  din punctul unde se află sarcina  $dQ'$  (fig. 6.2.3).

Expresia (6.2.12) ne dă fluxul creat de sarcina  $dQ' = \rho d\mathcal{V}'$  printr-o suprafață închisă ce o înconjoară. Evident, atunci fluxul total al câmpului electric datorat tuturor sarcinilor care se găsesc închise în interiorul suprafeței, se obține însumând fluxul elementar  $d\Phi'$  după toate sarcinile din interior, adică integrând după  $dQ'$ .

Atunci, din (6.2.12) avem

$$\Phi = \iiint \frac{dQ'}{\epsilon} = \iiint \frac{\rho d\mathcal{V}'}{\epsilon}. \quad (6.2.13)$$

Pe de altă parte, fluxul total  $\Phi$  al câmpului electric  $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}'$ , datorat tuturor sarcinilor din interior, prin suprafața închisă ( $S$ ) poate fi scris sub forma

$$\Phi = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (6.2.14)$$

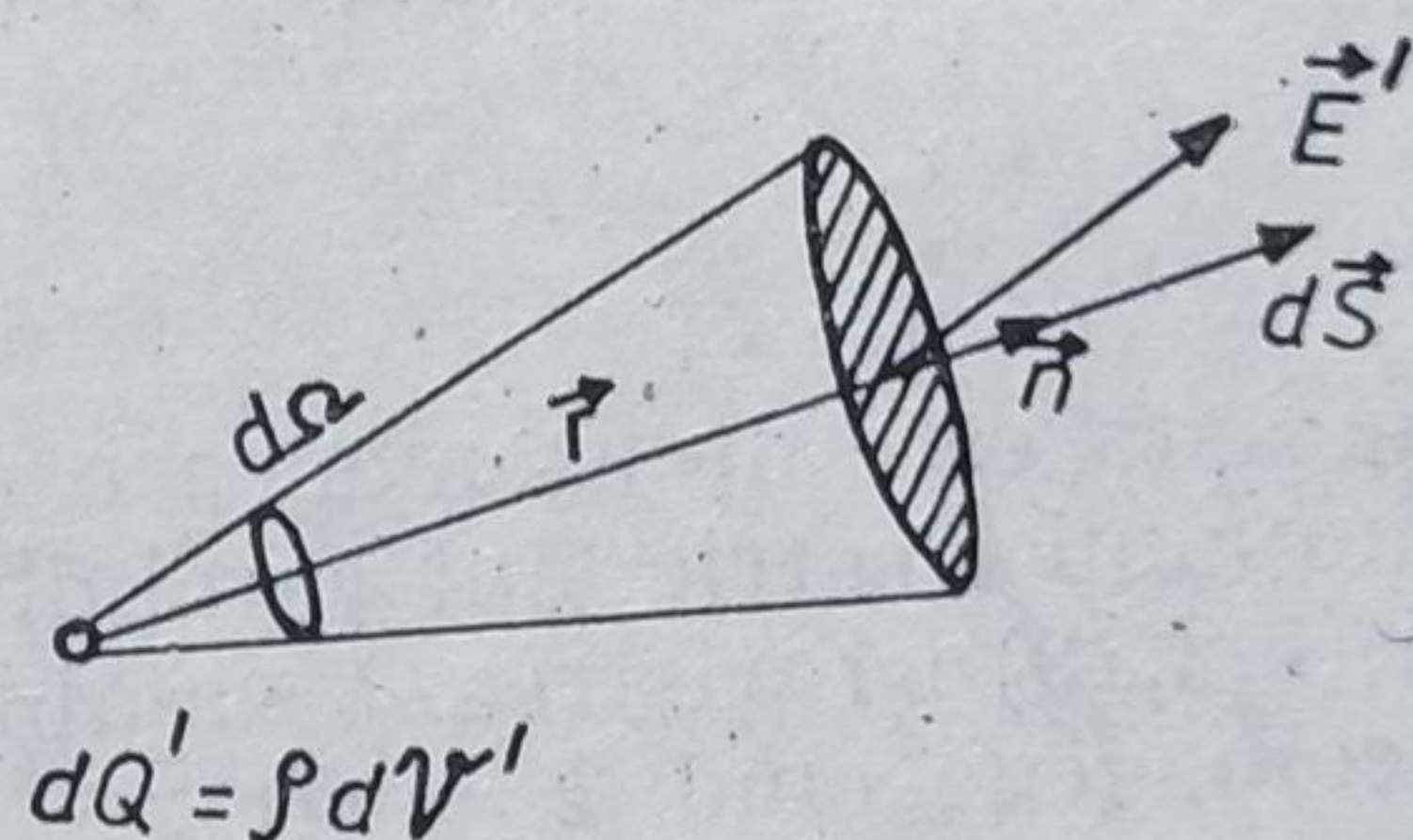


Fig. 6.2.3



Aplicînd teorema lui Gauss-Ostrogradski, obținem

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \iiint \nabla \mathbf{E} \, d\mathcal{V}. \quad (6.2.15)$$

Din relația (6.2.13) și (6.2.15) obținem

$$\iiint \nabla \mathbf{E} \, d\mathcal{V} = \iiint \frac{\rho \, d\mathcal{V}}{\epsilon}. \quad (6.2.16)$$

Întrucît și de astă dată suprafața închisă considerată (și deci și volumul din interiorul ei) a fost aleasă arbitrar, relația (6.2.16) este satisfăcută numai dacă este satisfăcută relația

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (6.2.17)$$

Considerînd  $\epsilon = \text{const.}$ , putem scrie  $\epsilon \nabla \mathbf{E} = \nabla(\epsilon \mathbf{E})$ . Dacă definim *vectorul inducție electrică*  $\mathbf{D}$  prin relația

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (6.2.18)$$

rezultă că din (6.2.17) obținem ecuația

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (6.2.19)$$

Aceasta este de asemenea o ecuație Maxwell și exprimă faptul că sursele cîmpului electric sînt sarcinile electrice. De menționat că relațiile (6.2.18) și (6.2.19) își păstrează valabilitatea și pentru cazul mediilor anizotrope și neomogene cînd  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ .

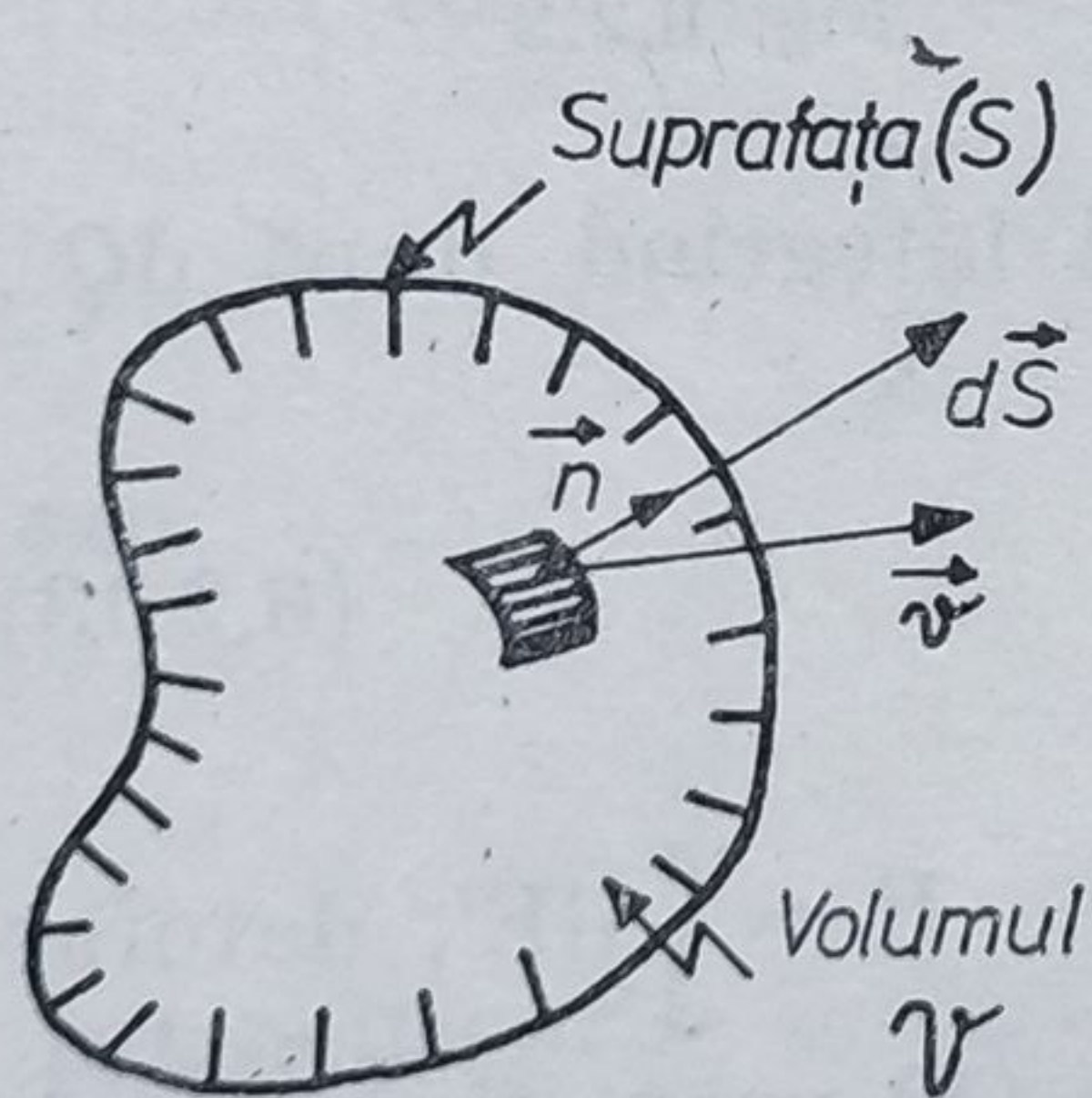


Fig. 6.2.4

Ecuația care împreună cu (6.2.19) formează cea de a doua pereche de ecuații Maxwell se obține plecînd de la legea de conservare a sarcinii electrice. Pentru a exprima în formă diferențială această lege, vom considera volumul  $\mathcal{V}$ , delimitat de o suprafață închisă ( $S$ ) (fig. 6.2.4) prin care pot să intre sau să iasă sarcini electrice. Fie  $\mathbf{v}$  viteza acestor sarcini și  $\rho$  densitatea lor volumetrică. Atunci, în intervalul de timp  $dt$  prin suprafața  $d\mathbf{S}$  va trece sarcina

$$dQ = \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} \, dt. \quad (6.2.20)$$

Vom introduce mărimea vectorială (definită în sens macroscopic)

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (6.2.21)$$



numită *densitate de curent*. Intensitatea curentului total care trece printr-o suprafață (S) este dată atunci de relația

$$I = \iint_{(S)} \mathbf{J} \, dS \quad (6.2.22)$$

iar dacă suprafața totală (S) este închisă

$$I = \oiint_{(S)} \mathbf{J} \, dS. \quad (6.2.23)$$

După cum se vede din (6.2.20) în cazul unei suprafețe închise,  $I$  reprezintă variația în timp a sarcinilor electrice din interiorul volumului  $\mathcal{V}$ . Deci putem scrie

$$I = - \frac{dQ}{dt}. \quad (6.2.24)$$

Semnul minus aici marchează faptul că sarcinile care ies (respectiv intră) duc la o scădere (respectiv creștere) a sarcinii interioare. Sarcina interioară  $Q$  se scrie sub forma

$$Q = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho \, d\mathcal{V}. \quad (6.2.25)$$

Concluzia obținută că variația sarcinii interioare este legată de intensitatea curentului prin suprafața închisă (conform relației 6.2.24) este o expresie nemijlocită a faptului că variația sarcinii electrice într-un volum dat se poate face numai prin transferul de sarcină prin suprafața ce mărginește volumul dat; în interiorul acestui volum nu se crează și nu se distrug sarcini electrice. Această concluzie constituie tocmai legea de conservare a sarcinii electrice.

Aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski, din (6.2.23), obținem

$$I = \oiint_{(S)} \mathbf{J} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\mathcal{V}. \quad (6.2.26)$$

Combinând relațiile (6.2.24) – (6.2.26), obținem

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) d\mathcal{V} = 0. \quad (6.2.27)$$

Întrucât volumul la care ne-am referit și suprafața care îl mărginește au fost alese arbitrar, relația (6.2.27) este îndeplinită dacă este satisfăcută ecuația

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (6.2.28)$$



Această relație este cunoscută sub denumirea de *ecuație de continuitate* (vezi analogia cu (2.27)) și exprimă în formă diferențială legea de conservare a sarcinilor electrice.

Folosind relația (6.2.19), rezultă că din (6.2.28) putem scrie relația

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{D}) + \nabla \mathbf{J} = \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0. \quad (6.2.29)$$

Această relație arată că mărimea

$$\mathbf{J}_a = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.2.30)$$

joacă rol de densitate de curent, fapt care a fost remarcat pentru prima dată de către Maxwell în anul 1861. Maxwell a introdus pentru  $\mathbf{J}_a$  denumirea de *curent de deplasare*, rezervând pentru  $\mathbf{J}$ , definit de (6.2.21), denumirea de *curent de conducție*. Tot Maxwell formulează ideea că acțiunea câmpului magnetic asupra curentului de deplasare este analogă cu acțiunea lui asupra curentului de conducție.

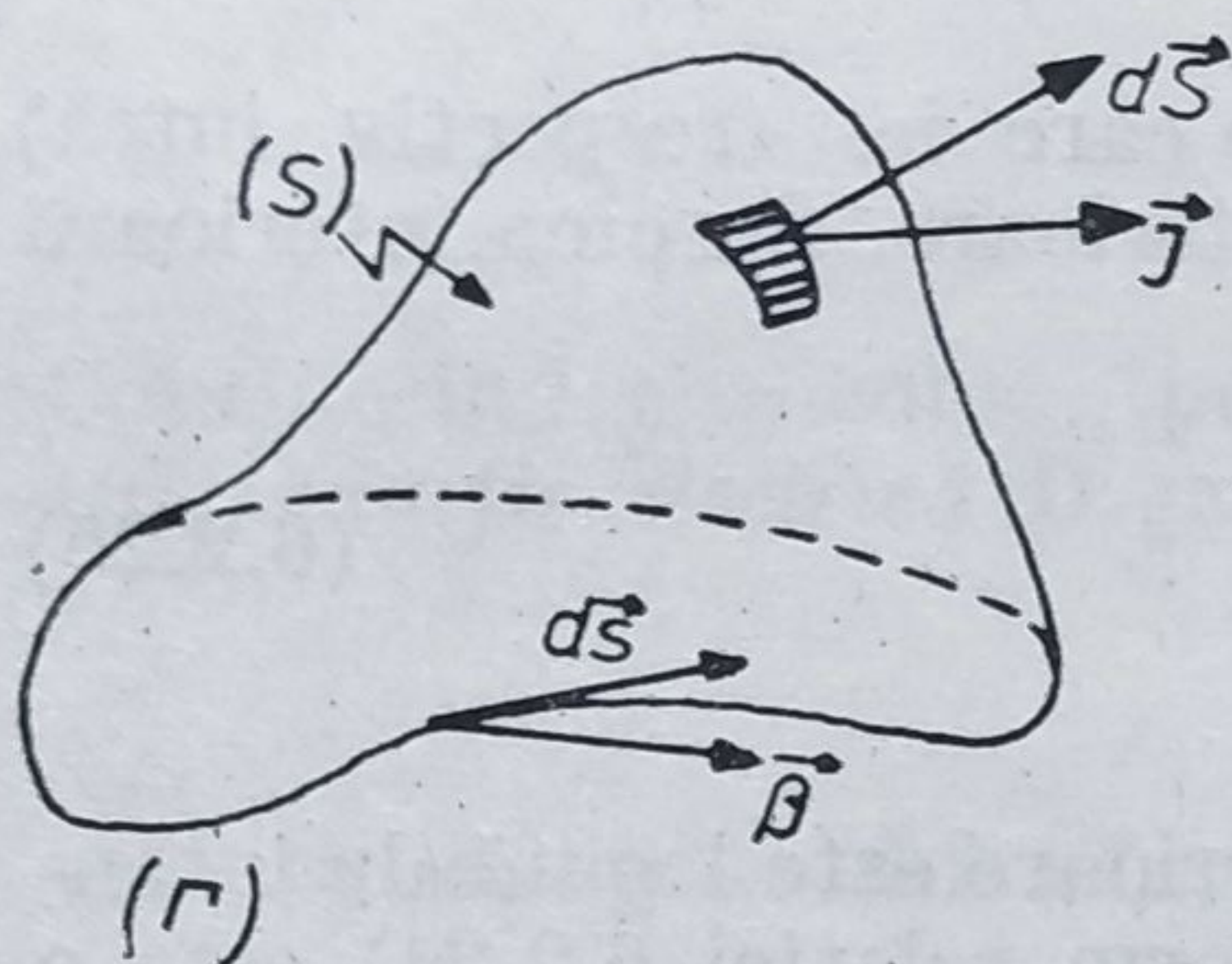


Fig. 6.2.5

Ampère a demonstrat experimental că circulația vectorului inducție magnetică  $\mathbf{B}$  de-a lungul unei curbe închise ( $\Gamma$ ) arbitrare (fig. 6.2.5) este proporțională cu fluxul vectorului  $\mathbf{J}$ , al curentului de conducție printr-o suprafață arbitrară ( $S$ ) care se sprijină pe respectiva curbă închisă. Această relație de legătură poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{\mu_r \mu_0} \oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \, ds = \iint_{(S)} \mathbf{J} \, dS. \quad (6.2.31)$$

Aici  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  și reprezintă permitivitatea magnetică a vidului, iar  $\mu_r = \mu/\mu_0$  permitivitatea magnetică relativă a mediului material, presupus omogen și izotrop, în care sînt plasați curenții  $\mathbf{J}$ . Dacă definim vectorul

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \cdot \mathbf{B} \quad (6.2.32)$$

numit și *vector intensitate a câmpului magnetic* și luăm în considerare ipoteza lui Maxwell (verificată ulterior experimental), conform căreia curentul de deplasare  $\mathbf{J}_a$  joacă un rol similar cu curentul de conducție  $\mathbf{J}$ , atunci în locul relației (6.2.31) se poate scrie relația

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{H} \, ds = \iint_{(S)} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dS. \quad (6.2.33)$$



Transformând membrul stîng al acestei relații cu ajutorul teoremei lui Stokes în forma

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{H} \, ds = \iint_{(S)} \nabla \times \mathbf{H} \, dS \quad (6.2.34)$$

din (6.2.33) obținem relația

$$\iint_{(S)} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{(S)} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.2.35)$$

Deoarece suprafața luată în discuție este arbitrară rezultă că această relație este adevărată numai dacă avem satisfăcută ecuația

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.2.36)$$

Aceasta este tot o ecuație Maxwell care împreună cu (6.2.19) formează cea de a doua pereche de ecuații Maxwell. Ecuația (6.2.36) poate fi obținută și prin înlocuirea în (6.2.29) a expresiei  $\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$ , pentru că divergența dintr-un rotor al unui vector este întotdeauna nulă [ $\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0$ ].

Rezumînd cele prezentate mai sus putem spune că cîmpul electromagnetic este descris de patru mărimi vectoriale  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  care satisfac grupului de ecuații Maxwell, trecute în tabelul de mai jos.

	Forma diferențială	Forma integrală
I-a pereche	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{E} \, ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \mathbf{B} \, dS \quad (6.2.37)$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.2.38)$
II-a pereche	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \, ds = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (6.2.39)$
	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oiint \mathbf{D} \, dS = \iiint \rho \, dV \quad (6.2.40)$

Aceste ecuații trebuie completate, așa cum s-a văzut mai sus, cu relațiile de legătură între inducțiile  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{B}$  și intensitățile corespunzătoare  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$ . Pentru vid aceste relații de legătură au forma

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (6.2.41)$$



iar pentru mediile izotrope din punct de vedere electric și magnetic sînt satisfăcute relațiile

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (6.2.42)$$

cu  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  și  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Relațiile (6.2.42) se numesc *legi de material*, deoarece mărimile  $\epsilon_r$  (constanta dielectrică relativă) și  $\mu_r$  (permitivitate magnetică relativă) sînt determinate în mod nemijlocit de natura substanțelor introduse în câmp (vezi § 6.6.5 și § 6.8.4). De asemenea, ecuațiile lui Maxwell conțin așa numitele *condiții de frontieră* pe care componentele câmpului electromagnetic (adică vectorii  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$ ) le satisfac pe suprafețele ( $S_i$ ) în care constantele de material  $\epsilon$  și  $\mu$  variază brusc (discontinuu), cazuri întîlnite într-o serie de situații de interes practic.

Pentru a afla aceste condiții de frontieră vom presupune mai întîi că saltul mărimilor  $\epsilon$  și  $\mu$  de la valorile  $(\epsilon_1, \mu_1)$  la  $(\epsilon_2, \mu_2)$  se produce pe secțiunea transversală a unui strat ce separă cele două medii, de grosime  $\delta h$ , în care câmpul electromagnetic variază continuu. Vom scrie ecuațiile lui

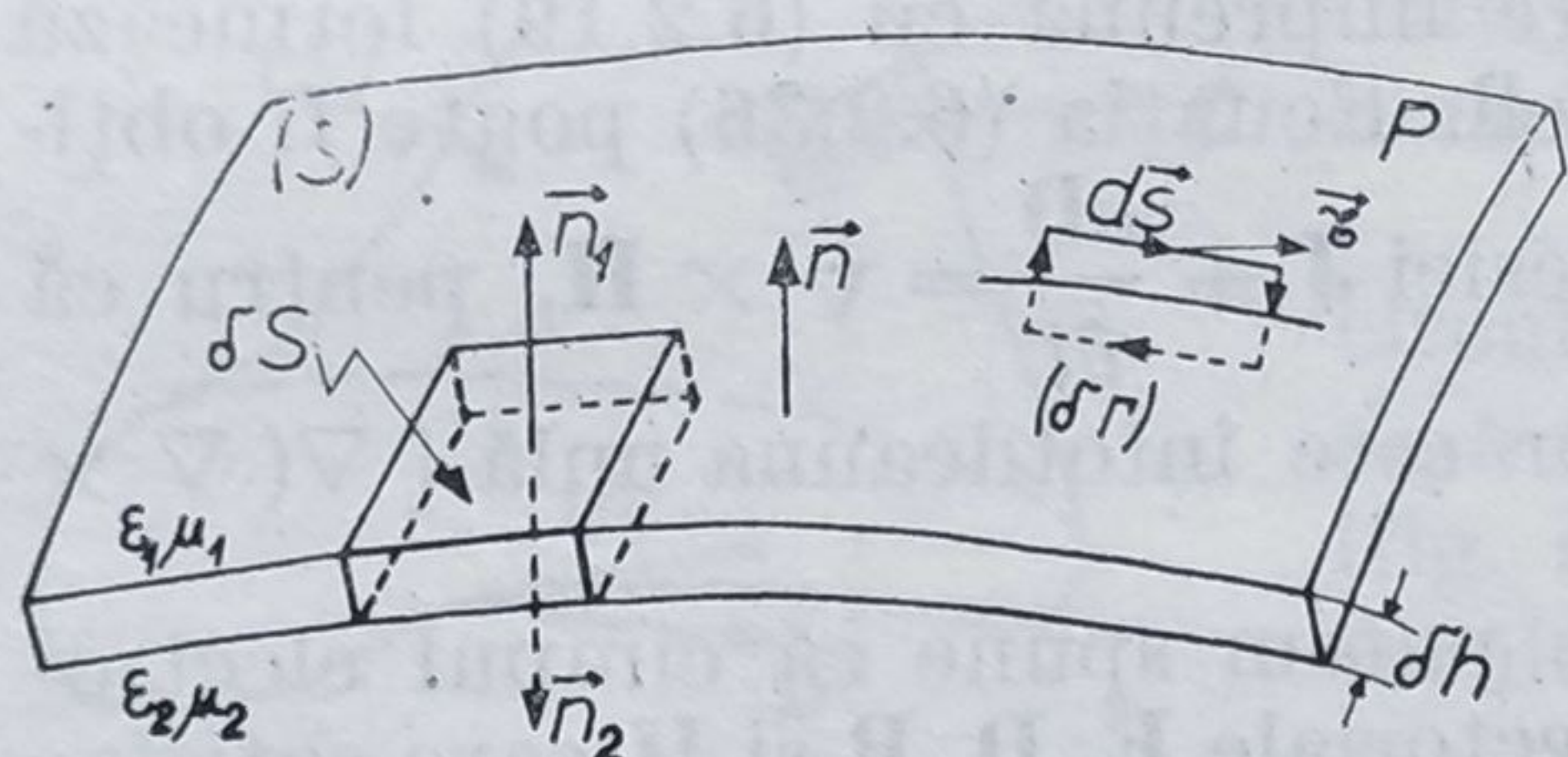


Fig. 6.2.6

Maxwell (6.2.37) — (6.2.40) sub formă integrală: pentru acest strat, vom socoti integralele respective și apoi vom particulariza rezultatele obținute pentru  $\delta h \rightarrow 0$ , cînd stratul de separație se reduce la suprafața de separație ( $S$ ) (fig. 6.2.6). Astfel, dacă delimităm din stratul de separație un element de volum de formă paralelipipedică, de arie  $\delta S$  și înălțime  $\delta h$  și alegem versorul normalei pozitive  $\mathbf{n}$  la ( $S$ )

orientat în spre mediul caracterizat prin  $(\epsilon_1, \mu_1)$ . atunci conform ecuației (6.2.38) avem

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \iint_{\delta S} \mathbf{B} dS = (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) \mathbf{n} \delta S = 0$$

respectiv

$$\mathbf{n}(\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) = 0. \quad (6.2.43)$$

Acest rezultat stabilește că componenta normală a vectorului  $\mathbf{B}$  este continuă pe suprafața de separație.

În mod analog, din ecuația (6.2.40) se obține

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \iint_{\delta S} \mathbf{D} dS = (\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}) \mathbf{n} dS = \rho \delta S \delta h = \sigma \delta S$$

respectiv

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}) = \sigma \quad (6.2.44)$$

unde prin  $\sigma$  s-a notat densitatea superficială de sarcini electrice din suprafața ( $S$ ) de separație. Prin urmare, componenta normală a vectorului  $\mathbf{D}$  suferă un salt egal cu  $\sigma$  pe suprafața de separație a celor două medii.



Pentru a afla condițiile de frontieră pentru celelalte două mărimi vectoriale  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$ , vom alege un contur rectangular închis ( $\delta\Gamma$ ) cu bazele de lungimi  $\delta s$  situate pe fețele stratului de separație și vom nota prin  $\tau$  versorul tangentei la suprafața de separație ( $S$ ). Atunci, ținând cont de (6.2.37) avem

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \oint_{(\delta\Gamma)} \mathbf{E} \, ds = (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)})\tau \, ds = \lim_{\delta h \rightarrow 0} (-\dot{\mathbf{B}} \, ds \, \delta h) = 0$$

Prin urmare

$$(\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)})\tau = 0$$

sau

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) = 0 \quad (6.2.45)$$

Această condiție stabilește că componenta tangențială a vectorului  $\mathbf{E}$  este continuă pe suprafața de separație a celor două medii.

În sfârșit, ținând cont de ecuația (6.2.39), putem scrie

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \oint_{(\delta\Gamma)} \mathbf{H} \, ds = (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)})\tau \, ds = \lim_{\delta h \rightarrow 0} (\mathbf{J}_s \, ds + \mathbf{D} \, ds) \delta h = \mathbf{J}_s \, ds$$

unde prin  $\mathbf{J}_s \rightarrow \mathbf{J}/\delta h$  s-a notat densitatea superficială de curent de conducție din suprafața de separație. Deci

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) = \mathbf{J}_s \quad (6.2.46)$$

adică componenta tangențială a vectorului  $\mathbf{H}$  suferă pe suprafața de separație un salt egal cu  $\mathbf{J}_s$ . Așa cum se va vedea mai târziu, aceste condiții de frontieră exprimă legile de refracție ale liniilor câmpului electromagnetic la trecerea dintr-un mediu în alt mediu.

În ecuațiile (6.2.37) — (6.2.42), mărimile  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  se consideră cunoscute, iar mărimile vectoriale  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  se consideră necunoscute. Din analiza vectorială se știe că un câmp vectorial (un câmp de vectori  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ) este univoc definit (în sensul că putem afla în mod univoc funcția  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ), dacă pentru câmpul respectiv se cunosc divergența și rotorul — adică mărimile  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  și  $\nabla \times \mathbf{E}$ . Ținând cont de acest fapt, rezultă că ecuațiile (6.2.37) — (6.2.42) definesc univoc câmpul electromagnetic prin mărimile  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$ , dacă sînt date mărimile  $\rho$  și  $\mathbf{J}$ . Menționăm și faptul că ecuațiile lui Maxwell oferă soluții finite pentru  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  și în cazul cînd  $\rho = 0$ ;  $\mathbf{J} = 0$ , ceea ce constituie încă o dovadă a faptului că un câmp electromagnetic poate exista și independent de sarcinile electrice care l-au generat.

În § 6.1 s-a văzut că asupra sarcinilor ce se mișcă într-un câmp electromagnetic acționează forțe de tipul (6.1.3), numite și *forțe Lorentz*. Ținând cont că, așa cum știm din mecanică, mișcarea unui corp supus acțiunii unei forțe  $\mathbf{F}$  este descrisă de ecuația

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (6.2.47)$$



unde  $\mathbf{p}$  este impulsul corpului, rezultă că mișcarea unei particule purtătoare de sarcină electrică  $Q$  într-un câmp electromagnetic este descrisă de ecuația

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.2.48)$$

Această ecuație este cunoscută sub denumirea de *ecuație Lorentz*. De reținut faptul că în ecuația (6.2.48) câmpurile ce trebuie luate în considerație sînt câmpurile totale: câmpurile exterioare plus câmpurile create de particula însăși. În majoritatea cazurilor de interes practic însă, câmpurile proprii ale particulelor pot fi considerate suficient de slabe și deci neglijabile în calcule în comparație cu câmpurile exterioare.

Pentru distribuții continue de sarcini electrice ecuația (6.2.48) poate fi scrisă și într-o „formă locală”, adică într-o formă care se referă la sarcinile locale dintr-un element de volum — deci la densitatea de sarcină electrică. Pentru aceasta, se scrie impulsul  $\mathbf{p}$  sub forma

$$\mathbf{p} = \iiint \mathbf{p}_0 d\mathcal{V} \quad (6.2.49)$$

unde  $\mathbf{p}_0$  reprezintă densitatea volumetrică de impuls. Sarcina  $dQ$  ce se află în elementul de volum  $d\mathcal{V}$  poate fi considerată ca o sarcină punctiformă și deci pentru ea este valabilă o ecuație de mișcare de tipul (6.2.48). Întrucît impulsul sarcinii  $dQ$  este  $\mathbf{p}_0 d\mathcal{V}$  înseamnă că putem scrie

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_0 d\mathcal{V}) = dQ (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.2.50)$$

unde  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sînt câmpurile care acționează local asupra sarcinii  $dQ$ . Dar,  $dQ = \rho d\mathcal{V}$  și elementul de volum  $d\mathcal{V}$  este arbitrar, astfel că din (6.2.50) obținem relația

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.2.51)$$

Această ecuație este cunoscută sub denumirea de *formă locală a ecuației Lorentz*.

Legat de ecuația Lorentz (6.2.48) trebuie precizat că ea este complet independentă de ecuațiile Maxwell (în sensul că ea nu rezultă din aceste ecuații). În plus, ecuația Lorentz împreună cu ecuațiile Maxwell formează un sistem complet de ecuații, în sensul că aceste ecuații împreună dau o descriere univocă și completă a tuturor comportărilor și manifestărilor sarcinilor electrice și a câmpurilor electromagnetice. Acest sistem de ecuații poartă denumirea de *ecuații Maxwell-Lorentz*. Din expresiile (6.2.37) — (6.2.42) și (6.2.48) ale ecuațiilor Maxwell-Lorentz se vede că dacă se cunosc pozițiile și vitezele la un moment dat ale sarcinilor și valorile la același



moment ale câmpurilor și ale derivatelor lor de ordinul întâi, atunci prin integrarea respectivelor ecuații se pot obține valorile coordonatelor și vitezelor particulelor încărcate electric și valorile câmpului electromagnetic în orice moment ulterior. Acest fapt reprezintă *principiul determinismului* pentru fenomene electromagnetice.

Este de remarcă de asemenea faptul că domeniul de aplicabilitate al ecuațiilor Maxwell-Lorentz este considerabil de mare. Ele guvernează comportarea fenomenelor electromagnetice la scara cosmică, au aplicabilitate în toată electrotehnica și radiotehnica, permit să se studieze fenomenele electromagnetice ce se petrec cu sarcinile individuale etc. De notat însă că există, la scara atomică și subatomică, fenomene electromagnetice a căror comportare se înscrie în afara domeniului de aplicabilitate a ecuațiilor Maxwell-Lorentz.

### § 6.3. ENERGIA, IMPULSUL ȘI MOMENTUL CINETIC AL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Guvernarea comportării fenomenelor electromagnetice de către ecuațiile Maxwell-Lorentz implică o consecință importantă și anume faptul că entitatea fizică pe care o numim câmp electromagnetic posedă energie, impuls și moment cinetic. Aceste caracteristici atestă existența câmpului electromagnetic independent de forțele cu care el acționează asupra sarcinilor electrice.

Pentru a evidenția energia câmpului electromagnetic vom calcula lucrul mecanic transmis în unitate de timp — adică puterea transmisă de către câmpul electromagnetic sarcinilor aflate în câmp. Notăm mai întâi că puterea transmisă sarcinii  $dQ = \rho d\mathcal{V}$ , aflată în elementul de volum  $d\mathcal{V}$ , poate fi scrisă sub forma

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = dQ(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (6.3.1)$$

unde  $d\mathbf{F}$  reprezintă forța ce acționează asupra sarcinii  $dQ$  (vezi formulele (6.2.48) — (6.2.51)), iar  $\mathbf{v}$  este viteza sarcinii  $dQ$ . Pentru a obține puterea transmisă sarcinilor dintr-un volum finit trebuie să integrăm expresia (6.3.1) pe întreg volumul ocupat de sarcini. Atunci obținem

$$P = \frac{dW}{dt} = \iiint \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (6.3.2)$$

unde  $W$  reprezintă energia totală a sistemului de sarcini. Observând că  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , din (6.3.2) dacă ținem cont și de (6.2.21), obținem

$$\frac{dW}{dt} = \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V}. \quad (6.3.3.)$$



Înlocuind aici pe  $\mathbf{J}$  cu expresia dată de (6.2.39) putem scrie

$$\frac{dW}{dt} = \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = \iiint \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\mathcal{V} - \iiint \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathcal{V}. \quad (6.3.4)$$

Această expresie poate fi transformată prin adăugarea în partea ei dreaptă a expresiei nule (vezi (6.2.37))

$$- \iiint \mathbf{H} \cdot \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathcal{V}. \quad (6.3.5.)$$

Obținem atunci din (6.3.4) relația

$$\begin{aligned} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} &= \iiint (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) d\mathcal{V} - \\ &- \iiint \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Dar din analiza vectorială se știe că [62]

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (6.3.7)$$

astfel că relația (6.3.6) se transcrie sub forma

$$\iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = - \iiint \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathcal{V} - \iiint \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathcal{V}. \quad (6.3.8)$$

Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski putem scrie

$$\iiint \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathcal{V} = \oiint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.3.9)$$

De asemenea, putem scrie, ținând seama de relațiile (6.2.42)

$$\iiint \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d\mathcal{V} \right] = \frac{\partial W_{EB}}{\partial t}. \quad (6.3.10)$$

În sfârșit, cu relațiile (6.3.9) și (6.3.10), din (6.3.8) obținem

$$- \frac{\partial W_{EB}}{\partial t} = \oiint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V}. \quad (6.3.11)$$



După cum se vede din (6.3.10), mărimea  $W_{EB}$  este o energie legată exclusiv de câmpul electromagnetic — în sensul că în expresia ei intră numai mărimile  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  ce caracterizează câmpul — și nu intră nici o mărime referitoare la sarcini. Atunci, relația (6.3.11) exprimă legea de variație în timp a energiei câmpului electromagnetic.

Se vede din (6.3.11) că această variație este egală cu un transfer de energie prin suprafață închisă ( $S$ ) spre exteriorul volumului  $\mathcal{V}$  (primul termen din dreapta), la care se adaugă energia disipată de curentul de conducție  $\mathbf{J}$  (termenul al doilea din dreapta).

Din expresia (6.3.11) se vede că mărimea

$$\mathbf{S}_P = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (6.3.12)$$

numită și *vector Poynting*, are semnificația unei intensități de energie transferată în unitate de timp prin unitatea de suprafață (pentru definirea exactă a intensității unei unde electromagnetice, vezi și § 7.2). Mărimea

$$\iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} = \frac{dW_{part}}{dt} + Q_0 \quad (6.3.13)$$

exprimă lucrul efectuat de câmp în unitatea de timp asupra sistemului de particule purtătoare de sarcini electrice. Acest lucru se consumă pe de o parte pentru modificarea energiei totale (cinetică + potențială) a sistemului de particule încărcate electrice (termenul  $\frac{dW_{part}}{dt}$ ) și pe de altă parte se disipează sub formă de căldură, prin *efect Joule* (termenul  $Q_0$ ). Atunci relația (6.3.11) se mai poate scrie sub forma

$$-\frac{\partial W_{EB}}{\partial t} = \frac{dW_{part}}{dt} + Q_0 + \oint\oint_{(S)} \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.3.14)$$

Să mai notăm faptul că energia câmpului electromagnetic  $W_{EB}$ , definită de (6.3.10), fiind o funcție continuă de poziție, poate fi scrisă și sub forma

$$W_{EB} = \iiint w_{EB} d\mathcal{V} \quad (6.3.15)$$

cu mărimea

$$w_{EB} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (6.3.16)$$

numită *densitate de energie* a câmpului electromagnetic.

Relația (6.3.16) este corectă numai pentru câmpurile în care legătura dintre  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{D}$ , respectiv între  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  sînt liniare (cum se presupune în



considerațiile făcute aici). Pentru cazul general, ea trebuie înlocuită cu

$$w_{EB} = \int (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}).$$

Remarcăm faptul că variația în timp a densității de energie a câmpului electromagnetic este diferită de zero numai pentru câmpurile în care mărimile  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  sînt variabile în timp. Un astfel de câmp electromagnetic părăsește întotdeauna domeniul spațial în care a fost generat și se propagă din aproape în aproape sub formă de unde electromagnetice (vezi § 6.10). Este de asemenea important de reținut că legea de conservare a energiei în fenomenele electromagnetice poate fi scrisă într-o formă locală, printr-o ecuație de continuitate. Astfel, dacă ținem cont de (6.3.12) și (6.3.15), atunci relația (6.3.11) poate fi scrisă sub forma

$$- \iiint \frac{\partial w_{EB}}{\partial t} d\mathcal{V} = \oiint \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S} + \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V}. \quad (6.3.17)$$

Aplicînd teorema lui Gauss-Ostrogradski, avem

$$\oiint \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S} = \iiint \nabla \mathbf{S}_P \cdot d\mathcal{V} \quad (6.3.18)$$

și din (6.3.17) obținem deci

$$- \iiint \frac{\partial w_{EB}}{\partial t} d\mathcal{V} = \iiint [\nabla \mathbf{S}_P + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}] d\mathcal{V}. \quad (6.3.19)$$

Întrucît aici vorbim de un element de volum  $d\mathcal{V}$  arbitrar ales, rezultă că (6.3.19) este satisfăcută numai dacă este satisfăcută relația

$$- \frac{\partial w_{EB}}{\partial t} = \nabla \mathbf{S}_P + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (6.3.20)$$

Această ecuație de continuitate exprimă forma locală a legii de conservare a energiei unui sistem format din sarcini și câmp.

Să trecem acum să punem în evidență impulsul unui câmp electromagnetic. Pentru aceasta vom estima variația impulsului sarcinilor elctrice aflate în câmpul electromagnetic. Pe baza relațiilor (6.2.48)–(6.2.49) putem exprima variația impulsului total al particulelor încărcate prin relația

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \iiint \frac{d(\mathbf{p}_0 d\mathcal{V})}{dt} = \iiint (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathcal{V} = \iiint \rho \mathbf{E} d\mathcal{V} + \\ &+ \iiint \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$



Folosind ecuațiile Maxwell (6.2.40) și (6.2.39) putem transforma această relație în felul următor

$$\frac{dp}{dt} = \iiint \left[ \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{D} + \left( \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \right] d\mathcal{V}. \quad (6.3.22)$$

Adăugăm sub semnul integrală, termenul nul (vezi relațiile (6.2.37) și (6.2.38))

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{B} + \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \times \mathbf{D} \quad (6.3.23)$$

și obținem

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & \iiint \left[ \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} \right] d\mathcal{V} + \\ & + \iiint [\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

Dar pentru că  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  și  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , al doilea termen din această relație se poate scrie sub forma

$$\mu \iiint [\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})] d\mathcal{V} + \epsilon \iiint [\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] d\mathcal{V}. \quad (6.3.25)$$

În analiza vectorială se demonstrează următoarele relații (42)

$$\iiint [\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] d\mathcal{V} = \oint \left[ (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right] dS \quad (6.3.26)$$

$$\iiint [\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})] d\mathcal{V} = \oint \left[ (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \mathbf{n} \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right] dS \quad (6.3.27)$$

în care  $\mathbf{n}$  reprezintă versorul normalei pozitive pe  $dS$ . Dacă în relațiile (6.3.26)–(6.3.27) ne referim la un volum infinit, atunci integralele de suprafață în termenii din dreapta ai acestor relații sînt luate pe suprafața de la infinit. Dar dacă sarcinile electrice le considerăm plasate într-un domeniu finit, atunci câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  create de ele în punctele suprafeței de la infinit sînt nule. În aceste condiții, și termenii din dreapta ai expresiilor (6.3.26) și (6.3.27) sînt nuli și relația (6.3.24) se reduce la forma

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \iiint (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d\mathcal{V} \right] = 0. \quad (6.3.28)$$

Mărimea

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (6.3.29)$$

reprezintă *densitatea de impuls a câmpului electromagnetic*. Relația (6.3.28) reprezintă tocmai legea de conservare a impulsului total pentru un ansam-



blu formt din sarcini și câmp, deoarece se vede că derivata în raport cu timpul a sumei dintre impulsul sarcinilor ( $\mathbf{p}$ ) și impulsul câmpului  $\iiint \mathbf{g} d\mathcal{V}$  este zero.

Avînd definită densitatea de impuls a câmpului electromagnetic putem defini desigur și o densitate a momentului cinetic pentru câmp, prin relația

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B}). \quad (6.3.30)$$

Atunci momentul cinetic total al câmpului va fi dat de relația

$$\mathbf{L} = \iiint \mathbf{l} d\mathcal{V} = \iiint \mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d\mathcal{V}. \quad (6.3.31)$$

Mai sus a fost demonstrat (relația (6.3.28)) că impulsul sistemului închis format din sarcini și câmp se conservă. Desigur se poate demonstra și faptul că momentul cinetic al sistemului închis format din sarcini și câmp se conservă, dar nu vom expune această demonstrație aici [42]. De fapt cele două legi de conservare — a impulsului și a momentului cinetic — pentru sistemul închis format din sarcini și câmp nu sînt decît o reflectare, în cadrul fenomenelor electromagnetice ale proprietăților de omogenitate, respectiv izotropie ale spațiului.

Dacă vrem să ne referim la conservarea energiei pentru un sistem închis format din sarcini și câmp, atunci în (6.3.14), în termenul al doilea din dreapta, integrala trebuie luată pe suprafața de la infinit. Pe această suprafață însă vectorul Poynting  $\mathbf{S}_P$  este nul și deci termenul al doilea din partea dreaptă a lui (6.3.14) este nul. Relația care rezultă are deci forma

$$\iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} + \frac{\partial W_{EB}}{\partial t} = 0. \quad (6.3.32)$$

Această relație reprezintă legea de conservare a energiei pentru un sistem închis format din sarcini și câmp și ea reflectă de fapt în cadrul fenomenelor electromagnetice, proprietatea de omogenitate a timpului.

#### § 6.4. POTENȚIALELE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Ecuațiile Maxwell sînt scrise pentru mărimile  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$ , care sînt mărimi vectoriale. Dacă scriem ecuațiile care rezultă din ecuațiile Maxwell pentru componentele carteziene ale vectorilor  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$



obținem o clasă de ecuații diferențiale destul de complicate și care nu seamănă între ele. Rezultă deci că în general problema rezolvării ecuațiilor lui Maxwell în termenii mărimilor  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  implică rezolvarea unor ecuații diferențiale de mai multe tipuri — lucru care este desigur neconvenabil sub aspectul economicității calculelor necesare pentru rezolvarea problemelor de electromagnetism. Inconvenientul amintit poate fi însă înlăturat și rezolvarea ecuațiilor Maxwell să fie redusă la rezolvarea unor ecuații diferențiale de un singur tip. Acest lucru poate fi făcut prin introducerea așa numitelor *potențiale electrodinamice*. În continuare vom arăta cum se definesc aceste potențiale și care sînt ecuațiile diferențiale pe care le satisfac.

Pe baza faptului că  $\nabla \mathbf{B} = 0$  se poate introduce o nouă funcție vectorială  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , definită prin relația

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.4.1)$$

deoarece  $\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ . Vectorul  $\mathbf{A}$  se numește *potențial vector*. Ținînd cont de (6.4.1), din (6.2.37) obținem

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (6.4.2)$$

sau

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.4.3)$$

Din această relație rezultă că putem scrie

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad (6.4.4)$$

deoarece  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ , unde  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  este o funcție scalară. Funcția  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , definită de relația (6.4.4) se numește *potențial electric* sau *potențial scalar*. Din (6.4.4) rezultă

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.4.5)$$

Relațiile (6.4.1) și (6.4.5) arată că mărimile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  pot fi determinate dacă se cunosc funcțiile potențiale  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  și  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . De aici rezultă că studiul cîmpului electromagnetic poate fi făcut și în termenii potențialelor  $\mathbf{A}$  și  $\varphi$ . O asemenea metodă de studiu se numește *metoda potențialelor electrodinamice*. Trebuie însă notat că potențialele electrodinamice nu sînt determinate univoc de relațiile (6.4.1) și (6.4.5), ci numai pînă la aproximarea unei funcții scalare arbitrare  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ . Într-adevăr, dacă luăm transformarea

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi \quad (6.4.6)$$



atunci câmpul  $\mathbf{B}$ , definit de (6.4.1), are aceeași valoare atât pentru potențialul  $\mathbf{A}$  cât și pentru potențialul  $\mathbf{A}'$ , deoarece

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} \times \nabla(\nabla\Psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (6.4.7)$$

Impunând condiția ca și câmpul  $\mathbf{E}$  să nu fie afectat de transformarea (6.4.6) va trebui să fie îndeplinită egalitatea

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \quad (6.4.8)$$

De aici rezultă că trebuie să avem

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (6.4.9)$$

Transformările (6.4.6) și (6.4.9) se numesc *transformări de etalonare*. Aceste transformări au fost particularizate de către Lorentz astfel ca a doua pereche de ecuații Maxwell — adică relațiile (6.2.39) și (6.2.40) — să aibă forma cea mai simplă. Pentru un câmp electromagnetic în vid, de exemplu, pe baza relațiilor (6.4.1) și (6.4.5) se poate transforma relația (6.2.39) în forma

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{J}$$

sau

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{A} = -\varepsilon_0 \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mathbf{J}$$

respectiv

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.4.10)$$

Se vede că expresia

$$f = \nabla \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (6.4.11)$$

cu transformările de etalonare (6.4.6) și (6.4.9) devine

$$f' = \nabla \mathbf{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\varphi'}{\partial t} - \nabla^2 \Psi + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (6.4.12)$$

Întrucât funcția  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  rămâne în continuare arbitrară, ea poate fi aleasă în (6.4.12) astfel încât să avem  $f = 0$ . Rezultă din (6.4.11) că pentru o



astfel de alegere avem condiția

$$\nabla \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (6.4.13)$$

numită și *condiție de etalonare Lorentz*. Folosind această condiție, din relația (6.4.10) obținem ecuația

$$\nabla \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.4.14)$$

cu notația

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6.4.15)$$

Mărimea  $c$ , așa cum s-a arătat în § 6.1, reprezintă viteza luminii în vid.

Ecuația (6.4.14) este o ecuație vectorială. Dacă ne referim la componentele carteziene  $A_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) ale vectorului  $\mathbf{A}$ , din (6.4.14) rezultă că toate aceste componente satisfac o ecuație de același tip și anume

$$\Delta A_\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} = -\mu_0 J_\alpha. \quad (6.5.16)$$

O ecuație analogă cu acestea se obține și pentru potențialul scalar  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Într-adevăr, dacă în ecuația (6.2.40) se introduce relația (6.4.5), atunci pentru un câmp electromagnetic, în vid, se obține

$$\nabla \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \mathbf{E} = \epsilon_0 \nabla \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho.$$

Dacă în această relație mărimea  $\nabla \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mathbf{A})$  se înlocuiește, folosind expresia lui  $\nabla \mathbf{A}$  din condiția de etalonare Lorentz (6.4.13) se obține relația

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (6.4.17)$$

Se vede că potențialul scalar  $\varphi$  și componentele  $A_\alpha$  ale potențialului vector, satisfac ecuațiile (6.4.17) și (6.4.16), care, din punct de vedere matematic sînt ecuații cu derivate parțiale de același tip și anume sînt *ecuații Poisson*. Atunci rezultă că pentru aflarea potențialelor  $\mathbf{A}$  și  $\varphi$  — și deci implicit pentru aflarea câmpurilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  — trebuie să rezolvăm un singur tip de ecuație cu derivate parțiale. Rezolvarea acestui tip de ecuații se



poate face pentru cazul general. În paragrafele următoare va fi expusă rezolvarea acestor ecuații pentru câteva cazuri particulare de interes practic.

Este interesant de remarcat aici că în formalismul potențialelor electrodinamice prezentat mai sus, mărimile  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  și  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  au un rol formal de funcții ajutătoare, fără o semnificație fizică nemijlocită. În ultimele două decenii, însă, este destul de viu disputată și controversată problema dacă potențialul vector  $\mathbf{A}$  are sau nu o semnificație fizică independentă de  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  (este vorba de așa numitul efect Aharonov-Bohm; vezi [17]).

## § 6.5. UNELE ASPECTE RELATIVISTE ALE ELECTROMAGNETISMULUI

În capitolul al III-lea al prezentului volum s-a arătat că teoria relativității impune cerința ca toate legile care descriu fenomene relativiste să fie invariante față de transformările lui Lorentz (3.5.17), transformări care fac legătura între două sisteme inerțiale. Fenomenele electromagnetice sînt prin excelență fenomene relativiste pentru că așa cum se va arăta mai târziu interacțiunea electromagnetică se propagă cu viteza  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. De asemenea, sînt frecvente cazurile în care sarcinile se deplasează cu viteze apropiate de viteza luminii în vid  $c$ . De aceea, atît ecuațiile cîmpului (ecuațiile lui Maxwell), cît și ale mișcării particulelor încărcate electric în cîmpuri electromagnetice (ecuația lui Lorentz) trebuie să fie invariante față de aceste transformări.

Dar a scrie legile cîmpului electromagnetic și ale sarcinilor ce se mișcă în acest cîmp sub formă invariantă față de transformările lui Lorentz, înseamnă de fapt a le transpune în formalismul cvadridimensional al lui Minkowski și a găsi semnificația mărimilor legate de cîmp sau de sarcină care intră în aceste ecuații. Astfel, păstrînd notația din §3.7, vom introduce noțiunea de cvadrivector potențial  $A_\alpha$ , definit pe componentele potențialului vector  $\mathbf{A}$  și ale celui scalar prin

$$A_\alpha \left( A_1 = A_x; A_2 = A_y; A_3 = A_z; A_4 = \frac{i}{c} \varphi \right); \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (6.5.1)$$

Atunci, întrucît potrivit relației (6.4.1), vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}$  este definit prin cîte două componente ale lui  $\mathbf{A}$ , pentru că de exemplu avem

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = B_{23} \quad (6.5.2)$$

vom defini un cvadritensor cîmp de ordinul doi prin relația

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (6.5.3)$$



Se vede că dacă pentru o parte dintre componentele acestui cvadri-tensor luăm următoarele componente ale câmpului electromagnetic

$$\begin{pmatrix} F_{23} & F_{31} & F_{12} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z \end{pmatrix} \quad (6.5.4)$$

și dacă, în plus, mai definim un cvadrivector densitate de curent prin

$$J_\alpha (J_1 = J_x; J_2 = J_y; J_3 = J_z; J_4 = ic\rho) \quad (6.5.5)$$

atunci cea de a doua pereche de ecuații Maxwell (6.2.39) și (6.2.40), pentru un câmp electromagnetic în vid se poate scrie concis sub forma

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = J_\alpha. \quad (6.5.6)$$

Într-adevăr, făcînd de exemplu pe  $\alpha = 1$  și  $\beta = 1, 2, 3, 4$ , din (6.5.6) rezultă

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} \right) = J_1$$

care cu tabloul (6.5.4) și (6.5.5), luînd  $F_{11} = 0$  și admitînd că  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ , se transcrie sub forma

$$\frac{1}{\mu_0} \left[ 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{i}{c} E_x \right) \right] = J_x.$$

Dar, întrucît  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$  și  $D = \epsilon_0 E$ , această relație este tocmai proiecția pe axa  $Ox$  a ecuației

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

În mod cu totul analog, prima pereche de ecuații Maxwell (6.2.37) și (6.2.38) pentru un câmp electromagnetic în vid se poate obține dintr-o ecuație tensorială de forma

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0; (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4) \quad (6.5.7)$$

dacă se admite că cvadritensorul de rang doi  $F_{\alpha\beta}$  este un cvadritensor antisimetric ( $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ ), iar componentele lui sînt date de



tabloul

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{44} & F_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_z & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5.8)$$

Dar atunci înseamnă, potrivit relației (3.7.9), că la trecerea de la un sistem de referință inerțial ( $K$ ) (presupus fix) la un alt sistem de referință inerțial mobil ( $K'$ ) (care se mișcă față de primul cu o viteză apropiată de  $c$ , păstrându-se axele  $Ox$  și  $O'x'$  mereu paralele între ele) cvadritensorul  $F_{\alpha\beta}$  se transformă după relațiile

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\delta=1}^4 \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F'_{\gamma\delta}. \quad (6.5.9)$$

În mod analog, cvadrivectorul curent  $J_\alpha$  se transformă, ca orice cvadrivector, după relația

$$J_\alpha = \sum_{\beta=1}^4 \Lambda_{\alpha\beta} J'_\beta. \quad (6.5.10)$$

În aceste ultime două relații,  $\Lambda_{\alpha\beta}$  reprezintă matricea transformărilor de tip Lorentz, adică matricea de forma

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\beta\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}; \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (6.5.11)$$

$$\Gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Prin calcule simple se obține că componentele cvadritensorului  $F_{\alpha\beta}$  și ale cvadrivectorului  $J_\alpha$  se transformă, la trecerea de la ( $K'$ ) la ( $K$ ) conform relațiilor

$$B_x = B'_x; \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$E_x = E'_x; E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.5.12)$$

$$J_x = \frac{J'_x + v\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; J_y = J'_y; J_z = J'_z; \rho = \frac{\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Este interesant de remarcat că într-o astfel de tratare relativistă nu se mai poate defini, pentru toate sistemele inerțiale, noțiunea de câmp electrostatic, pentru că dacă în sistemul propriu sarcina electrică se află în repaus ( $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ ) și creează, deci, doar un câmp electrostatic ( $E'_x \neq 0; E'_y \neq 0; E'_z \neq 0$ ), atunci, potrivit primului șir de relații (6.5.12), în celălalt sistem de referință se va evidenția și un câmp magnetic, avînd componentele

$$B_x = B'_x = 0; B_y = \frac{-\frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; B_z = \frac{\frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.5.13)$$

Acest rezultat, surprinzător la prima vedere, ne spune că în mod obiectiv există numai câmpul electromagnetic ca ansamblul interacțiunilor de tip electric și magnetic care se interschimbă reciproc și în mod continuu. Valabilitatea rezultatelor conținute în relațiile (6.5.12) a fost validată de experiențe. Desigur că experiențele se efectuează în aproximația nerelativistă, cînd  $v \ll c$ . De exemplu, dacă se rotește un magnet (vezi fig. 6.5.1) în jurul axei sale, iar cu ajutorul a doi conductori metalici—unul făcînd contact permanent cu axul de rotație, iar celălalt cu centrul magnetului—se conectează un voltmetru  $V$ , atunci se constată generarea unei tensiuni electrice în timpul acestei rotații. Fenomenul este cunoscut sub numele de inducție unipolară, dar de fapt în sistemul fix al conductorilor, față de care magnetul se rotește, va apare un câmp electric (conform șirului al doilea de relații din (6.5.12)). Întrucît aici  $v \ll c$ , o astfel de relație se va reduce la forma

$$E_y \cong vB'_z. \quad (6.5.14)$$

Măsurătorile au confirmat valabilitatea acestei relații.

Pentru a exprima în formă invariantă față de transformările lui Lorentz interacțiunea particulelor punctiforme și încărcate electric cu un

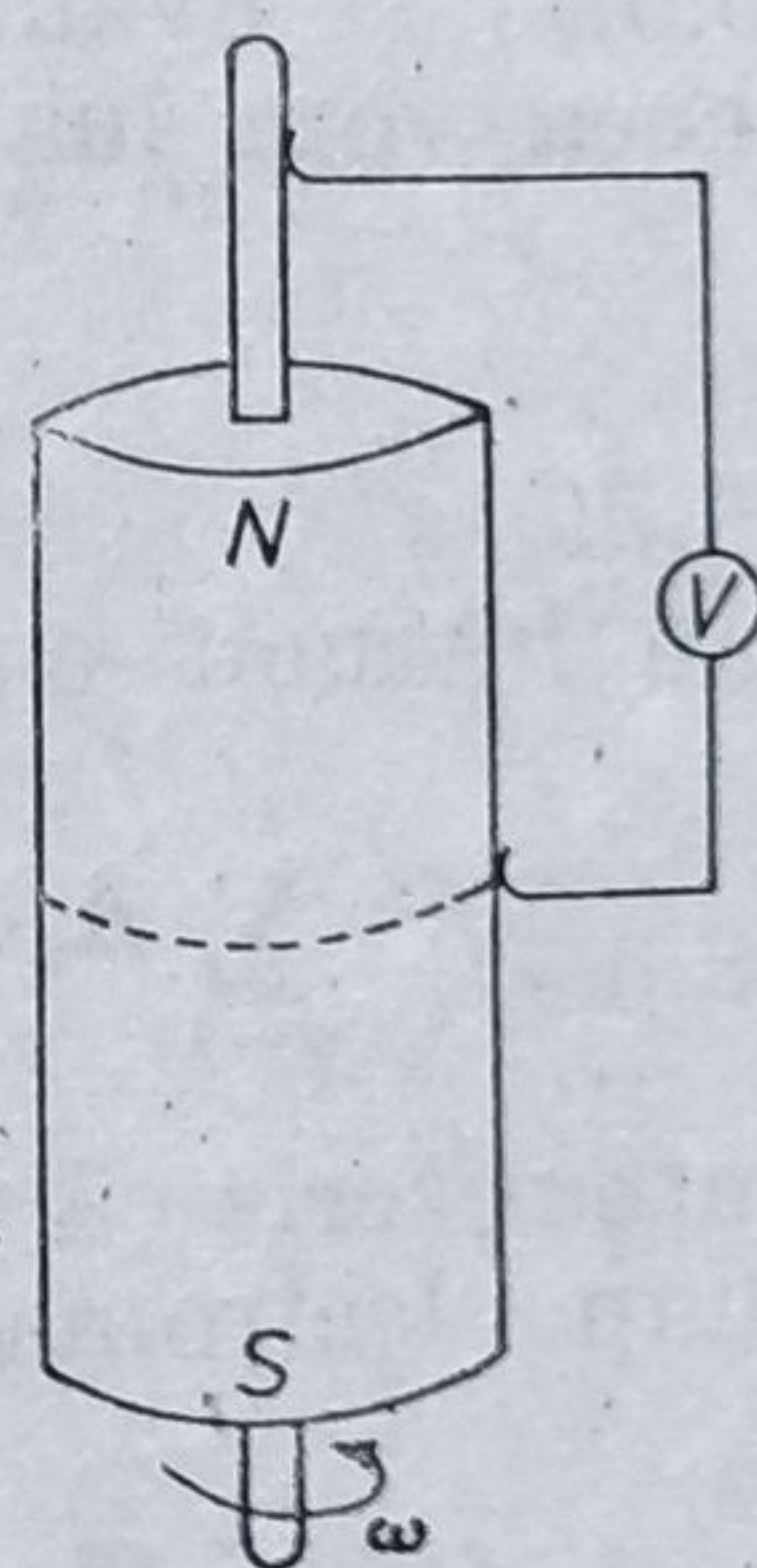


Fig. 6.5.1.



cîmp electromagnetic și deci pentru a putea scrie într-o formă invariantă ecuația de mișcare a particulei (ecuația lui Lorentz (6.2.48)), este de preferat să fie folosită formularea mecanicii analitice. O astfel de cale a fost deja parcursă în § 3.6 pentru stabilirea ecuațiilor de mișcare ale unei particule libere. S-a văzut că de fapt problema constă în găsirea unei funcții de acțiune  $\mathcal{S}$  corespunzătoare, care să fie un invariant față de transformările lui Lorentz (3.4.17). În cazul mișcării libere a particulei s-a găsit (vezi (3.6.8))

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = -m_0 c \int ds = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (6.5.15)$$

unde

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.5.16)$$

În mod analog, vom căuta pentru cazul mișcării particulei încărcate în cîmp, o funcție de acțiune  $\mathcal{S}_1$ , care să fie un invariant nu numai față de transformările lui Lorentz, ci și față de transformările specifice cîmpului (cum sînt transformările de etalonare (6.4.6.) și (6.4.9)). Aceasta înseamnă că funcția de acțiune  $\mathcal{S}_1$  trebuie să fie o funcție scalară (scalarii rămîn invariante față de transformările lui Lorentz) în care să intre atît mărimi specifice particulei, cît și mărimi specifice cîmpului, cerințe pe care le satisface produsul scalar dintre cvadrivectorul potențial  $A_\alpha$ , dat de (6.5.1) și cvadrivectorul densitate de curent  $J_\alpha$ , definit de (6.5.5). De aceea vom lua

$$\mathcal{S}_1 = \int \mathcal{L}_1 dt = \int \left( \sum_{\alpha=1}^4 A_\alpha J_\alpha \right) dt \quad (6.5.17)$$

sau întrucît cu (6.5.1) și (6.5.5), avem

$$\sum_{\alpha=1}^4 A_\alpha J_\alpha = A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \rho \varphi \quad (6.5.18)$$

putem scrie că pentru o particulă de sarcină  $Q$ , aflată în mișcare într-un cîmp electromagnetic exterior

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 = \int \left[ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + Q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \varphi) \right] dt. \quad (6.5.19)$$

În aproximația vitezelor mici ( $v \ll c$ ), expresia (6.5.19) devine

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt = \int \left( \frac{m_0 v^2}{2} + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - Q\varphi \right) dt. \quad (6.5.20)$$

Desigur, că ecuația de mișcare se poate obține folosind principiul minimei acțiuni ( $\delta \mathcal{S} = 0$ , vezi § 1.6). Ea va fi o ecuație de tipul ecuației lui Lagrange



(1.4.16), în care coordonatele generalizate vor fi coordonatele  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ale spațiului cvadridimensional, iar vitezele generalizate, componentele cvadrivectorului viteză (3.7.15).

Fără a intra în detalii de calcul, să remarcăm și un alt aspect important al acestor probleme. Conform relației (6.5.20), funcția lagrangeiană pentru o sarcină  $Q$ , aflată într-un câmp electromagnetic va fi dată în aproximația nerelativistă, de

$$\mathcal{L} = \frac{m_0 v^2}{2} + Q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \varphi). \quad (6.5.21)$$

Înseamnă că particula va avea impulsul

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m_0 \mathbf{v} + Q \mathbf{A} \quad (6.5.22)$$

și energia

$$W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{m_0 v^2}{2} - Q\varphi. \quad (6.5.23)$$

Pentru a obține funcția hamiltoniană care să permită descrierea în limbaj hamiltonian a problemelor legate de mișcarea sarcinilor în câmpuri electromagnetice, vom folosi expresia (1.5.6), adică

$$H = pq - \mathcal{L} \quad (6.5.24)$$

în care vom înlocui pe  $\mathcal{L}$  cu expresia (6.5.21), iar pe  $\dot{q}$  prin

$$\dot{q} = \mathbf{v} = \frac{1}{m_0} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A}). \quad (6.5.24)$$

Se obține

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 + Q\varphi \quad (6.5.25)$$

pentru o particulă de sarcină  $Q$  și

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2m_{0k}} (\mathbf{p}_k - Q_k \mathbf{A}_k) - Q_k \varphi_k \right] \quad (6.5.26)$$

pentru un sistem de sarcini  $Q_k$  aflate într-un câmp electromagnetic exterior.

Dacă, de exemplu, câmpul electromagnetic exterior sarcinii  $Q$  este un câmp magnetic constant ( $\mathbf{B} = \text{const.}$ ), atunci întrucât  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \text{const.}$ , avem

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}). \quad (6.5.27)$$



Introducînd această relație în (6.5.25) și neglijînd termenul mic în  $A^2$ , obținem

$$\mathcal{H} \simeq \frac{p^2}{2m_0} + Q\varphi - \frac{Q}{2m_0} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}). \quad (6.5.28)$$

Se vede că suplimentul de energie datorat cîmpului magnetic  $\mathbf{B}$  este dat de termenul

$$\mathcal{H}_B = - \frac{Q}{2m_0} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = - \frac{Q}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (6.5.29)$$

$\mathbf{m}$  fiind momentul magnetic atașat sarcinii în mișcare  $Q$  (pentru detalii vezi § 6.8.).

În același timp, utilizînd expresia (6.5.27) în (6.5.22) obținem

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} + \frac{Q}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = m_0 (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) \quad (6.5.30)$$

unde s-a introdus notația

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{Q\mathbf{B}}{2m_0}. \quad (6.5.31)$$

Înseamnă că în prezența cîmpului magnetic constant  $\mathbf{B}$ , sarcina va executa pe lîngă mișcarea de translație cu viteza  $\mathbf{v}$  și o mișcare de rotație cu viteza unghiulară  $\boldsymbol{\omega}_L$ . Această mișcare de rotație este numită și *mișcare de precesie Larmor*,  $\boldsymbol{\omega}_L$  fiind pulsația acestei mișcări.

## § 6.6. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN REGIM STATIC (ELECTROSTATICA)

Unul din cazurile particulare, de larg interes practic, în care putem întîlni cîmpul electromagnetic este cazul cîmpului electromagnetic în regim static. Acest regim se distinge prin faptul că mărimile ce descriu cîmpul nu variază în timp, iar în interacțiunea cîmpului cu substanța nu se degajă căldură, ceea ce înseamnă potrivit relației (6.3.13) că nu avem transport de sarcini electrice. Prin urmare, cîmpul electromagnetic în regim static este caracterizat prin condițiile

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad \mathbf{J} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.61.)$$



Se vede ușor că în regim static cîmpul electromagnetic se reduce de fapt la un cîmp electrostatic, ale cărui legi, în conformitate cu (6.2.37) — (6.2.40) și (6.6.1), sînt

Forma diferențială

Forma integrală

$$\Delta \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (6.6.2)$$

$$\Delta \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (6.6.3)$$

$$\Delta \times \mathbf{H} = 0$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (6.6.4)$$

$$\Delta \mathbf{D} = \rho$$

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho d\mathcal{V} \quad (6.6.5)$$

respectiv — dacă ținem cont de (6.4.3) (6.4.17) și (6.6.1) — prin relațiile

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \quad (6.6.6)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon. \quad (6.6.7)$$

Se remarcă faptul că cîmpul electrostatic este un cîmp nerotațional ( $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ). El este un cîmp scalar pentru că derivă dintr-o funcție scalară ( $\mathbf{E} = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$ ). Fenomenele fizice care se produc în cîmpuri electrostatice constituie obiectul de studiu al *electrostaticii*. Problema centrală a electrostaticii constă în aflarea cîmpurilor (și prin aceasta, nemijlocit, a forțelor de interacțiune), plecînd de la cunoașterea distribuției spațiale a sarcinilor electrice. Această problemă este numită și problema directă a electrostaticii (problema inversă constînd din aflarea distribuției spațiale a sarcinilor plecînd de la cunoașterea cîmpurilor).

#### 6.6.1. Cîmpul electrostatic în vid

Acest cîmp este creat de sarcinile electrice (în absența substanțelor), aflate în repaus într-un sistem de referință inerțial. Conform celor discutate în § 6.1, pentru varianta cea mai simplă a cîmpului electrostatic în vid, reprezentată de cazul a două sarcini punctiforme aflate în repaus reciproc, soluția la problema directă a electrostaticii este dată de legea lui Coulomb (6.1.1). Pentru cazul general al unei distribuții oarecare a sarcinilor, determinarea forței ce acționează asupra unei sarcini  $Q$  se reduce la aflarea cîmpului electric  $\mathbf{E}$ , creat de restul sarcinilor și apoi calcularea forței cu ajutorul formulei

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (6.6.8)$$



De remarcat faptul că, în conformitate cu relația (6.5.2), câmpul electrostatic este caracterizat prin linii de câmp care nu sînt niciodată închise (deoarece  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ). Liniile câmpului electrostatic încep și se sfîrșesc în sarcinile electrice sau la infinit (fig. 6.6.1).

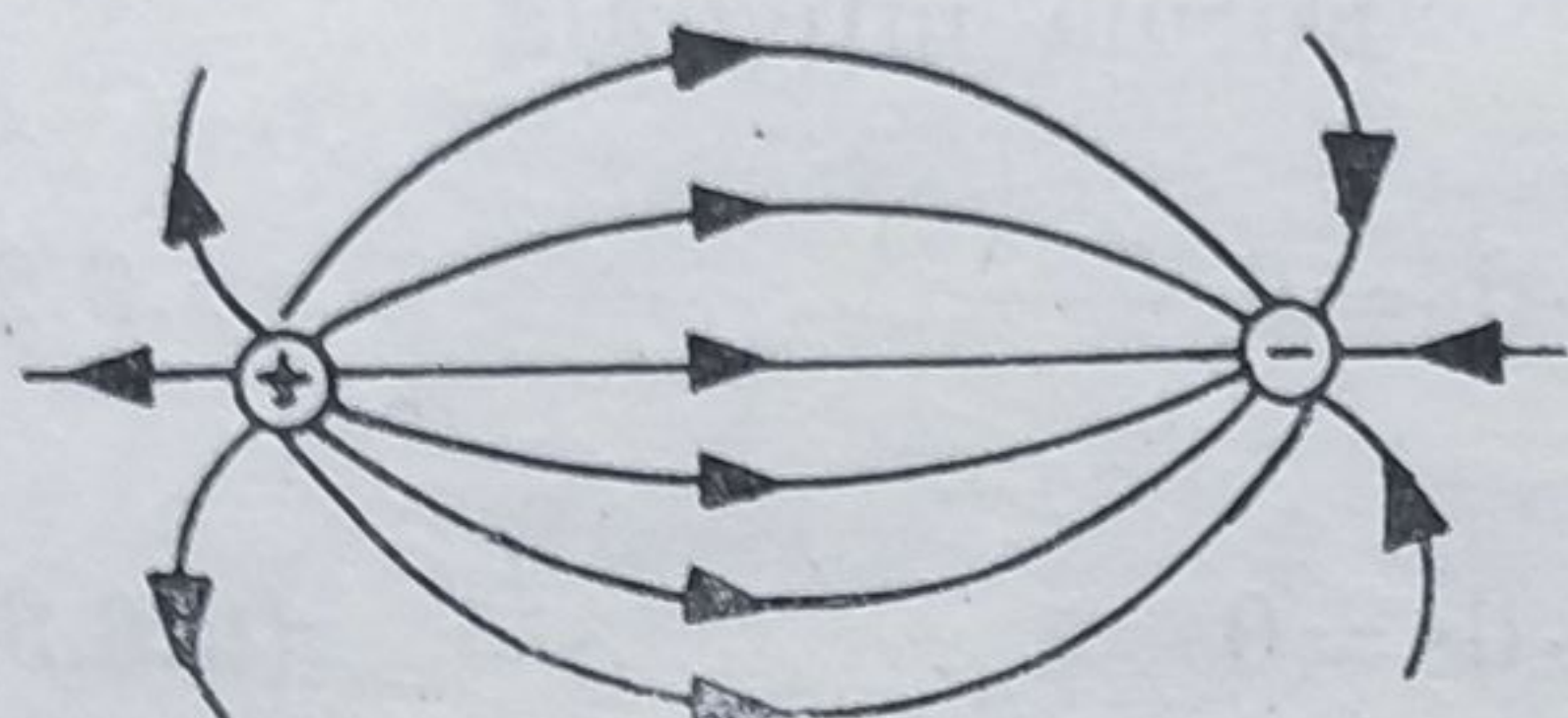


Fig. 6.6.1

În cazurile în care distribuția spațială a sarcinilor electrice este caracterizată printr-o geometrie simplă, intensitatea câmpului electrostatic poate fi calculată relativ ușor cu ajutorul teoremei fluxului (forma integrală a relației (6.5.5)). Iată câteva exemple:

a) **Câmpul electrostatic al unei sarcini punctiforme.** Se observă din figura 6.6.2 că înconjurînd sarcina punctiformă  $Q$  cu o suprafață sferică de rază  $r$ , din (6.6.5) putem scrie relația

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.6.9)$$

Din cauza simetriei sferice a problemei avem  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$  și deci  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$  și în plus  $|\mathbf{E}| = E(r)$ , adică  $E$  depinde numai de modulul razei vectoriale  $\mathbf{r}$ . Atunci din (6.6.9) avem

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oiint dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.6.10)$$

adică

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (6.6.10)$$

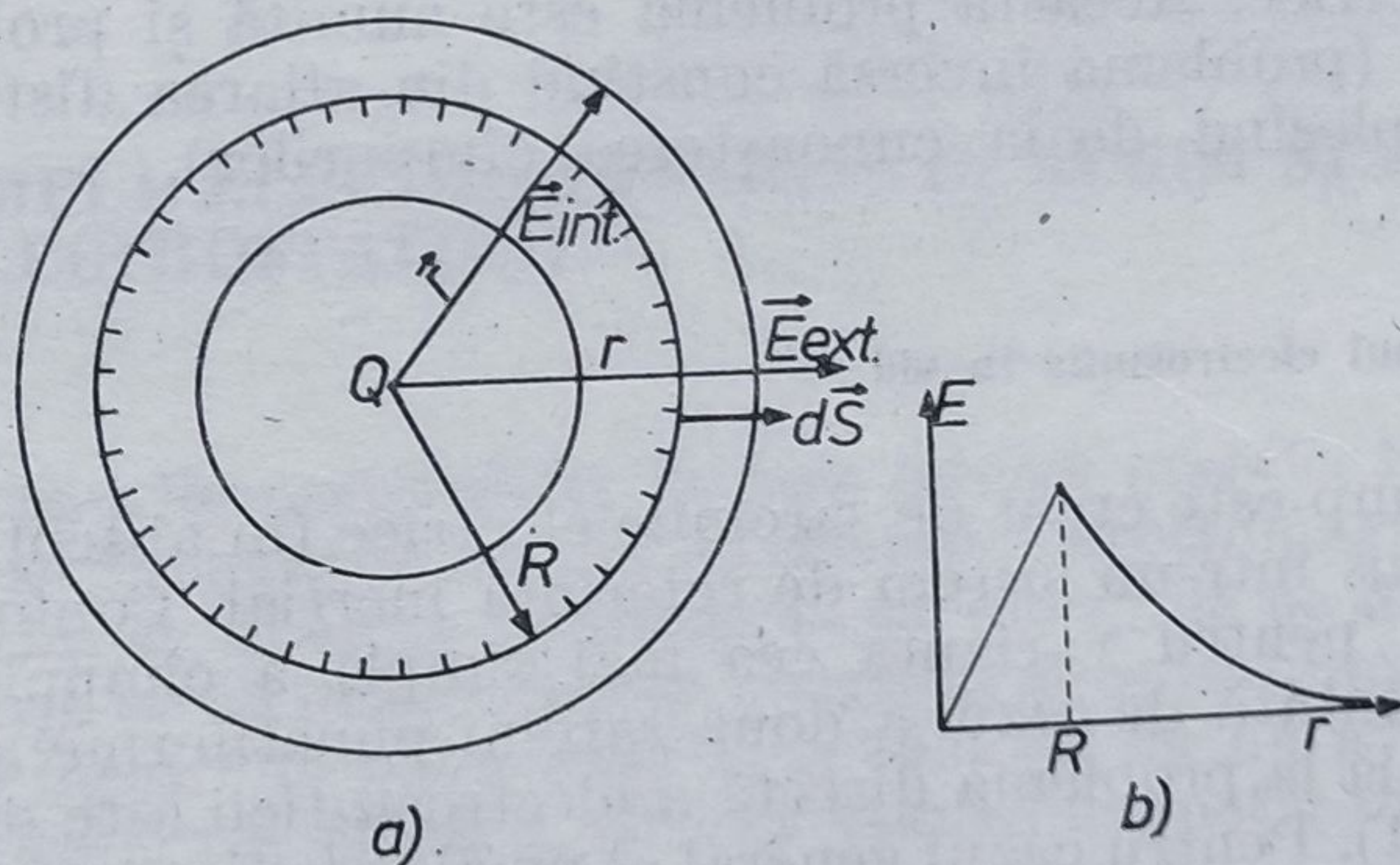


Fig. 6.6.2

Introducînd acest rezultat în (6.6.8) regăsim expresia (6.1.1) a forței coulombiene

b) **Câmpul electrostatic creat de o sferă încărcată volumetric omogen.** În acest caz vom distinge două zone, cea din interiorul și cea din exteriorul sferei de rază  $R$  (fig. 6.6.2). Pe baza



relației (6.6.5), pentru două sfere concentrice cu sfera dată, corespunzătoare zonelor interioară și exterioară, putem scrie relațiile

$$\oiint E_{int} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V_1)} \rho \, dV \quad (6.6.11)$$

$$\oiint E_{ext} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.6.12)$$

unde  $Q$  este sarcina totală cu care este încărcată sfera. Dar sfera fiind încărcată omogen avem  $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$  și deci

$$Q_1 = \iiint_{(V_1)} \rho \, dV = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = Q \left( \frac{r}{R} \right)^3; \quad r < R. \quad (6.6.13)$$

Datorită simetriei sferice a problemei putem scrie și în acest caz relațiile

$$\oiint E_{int} \cdot dS = E_{int} \oiint dS = 4\pi r^2 E_{int}; \quad r < R \quad (6.6.14)$$

$$\oiint E_{ext} \cdot dS = E_{ext} \oiint dS = 4\pi^2 E_{ext}; \quad r > R. \quad (6.6.15)$$

Din relațiile (6.6.11) — (6.6.15) rezultă

$$E_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r; \quad r < R \quad (6.6.16)$$

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}; \quad r > R. \quad (6.6.17)$$

Graficul funcției  $E = E(r)$ , definită de relațiile (6.6.16) și (6.6.17) este reprezentat în figura 6.6.2, b.

c) **Cîmpul electrostatic creat de o distribuție uniformă de sarcini pe suprafața unui cilindru circular infinit lung.** Și în acest caz se disting două zone, cea din interiorul și cea din exteriorul cilindrului de rază  $R$  (vezi fig. 6.6.3).

Pe baza relației (6.6.5), pentru două suprafețe cilindrice coaxiale cilindrului dat, corespunzătoare zonelor interioare și exterioare, avem

$$\oiint E_{int} \cdot dS = 0; \quad r < R$$

$$\oiint E_{ext} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad r > R \quad (6.6.18)$$

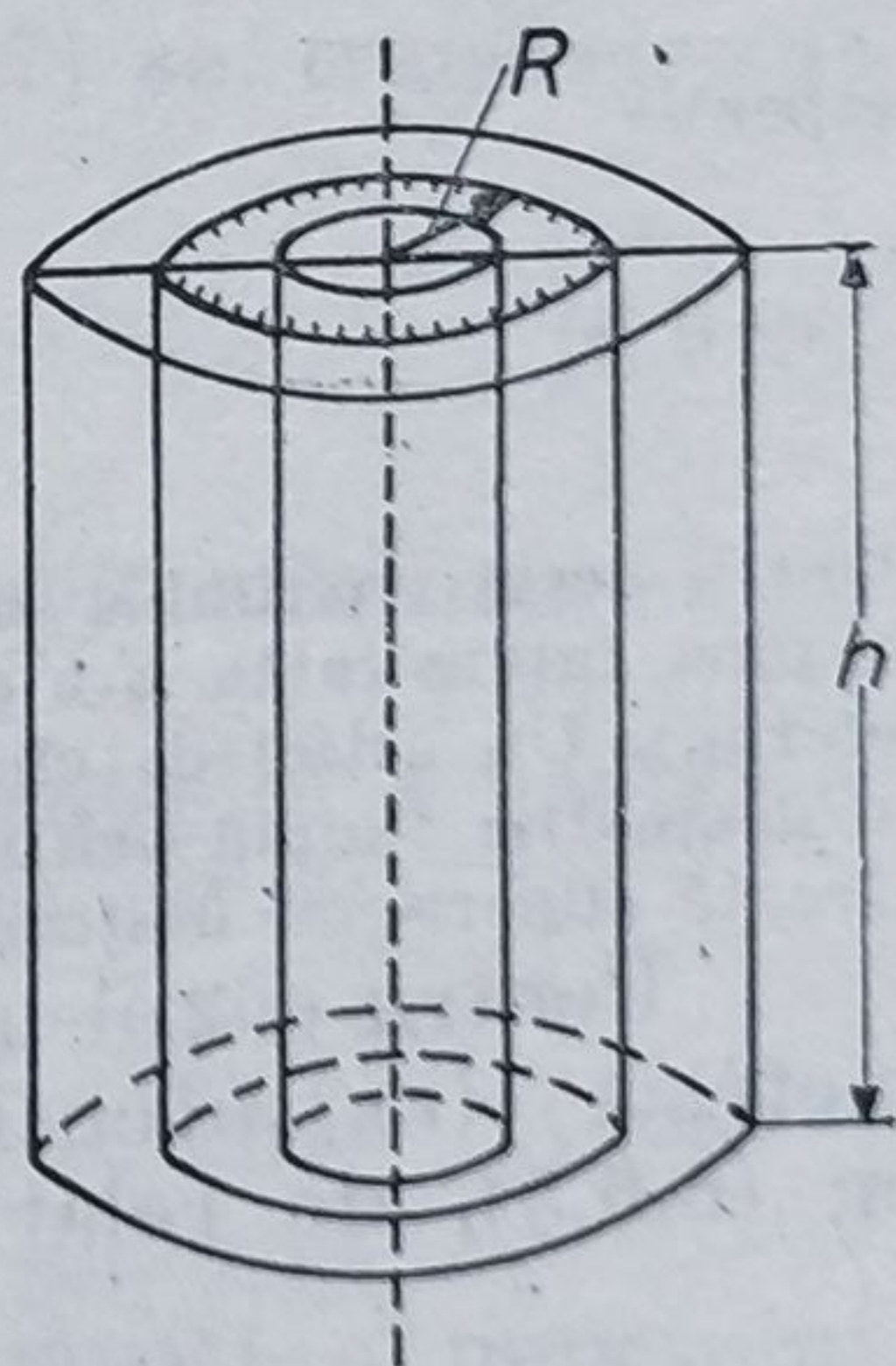


Fig. 6.6.3



unde  $Q$  este sarcina totală de pe suprafața cilindrului. Datorită simetriei cilindrice a problemei, expresia (6.6.18) poate fi scrisă sub forma

$$E_{ext} \oint dS = E_{ext} \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7.6.19)$$

unde prin  $h$  s-a notat o porțiune din lungimea cilindrului. Rezultă că

$$E_{int} = 0 \quad (6.6.20)$$

$$E_{ext} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (6.6.21)$$

unde prin  $\lambda$  s-a notat sarcina electrică a unității de lungime a cilindrului.

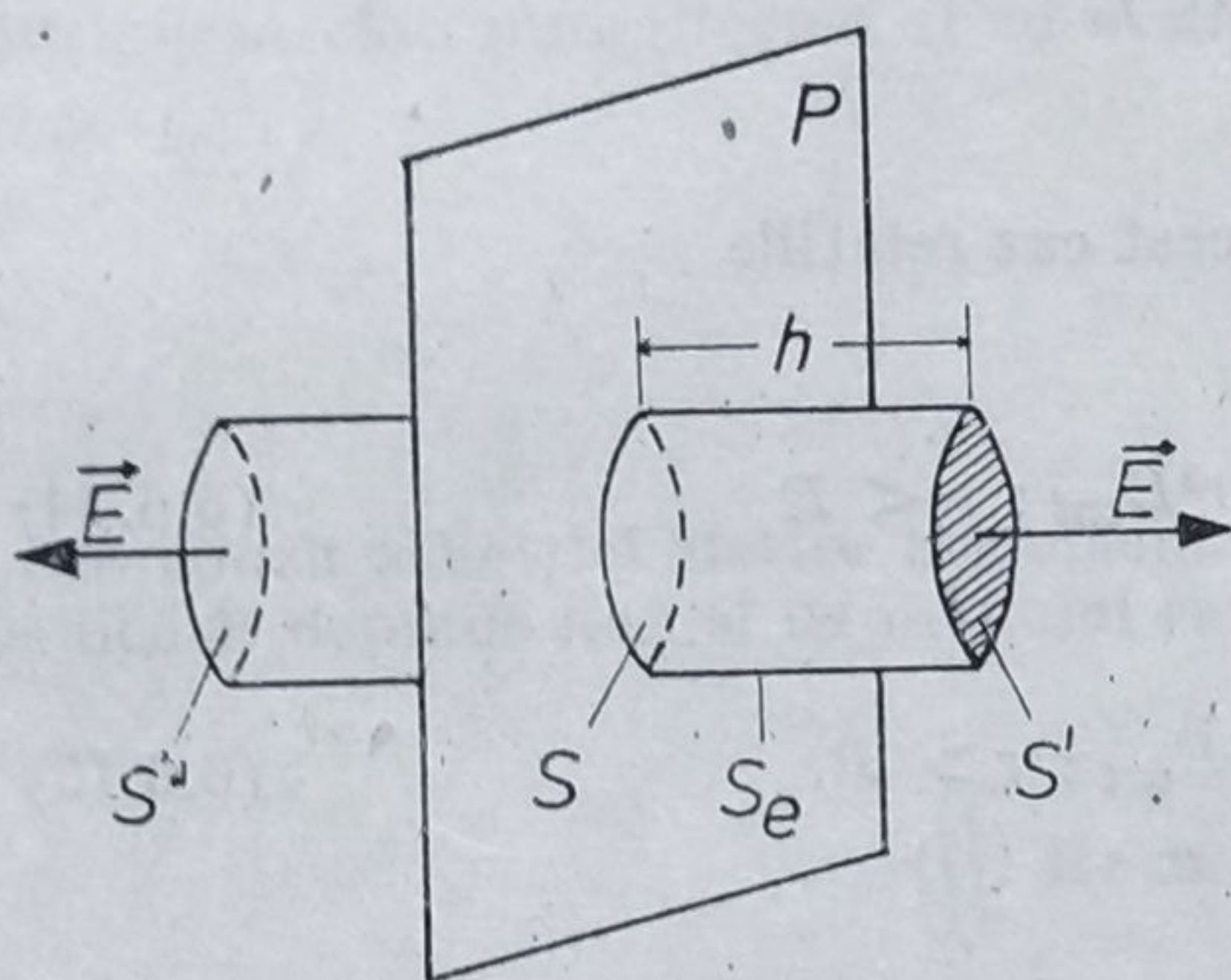


Fig. 6.6.4

d) **Cîmpul unei distribuții plane infinite cu densitate de sarcină constantă.** Fie un plan  $P$  (infinit extins) pe care avem distribuite uniforme sarcini electrice, cu densitate superficială  $\sigma = dQ/dS$  constantă (fig. 6.6.4). Delimităm în planul  $P$  o suprafață circulară  $S$  pe care avem sarcina  $Q = \sigma S$ . Închidem această sarcină cu un cilindru drept de înălțime  $2h$ , cu bazele  $S'$  și  $S''$  situate simetric față de  $S$ , de o parte și de alta a planului  $P$ . Conform relației (6.6.5) avem

$$\begin{aligned} \iint_{(S')} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}' + \iint_{(S'')} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}'' + \iint_{(S_l)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_l &= \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (6.6.22)$$

unde  $S_l$  reprezintă suprafața laterală a cilindrului. Simetria geometrică a problemei ne arată că  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}_l$  și deci  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_l = 0$ . De asemenea  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}'$  și  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}''$  și deci:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS'$  și  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}'' = E dS''$ . Atunci, cum  $S'' = S' = S$ , din (6.6.22) obținem

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

respectiv

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (6.6.23)$$

Pentru acest caz liniile cîmpului sînt drepte paralele între ele (perpendiculare pe planul  $P$ ). În plus, intensitatea  $E$  a cîmpului  $\mathbf{E}$  este constantă (nu depinde de punctul spațial la care ne referim). Un astfel de cîmp se numește *omogen*. Desigur există și alte distribuții de sarcină cu geometrie simplă pentru care se poate calcula ușor intensitatea cîmpului electric (sferă încărcată superficial uniform, cilindru încărcat uniform volumetric, etc.).

Pentru cazul unei distribuții oarecare de sarcini, cu densitatea volumetrică  $\rho(\mathbf{r})$ , intensitatea  $\mathbf{E}$  a cîmpului electrostatic este dată, conform cu (6.6.5), de relația

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (6.6.24)$$



care reprezintă o ecuație cu derivate parțiale de forma

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (6.6.25)$$

ce conține trei necunoscute ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ). Rezolvarea problemei directe a electrostaticii — adică aflarea mărimilor  $E_x$ ,  $E_y$  și  $E_z$  pe baza cunoașterii densității  $\rho(x, y, z)$  — nu este desigur posibilă doar pe baza ecuației (6.6.25). (De notat că pentru rezolvarea problemei inverse — aflarea lui  $\rho(x, y, z)$  din cunoașterea lui  $E_x$ ,  $E_y$  și  $E_z$  — ecuația (6.6.25) este suficientă.) De aceea, pentru rezolvarea problemei directe a electrostaticii trebuie să mai folosim și alte relații decât (6.6.25). Astfel, dacă folosim relațiile (6.6.6) și (6.6.7), atunci în locul relației (6.6.25) putem folosi ecuația

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (6.6.26)$$

care este ecuația Poisson pentru potențialul electrostatic  $\varphi(x, y, z)$ . (În cazul  $\rho = 0$  obținem ecuația Laplace  $\Delta \varphi = 0$ .) Desigur că soluția ecuației (6.6.26) se poate scrie folosind soluția matematică generală a ecuațiilor de tip Poisson. Putem însă găsi această soluție generală folosind unele argumente de natură fizică și soluțiile obținute mai sus pentru anumite cazuri particulare. Astfel, dacă ținem cont de (6.6.10) și de (6.6.26) se vede că în cazul unei sarcini punctiforme potențialul  $\varphi(\mathbf{r})$  este dat de relația

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.6.27)$$

unde  $\mathbf{r}$  reprezintă vectorul de poziție al punctului în care se calculează  $\varphi$ , față de  $Q$ . Dacă luăm drept origine alt punct  $O$  față de care sarcina  $Q$  se află în poziția  $\mathbf{r}'$ , iar potențialul  $\varphi$  îl calculăm într-un punct  $\mathbf{r}$  (numit și punct de observație (fig. 6.6.5)), atunci relația (6.6.27) se transcrie sub forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.6.28)$$

Deoarece  $\varphi$  este o mărime scalară aditivă (întrucât mărimea  $V = Q\varphi$  are semnificația de energie potențială, forța  $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$  fiind conservativă, care desigur este aditivă, rezultă că potențialul  $\varphi$  pentru o distribuție discretă de sarcini punctiforme este dat de relația

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad (6.6.29)$$

$\mathbf{r}'_i$  fiind vectorii de poziție ai sarcinilor, iar  $\mathbf{r}$  vectorul de poziție al punctului de observație. În cazul unei distribuții continue de sarcină, caracterizată



prin densitatea volumetrică  $\rho(\mathbf{r}')$  și prin densitatea superficială  $\sigma(\mathbf{r}')$  potențialul  $\varphi$  este dat de relația

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{(\mathcal{V}')} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \iint_{(S')} \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (6.6.30)$$

Această formulă poate fi utilizată în toate situațiile în care urmărim să determinăm potențialul electric al unei distribuții volumetrice sau superficiale de sarcină.

De notat, însă, că obținerea efectivă a potențialului  $\varphi$  cu ajutorul relațiilor (6.6.29) și (6.6.30) este, în general, o problemă destul de dificilă. Aceasta deoarece calculul sumelor sau a integralelor respective ridică adesea multe dificultăți. De regulă, aceste calcule se fac aproximativ, în funcție de necesitățile concrete ale problemei studiate. Un astfel de caz (în care potențialul poate fi calculat aproximativ), important pentru multe aplicații practice este cazul în care sarcinile sînt grupate într-un volum dat și sîntem interesați să calculăm  $\varphi$  într-un punct situat față de sarcini la o distanță mare în comparație cu dimensiunile liniare ale volumului ocupat de sarcini. Să ne referim, de exemplu, la cazul unei distribuții discrete de sarcini, de tipul (6.6.29). Atunci, dacă alegem originea sistemului de coordonate în interiorul volumului ocupat de sarcini, situația care ne interesează este caracterizată prin condiția (fig. 6.6.6)

$$|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'_i|. \quad (6.6.31)$$

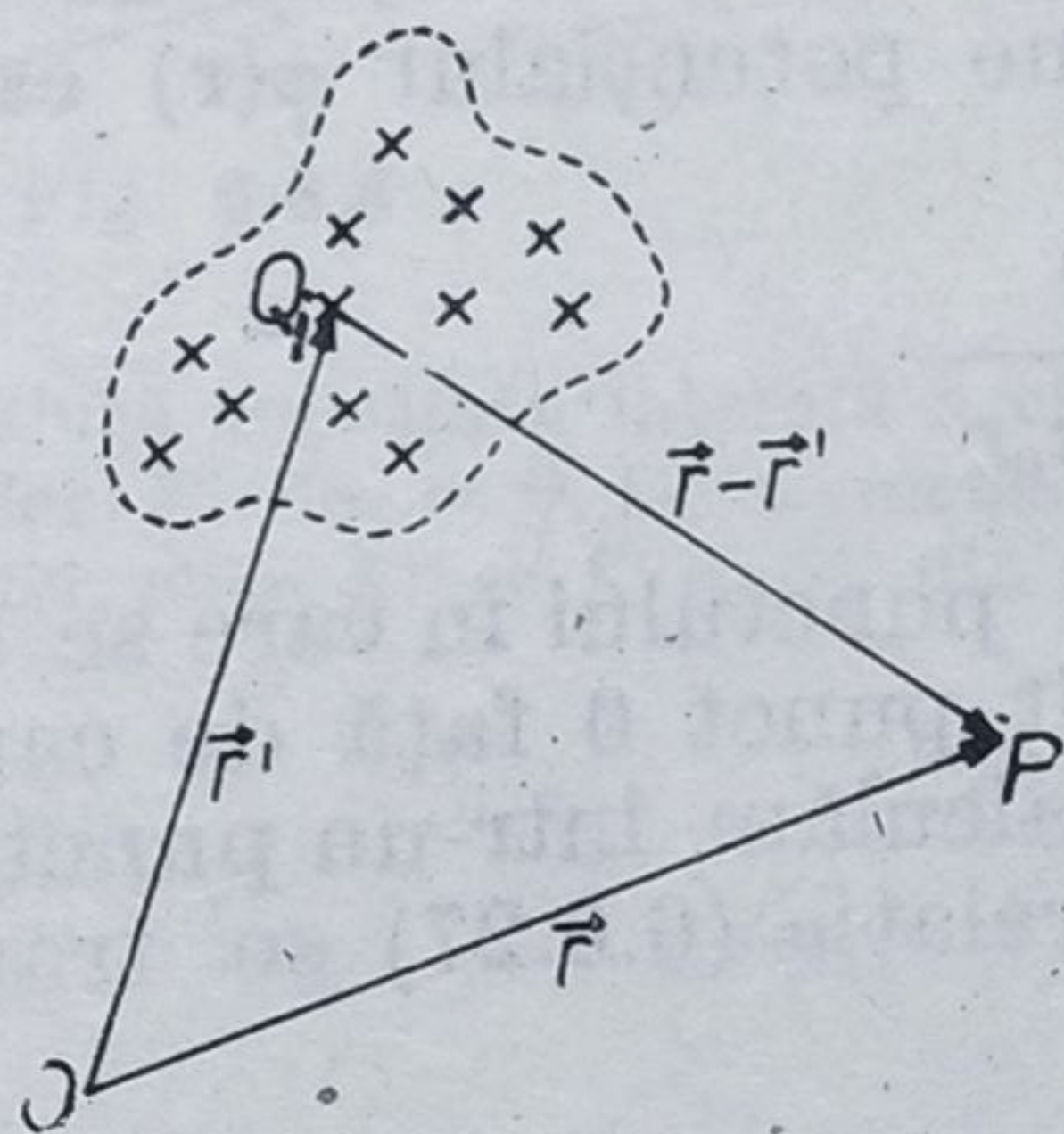


Fig. 6.6.5

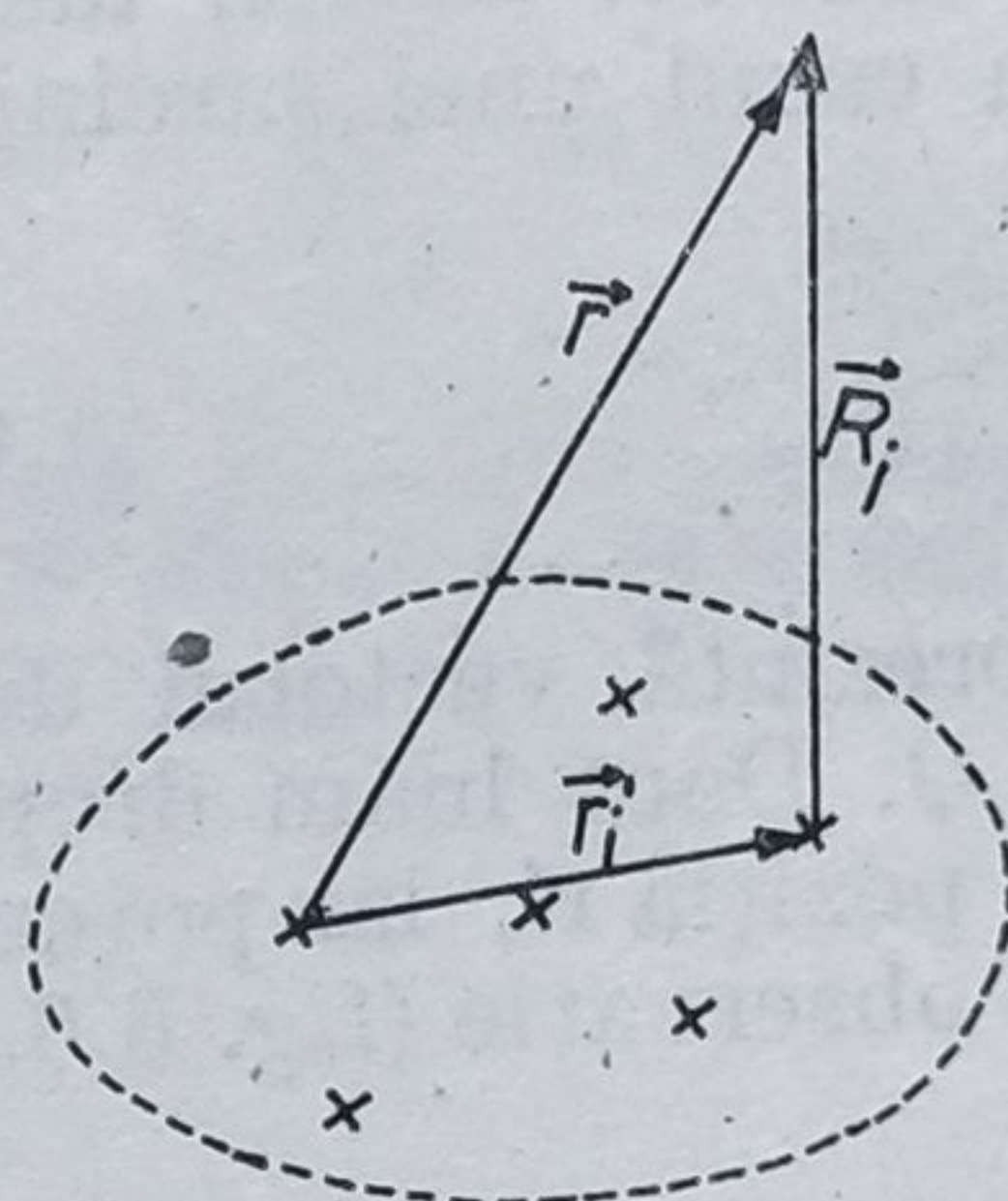


Fig. 6.6.6

De pe figura 6.6.6. se vede că se pot scrie relațiile

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i; \quad R_i^2 = r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i + r_i'^2. \quad (6.6.32)$$

Ținînd cont de (6.6.31) putem face următoarele aproximații

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i + r_i'^2}} \simeq \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i}{r^2}}} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i}{r^2} \right). \quad (6.6.33)$$



În condițiile în care aproximația (6.6.33) este justificată, potențialul (6.6.29) al unui sistem de sarcini punctiforme devine

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i Q_i \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i}{r^2} \right) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_1(\mathbf{r}) \quad (6.6.34)$$

unde

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_i Q_i \quad (6.6.35)$$

și

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_i \mathbf{r}'_i Q_i. \quad (6.6.36)$$

Mărimile  $\varphi_0(\mathbf{r})$  și  $\varphi_1(\mathbf{r})$ , date de (6.6.35) și (6.6.36), sînt aproximațiile de ordinul zero și unu ale potențialului (6.6.29) în raport cu condițiile (6.6.31)

Dacă folosim mărimea

$$Q = \sum_i Q_i \quad (6.6.37)$$

care este sarcina totală a sistemului și mărimea

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}'_i Q_i \quad (6.6.38)$$

pe care o numim *moment de dipol* al sistemului de sarcini, atunci mărimile  $\varphi_0(\mathbf{r})$  și  $\varphi_1(\mathbf{r})$  din (6.6.35) și (6.6.36) capătă expresiile

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.6.39)$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (6.6.40)$$

De aici se vede că  $\varphi_0$  reprezintă potențialul pe care l-ar crea în punctul de observație o sarcină punctiformă egală cu suma sarcinilor din sistem, concentrată într-un singur punct din interiorul sistemului de sarcini (ales ca origine a axelor de coordonate). Din acest motiv,  $\varphi_0(\mathbf{r})$  se numește *potențial de unipol*. Mărimea  $\varphi_1(\mathbf{r})$  se numește *potențial de dipol* al sistemului de sarcini și dacă în aproximația (6.6.33) s-ar fi luat în considerație și termeni de ordin superior, atunci desigur că ar fi intervenit și potențiale de cvadripol, octupol ș.a.m.d. Din relațiile (6.6.37) — (6.6.40) se constată că pentru un sistem de sarcini, neutru în ansamblul său ( $Q = 0$ ) avem  $\varphi_0(\mathbf{r}) = 0$ , dar mărimile  $\mathbf{p}$  și  $\varphi_1(\mathbf{r})$  sînt în general diferite de zero.

Cel mai simplu caz de dipol electric îl constituie un sistem de două sarcini electrice egale și de semne contrare. Atunci, conform cu (6.6.38),



momentul de dipol elementar se scrie

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_1 - Q\mathbf{r}_2 = Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = Q\mathbf{l} \quad (6.6.41)$$

unde vectorul  $\mathbf{l}$  definește poziția sarcinii pozitive în raport cu cea negativă. Desigur că din expresia (6.6.40) a potențialului de dipol  $\varphi_1(\mathbf{r})$  se poate calcula câmpul electric  $\mathbf{E}_1$  de dipol al sistemului de sarcini (sau a dipolului elementar), conform relației

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right). \quad (6.6.42)$$

De exemplu, pentru un dipol simplu, de moment dipolar constant, avem

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \quad (6.6.43)$$

sau ținând cont că  $\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p}$  și  $\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$ , obținem

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (6.6.44)$$

Uneori potențialul de dipol  $\varphi_1(\mathbf{r})$  și câmpul electrostatic dipolar  $\mathbf{E}_1$  se scriu în coordonate polare, alegând drept axă polară o axă orientată după vectorul  $\mathbf{p}$  și drept unghi polar  $\theta$  — unghiul între vectorii  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{p}$ . Atunci, din (6.6.40) avem

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6.6.45)$$

În aceste coordonate se definesc componentele radială  $E_r$  și meridională  $E_\theta$  ale câmpului de dipol prin relațiile

$$E_r = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.6.46)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = -\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (6.6.47)$$

Direcțiile caracterizate prin  $\theta = 0$  și  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se numesc „direcții Gauss” ale dipolului. Cunoașterea valorilor câmpului de dipol pe aceste direcții permite determinarea momentului dipolar  $\mathbf{p}$ .



În sfârșit, să mai notăm că în coordonate polare plane se obține ușor ecuația liniilor de câmp ale dipolului, linii definite ca fiind curbe tangente la vectorul  $\mathbf{E}_1$ . Dacă  $d\mathbf{s}$  este un segment diferențial orientat dintr-o astfel de curbă, atunci condiția de tangență la  $\mathbf{E}_1$  se va scrie sub forma

$$\mathbf{E}_1 \times d\mathbf{s} = 0. \quad (6.6.48)$$

În componente polare această expresie devine

$$\frac{r}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}. \quad (5.6.49)$$

Ținând în continuare cont de relațiile (6.6.46) și (6.6.47) și separând variabilele  $r$  și  $\theta$  în ecuația (6.6.49) avem

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

sau dacă integrăm obținem

$$r = C \sin^2 \theta \quad (6.6.50)$$

Aici  $C$  este o constantă de integrare, în funcție de valoarea căreia se obțin diversele linii de câmp, câteva dintre ele fiind prezentate în fig. 6.6.7.

Desigur că în cazul distribuției continue de sarcină descrisă de (6.6.30) dacă dorim să calculăm potențialul  $\varphi$  într-un punct situat, față de sistemul de sarcini, la o distanță mare în comparație cu dimensiunile liniare ale volumului ocupat de sarcini,  $\varphi$  poate fi calculat de asemenea în aproximații succesive de unipol, dipol, cvadripol ș.a.m.d. Se vede ușor că dacă ne referim la aproximația de dipol, formulele (6.6.36)–(6.6.47) rămân valabile și în cazul distribuției continue de sarcină cu condiția ca momentul de dipol să nu mai fie definit de relația (6.6.38), ci de relația

$$\mathbf{p} = \iiint \mathbf{r}' \rho(r') dV'. \quad (6.6.51)$$

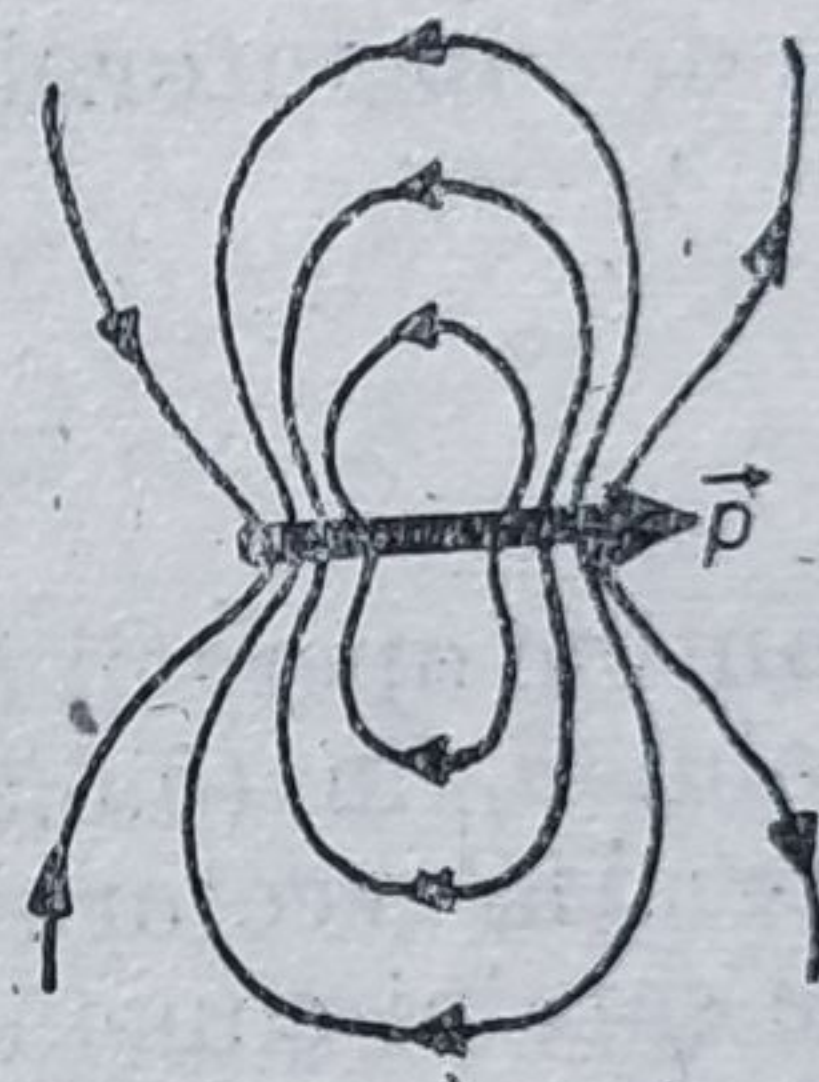


Fig. 6.6.7

Cunoscând potențialul  $\varphi$  și câmpul  $\mathbf{E}$  în aproximațiile de unipol, dipol, cvadripol, ș.a.m.d. pentru o distribuție dată de sarcini se pot cunoaște în aproximațiile respective — toate proprietățile câmpului electrostatic (de exemplu, forma liniilor de câmp, fluxurile câmpului prin suprafețe date, forțele cu care câmpul acționează asupra sarcinilor plasate în el etc).

Să revenim acum la cazul general al unui sistem de sarcini aflate în vid, în repaus reciproc și să calculăm energia potențială a interacțiunii reciproce a unor astfel de sarcini. După cum se știe din mecanică,



variația energiei potențiale a interacțiunii reciproce a unui sistem conservativ de particule este egală cu lucrul mecanic ce se consumă pentru a modifica configurația (așezarea spațială) sistemului de particule. De aceea vom căuta să estimăm variația energiei potențiale a interacțiunii reciproce a sistemului de sarcini, calculând lucrul mecanic necesar pentru a schimba configurația sistemului de sarcini. Dacă ne referim la un sistem de sarcini cu distribuție punctiformă, atunci conform cu (6.6.27) putem afirma că în punctul  $\mathbf{r}_i$  în care se afla sarcina  $Q_i$  avem un potențial  $\varphi_i$ , creat de restul sarcinilor din sistem, definit de relația

$$\varphi_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{k \neq i} \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}; \quad r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| \quad (6.6.52)$$

unde  $r_{ik}$  reprezintă distanța între sarcinile  $Q_i$  și  $Q_k$ . Lucrul mecanic  $d\mathcal{A}_i$  consumat la deplasarea sarcinii  $Q_i$  pe traseul  $d\mathbf{r}'_i$  este dat de expresiile

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_i &= \mathbf{F}_{i(int)} \cdot d\mathbf{r}'_i = Q_i \mathbf{E}_{i(int)} d\mathbf{r}'_i = -Q_i \nabla_i \varphi_{i(int)} d\mathbf{r}_i = \\ &= -Q_i d\varphi_i = -Q_i d_i \left[ \sum_{k \neq i} \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}} \right] \end{aligned} \quad (6.6.53)$$

unde operatorul

$$\nabla_i = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

conține operații de derivare în raport cu coordonatele sarcinii  $Q_i$ , iar simbolul  $d_i$  în (6.6.53) se referă la variația distanțelor  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  prin variația vectorului  $\mathbf{r}_i$ . Evident că modificarea configurației sistemului de sarcini constă, în general, din schimbarea pozițiilor tuturor sarcinilor. Lucrul mecanic necesar pentru această schimbare va fi dat de expresia

$$d\mathcal{A} = \sum_i d\mathcal{A}_i = -d \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{Q_i Q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}} \right]. \quad (6.6.54)$$

În această ultimă relație factorul  $1/2$  a fost introdus din cauza faptului că, scoțind diferențiala în fața sumei, modificarea datorită unei deplasări  $d\mathbf{r}_i$  prin intermediul distanțelor  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  apare, pentru un  $i$  dat, de două ori în termenul de sub sumă: odată pentru  $i = i_1$  și odată pentru  $k = i_1$ . Pe de altă parte, conform celor specificate mai sus, lucrul mecanic  $d\mathcal{A}$ , cheltuit pentru modificarea configurației sistemului de particule este legat de variația energiei potențiale de interacțiune reciprocă  $W_{int}$  prin relația

$$d\mathcal{A} = -dW_{int}. \quad (6.6.55)$$



Comparând relațiile (6.6.54) și (6.6.55) observăm că energia potențială de interacțiune reciprocă a unui sistem de sarcini discrete este dată de relația

$$W_{int} = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{k \neq i}^n \frac{Q_i Q_k}{4\pi \epsilon_0 r_{ik}}. \quad (6.6.56)$$

Legat de această expresie a energiei potențiale de interacțiune a sistemului de sarcini se poate discuta problema *stabilității statice* a configurației sistemului respectiv. Configurația unui sistem de particule este stabilă în sens static dacă între configurațiile posibile ale sistemului există o configurație pentru care energia potențială de interacțiune a particulelor din sistem are valoare minimă. În cazul sistemelor de sarcini electrice stabilitatea statică a configurației lor va impune deci, să existe o configurație pentru care  $W_{int}$ , dat de (6.6.56), să satisfacă simultan următoarele condiții de minim

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{int}}{\partial x_h} = 0; \quad \frac{\partial W_{int}}{\partial y_h} = 0; \quad \frac{\partial W_{int}}{\partial z_h} = 0 \\ \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial x_h^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial y_h^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial z_h^2} > 0 \end{aligned} \quad (6.6.57)$$

pentru orice  $h = 1, 2, \dots, n$  ( $x_h, y_h, z_h$  — coordonatele carteziene ale particulei). Se poate însă ușor verifica prin calcule directe că este satisfăcută relația

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial z_h^2} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{Q_i Q_k}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{1}{r_{ik}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \left( \frac{1}{r_{ik}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} \left( \frac{1}{r_{ik}} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.6.58)$$

Această relație arată deci că pentru  $W_{int}$ , dat de (6.6.56), a doua din condițiile (6.6.57) nu este îndeplinită. Rezultă că un sistem de sarcini electrice nu are o configurație stabilă în sens static. Acest fapt este cunoscut sub denumirea de *teorema Ernshaw*. De menționat însă că, în mișcare, un sistem de sarcini electrice poate fi stabil în sens dinamic.

Evident că raționamentele și considerațiile anterioare referitoare la energia potențială de interacțiune reciprocă a unui sistem de sarcini sînt aplicabile nu numai în cazul sarcinilor distribuite discret, ci și în cazul sarcinilor distribuite continuu (volumic sau superficial). Vom scrie energia potențială de interacțiune reciprocă pentru astfel de cazuri prin analogie cu expresia (6.6.56). Această expresie se poate scrie și sub forma

$$W_{int} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \sum_{k \neq i} \frac{Q_k}{4\pi \epsilon_0 r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi'_i(int) \quad (6.6.59)$$

unde  $\varphi'_i$  este potențialul creat în punctul unde se află sarcina  $Q_i$  de către restul sarcinilor din sistem (adică de sarcinile  $Q_k \neq Q_i$ ). Atunci, în cazul



unui sistem de sarcini cu distribuție continuă (volumetrică sau superficială) energia potențială de interacțiune reciprocă se scrie sub forma

$$W_{int} = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(\mathbf{r}) \varphi'_{int}(\mathbf{r}) d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \iint_{(S)} \sigma(\mathbf{r}) \varphi'_{int}(\mathbf{r}) dS \quad (6.6.60)$$

unde  $\varphi'_{int}(\mathbf{r})$  este potențialul creat în punctul  $\mathbf{r}$  de sarcinile interioare sistemului, dar din afara elementului de volum  $d\mathcal{V}$ , respectiv a elementului de suprafață  $dS$ , localizate în jurul punctului  $\mathbf{r}$ .

Este interesant de remarcat că energia de interacțiune electrostatică a sarcinilor, dată de (6.6.60), este echivalentă cu energia câmpului electrostatic creat de interacțiile dintre sistemul respectiv de sarcini. Conform cu (6.3.16) energia unui câmp electrostatic are expresia

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V}. \quad (6.6.61)$$

Această energie este distribuită în tot volumul, densitatea ei volumică fiind

$$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (6.6.62)$$

Ținând cont că  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , putem transforma relația (6.6.61) în forma

$$W_E = -\frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} \mathbf{D} \cdot \nabla\varphi d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} [\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla(\mathbf{D} \cdot \varphi)] d\mathcal{V}. \quad (6.6.63)$$

Ultimul termen din această relație poate fi transformat cu ajutorul teoremei Gauss în felul următor

$$\frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} \nabla(\mathbf{D} \cdot \varphi) d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iint_{(S)} \mathbf{D} \cdot \varphi dS \quad (6.6.64)$$

unde  $(S)$  este suprafața ce mărginește volumul  $(\mathcal{V})$ . Dacă această suprafață se alege ca fiind suprafața de la infinit, atunci în punctele ei  $\varphi_\infty = 0$  și deci integrala (6.6.64) se anulează. Ținând cont în plus că  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , din (6.6.63) obținem

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{V})} \rho \varphi d\mathcal{V}. \quad (6.6.65)$$

Relațiile (6.6.56) — (6.6.65) arată echivalența între energia de interacțiune electrostatică (6.6.56) a sarcinilor și energia (6.6.61) a câmpului



creat de aceste sarcini. Dar energia de interacțiune a particulelor încărcate electric depinde de distanțele reciproce dintre particule, pe cînd energia cîmpului este o mărime distribuită continuu în spațiu. Aceasta arată că în cazul electrostatic putem vorbi echivalent fie de interacțiunea la distanță, fie de interacțiunea din aproape în aproape, prin intermediul cîmpului. (O situație similară se întîlneste și în cazul interacțiunii unui sistem de curenți electrici constanți și a cîmpului magnetic creat de ei — vezi § 6.8.) De notat, însă, că avem în vedere în această echivalență numai energia de interacțiune a cîmpurilor create de sistemul de sarcini, adică energia cîmpului total din care s-au exclus cîmpurile proprii ale fiecărei sarcini în parte. Aceasta înseamnă că pentru cazul particular al sistemului compus din două sarcini, de exemplu, ale căror cîmpuri electrostatice  $\mathbf{E}_1$  și  $\mathbf{E}_2$  se suprapun și, potrivit principiului de superpoziție, crează un cîmp rezultat

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (6.6.66)$$

caracterizat prin energia

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{(\mathcal{V}_1)} E_1^2 d\mathcal{V} + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{(\mathcal{V}_2)} E_2^2 d\mathcal{V} + \varepsilon_0 \iiint_{(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\mathcal{V} \quad (6.6.67)$$

echivalența energiei potențiale de interacțiune electrostatică (6.6.56) vizază numai termenul de interacțiune  $W_{12} = \varepsilon_0 \iiint \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\mathcal{V}$  din expresia

(6.6.67). Dar o echivalență de acest fel nu mai există în cazul general, al sarcinilor în mișcare arbitrară și a cîmpurilor care variază arbitrar în timp. În astfel de cazuri putem vorbi numai de interacțiunea din aproape în aproape, transmisă prin intermediul cîmpului electromagnetic.

Dacă sistemul de sarcini se află și într-un cîmp electrostatic exterior, diferit de cîmpul creat de sarcinile din sistem, atunci modificarea poziției sarcinilor este însoțită de efectuarea de lucru mecanic de către aceste cîmpuri. Lucrul mecanic elementar efectuat de către cîmpul exterior la deplasările  $d\mathbf{r}_i$  ale sarcinilor  $Q_i$  este dat de expresiile

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_{ext} &= \sum_i d\mathcal{A}_{i(ext)} = \sum_i \mathbf{F}_{i(ext)} d\mathbf{r}_i = \sum_i Q_i \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = \\ &= - \sum_i Q_i \nabla \varphi_{ext}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = - d\left( \sum_i Q_i \varphi_{ext}(\mathbf{r}_i) \right). \end{aligned} \quad (6.6.68)$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic elementar efectuat de cîmpul exterior este legat de variația energiei potențiale a sistemului de sarcini în cîmpul exterior prin relația

$$d\mathcal{A}_{ext} = - dW_{ext} \quad (6.6.69)$$

Din compararea relațiilor (6.6.68) și (6.6.69) rezultă că energia potențială într-un cîmp exterior a unui sistem de sarcini distribuite discret este dată de relația

$$W_{ext} = \sum_i Q_i \varphi_{ext}(\mathbf{r}_i) \quad (6.6.70)$$



Atunci devine evident că energia potențială într-un câmp exterior a unui sistem de sarcini distribuite continuu (volumetric sau/și superficial) este dată de expresia

$$W_{ext} = \iiint_{(V)} \rho(\mathbf{r}) \varphi_{ext}(\mathbf{r}) dV + \iint_{(S)} \sigma(\mathbf{r}) \varphi_{ext}(\mathbf{r}) dS. \quad (6.6.71)$$

Este necesar să fie subliniat încă o dată că, în relația (6.6.71), mărimea  $\varphi_{ext}$  reprezintă potențialul câmpului electric exterior sistemului de sarcini (câmpul necreat de sarcinile din sistemul considerat).

Dacă transpunem aceste considerații la un dipol elementar de tipul (6.6.41), atunci din (6.6.70) se vede că energia potențială a unui astfel de dipol, plasat într-un câmp electric exterior, este dată de relația

$$W_{ext} = Q\varphi_{ext}(\mathbf{r}_1) - Q\varphi_{ext}(\mathbf{r}_2) = Q[\varphi_{ext}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}) - \varphi_{ext}(\mathbf{r}_2)]. \quad (6.6.72)$$

Dacă se consideră vectorul  $\mathbf{l}$  ca fiind un vector infinitesimal și se ține cont de faptul că  $\mathbf{E}_{ext} = -\nabla\varphi_{ext}$ , atunci, prin dezvoltare în serie Taylor, relația (6.6.72) se transcrie în felul următor

$$W_{ext} = Q(\nabla\varphi_{ext}) \cdot \mathbf{l} = -Q\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_{ext} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext} \quad (6.6.73)$$

Aceasta este expresia energiei potențiale a unui dipol electric de moment dipolar  $\mathbf{p}$  într-un câmp electric de intensitate  $\mathbf{E}_{ext}$ .

Forțele care acționează asupra sarcinilor electrice din partea câmpurilor exterioare (adică a câmpurilor din care s-au exclus câmpurile proprii create de sarcinile în cauză) se numesc adesea forțe ponderomotoare. Din relația (6.6.68) se vede că în cazul unei sarcini discrete, forța ponderomotoare este de forma

$$\mathbf{F}_{pm} = Q\mathbf{E}_{ext}. \quad (6.6.74)$$

În cazul distribuției continue a sarcinii, comparând relațiile (6.6.71) și (6.6.70) și având în vedere relațiile (6.6.64) și (6.6.69), se vede că putem vorbi de forțe ponderomotoare elementare corespunzătoare sarcinilor din elementul de volum  $dV$ , respectiv din elementul de suprafață  $dS$ , definite prin relațiile

$$d\mathbf{F}_{pm}^{(V)} = \rho\mathbf{E}_{ext} dV = \mathbf{f}_{pm}^{(V)} dV \quad (6.6.75)$$

$$d\mathbf{F}_{pm}^{(S)} = \sigma\mathbf{E}_{ext} dS = \mathbf{f}_{pm}^{(S)} dS \quad (6.6.76)$$

unde mărimile  $\mathbf{f}_{pm}^{(V)}$  și  $\mathbf{f}_{pm}^{(S)}$  pot fi denumite densitate volumetrică, respectiv superficială de forțe ponderomotoare.

Dacă ne referim din nou la cazul unui dipol elementar de tipul (6.6.41), atunci din (6.6.74) rezultă că asupra unui astfel de dipol acționează o forță dată de relația

$$\mathbf{F}_{pm} = Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_1) - Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2) = Q[\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}) - \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2)] \quad (6.6.77)$$



Dacă și de astă dată vectorul  $\mathbf{l}$  este considerat infinizesimal și se dezvoltă în serie Taylor termenul  $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{l})$ , în raport cu  $\mathbf{l}$ , din relația (6.6.77) se obține

$$\mathbf{F}_{pm} = Q(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{ext} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{ext} = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E}_{ext}. \quad (6.6.78)$$

Aceasta este expresia forței ponderomotoare totale care acționează asupra dipolului electric din partea câmpului exterior  $\mathbf{E}_{ext}$ . Din relația (6.6.78) rezultă că pentru câmpuri electrice exterioare omogene (câmpuri pentru care sînt îndeplinite condițiile  $\partial E_\alpha / \partial x_\beta = 0$ , unde  $\{E_\alpha\} = \{E_x, E_y, E_z\}$  și  $\{x_\beta\} = \{x, y, z\}$ ), forța ponderomotoare totală ce acționează asupra dipolului este nulă.

După cum se vede din (6.6.77), în cazul unui dipol plasat într-un câmp electrostatic omogen avem de a face de fapt cu două forțe  $\mathbf{F}_1 = Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_1)$  și  $\mathbf{F}_2 = -Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2)$ , care au puncte de aplicație diferite (respectiv punctele  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$  (fig. 6.6.8)). Atunci din mecanică se știe că un astfel de sistem de forțe nu este complet caracterizat de forța rezultantă, dată de (6.6.78), ci pe lângă aceasta trebuie cunoscut momentul rezultant al forțelor respective față de un punct arbitrar ales (punctul  $C$ , de exemplu, din fig. 6.6.8)).

De regulă, în cazul dipolului se dă momentul forțelor  $\mathbf{F}_1$  și  $\mathbf{F}_2$  față de centrul  $C$  al acestuia (față de punctul definit de vectorul  $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ ). Acest moment va fi definit deci prin relația

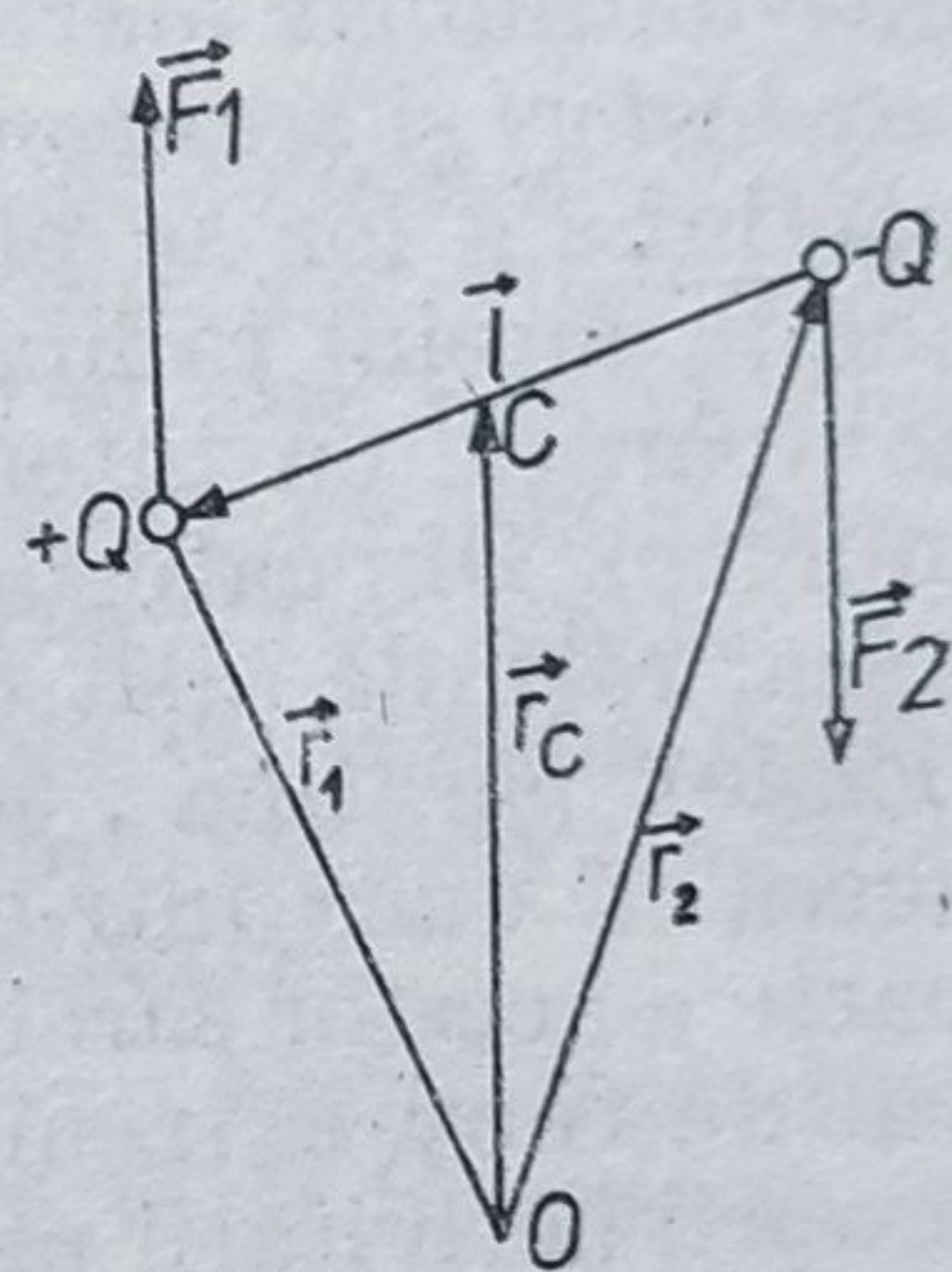
$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{2} \times \mathbf{F}_1 - \frac{1}{2} \times \mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{l} \times Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} \mathbf{l} \times Q\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p} \times [\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2)]. \end{aligned} \quad (6.6.79)$$

Considerînd vectorul  $\mathbf{l}$  ca infimizezimal și dezvoltînd în serie Taylor se obțin următoarele relații

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_2) &= \mathbf{E}_{ext}\left(\mathbf{r}_c + \frac{\mathbf{l}}{2}\right) + \mathbf{E}_{ext}\left(\mathbf{r}_c - \frac{\mathbf{l}}{2}\right) \simeq \\ &\simeq \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_c) + \left(\frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla\right) \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_c) - \left(\frac{\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla\right) \mathbf{E}_{ext} = 2\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_c) \end{aligned} \quad (6.6.80)$$

Atunci, din (6.6-79) rezultă că momentul total al forțelor ponderomotoare ce acționează asupra unui dipol electric are expresia

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_c). \quad (6.6.81)$$



Fgi. 6.6.8



Se vede că acest moment este nul dacă  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}_{ext}$ . În această poziție și energia potențială a dipolului dată de (6.6.73) are valoarea minimă, ceea ce înseamnă că poziția dipolului în câmpul exterior pentru care  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}_{ext}$  este o poziție de echilibru stabil. De notat, în plus, că momentul (6.6.81) poate fi diferit de zero și în cazul câmpurilor omogene când forța ponderomotivă totală (6.6.78) este nulă.

#### 6.6.2. Câmpul electrostatic în prezența substanței

Experiența arată că, în general, prezența unor substanțe într-o zonă în care se află sarcini electrice, duce la modificarea interacțiunii acestor sarcini în comparație cu interacțiunile lor în vid. Aceasta arată că substanțele au în general anumite proprietăți electrice. În ciuda enormei varietăți din punct de vedere al proprietăților electrice, substanțele se pot clasifica într-un număr foarte mic de categorii și anume: *dielectrici* (sau izolatori), *conductori* și *semiconductori*. Dielectricii se disting prin faptul că dacă într-o porțiune a lor se plasează (printr-un procedeu oarecare) sarcini electrice aceste sarcini rămân în respectiva porțiune un timp relativ lung (lung în comparație cu intervalele de timp proprii activității umane: secunde și minute). Din categoria dielectricilor fac parte substanțe ca: sticla, ebonita, mica, rășinile (atât cele naturale ca de pildă chihlimbarul, cât și cele artificiale), parafina, sulful, uleiurile etc. Conductorii se caracterizează prin aceea că dacă într-o porțiune a lor se plasează sarcini electrice, o mare parte a acestor sarcini părăsesc porțiunea unde au fost plasate într-un interval de timp extrem de scurt (scurt în comparație cu intervalele de timp proprii activității umane: secunde și minute). Din categoria conductorilor fac parte toate metalele, soluțiile de săruri, de acizi și baze, sărurile în stare topită, gazele ionizate, coloizii etc. Proprietățile amintite ale dielectricilor și conductorilor se datoresc faptului că sarcinile electrice se pot deplasa foarte greu prin dielectrici și extrem de ușor prin conductori. De aceea se spune că dielectricii nu conduc bine electricitatea (au o conductibilitate electrică foarte scăzută) și respectiv conductorii conduc bine electricitatea (au o conductibilitate electrică foarte ridicată). Între dielectrici și conductori, din punct de vedere al proprietăților electrice, se situează substanțele numite *semiconductori*. Semiconductorii se caracterizează printr-o conductibilitate scăzută în comparație cu metalele, dar sub acțiunea unor factori externi (ca lumina, căldura, presiunea, radiații nucleare) ei pot deveni relativ buni conductori de electricitate.

De consemnat că împărțirea substanțelor în categorii menționate mai sus este într-o anumită măsură convențională și arbitrară, deoarece în funcție de diverșii factori externi aceeași substanță poate să fie încadrată în diferite categorii. Astfel, metalele care în condiții obișnuite sînt conductori se comportă ca și dielectricii în câmpurile foarte rapid variabile (cum sînt câmpurile electrice din razele X, care variază cu frecvența de ordinul  $10^{18} \div 10^{20}$  Hz); unele sticle puternic încălzite, din dielectrici devin bune conductoare de electricitate etc.







echipotentială ( $\varphi_s(x, y, z) = \text{const}$ ). Pe de altă parte, din relația  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , rezultă că vectorul  $\mathbf{E}$  este perpendicular pe suprafețele echipotențiale  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ . Rezultă deci că în cazul electrostatic vectorul  $\mathbf{E}$  în vecinătatea imediată a suprafețelor metalice este totdeauna perpendicular pe respectivele suprafețe. Valoarea lui, în vecinătatea unei suprafețe metalice, poate fi găsită prin aplicarea teoremei fluxului electric (relația 6.6.5). Se ia un cilindru de înălțime  $2h$ , normal pe suprafața metalului, care decupează din suprafața metalului un cerc de arie  $S$  (fig. 6.6.10), pentru care în conformitate cu (6.6.5) avem

$$\oiint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \iint_{(S_1)} \mathbf{E}_{int} \, dS_1 + \iint_{(S_2)} \mathbf{E} \, dS_2 + \iint_{(S_l)} \mathbf{E} \, dS_l = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad (6.6.82)$$

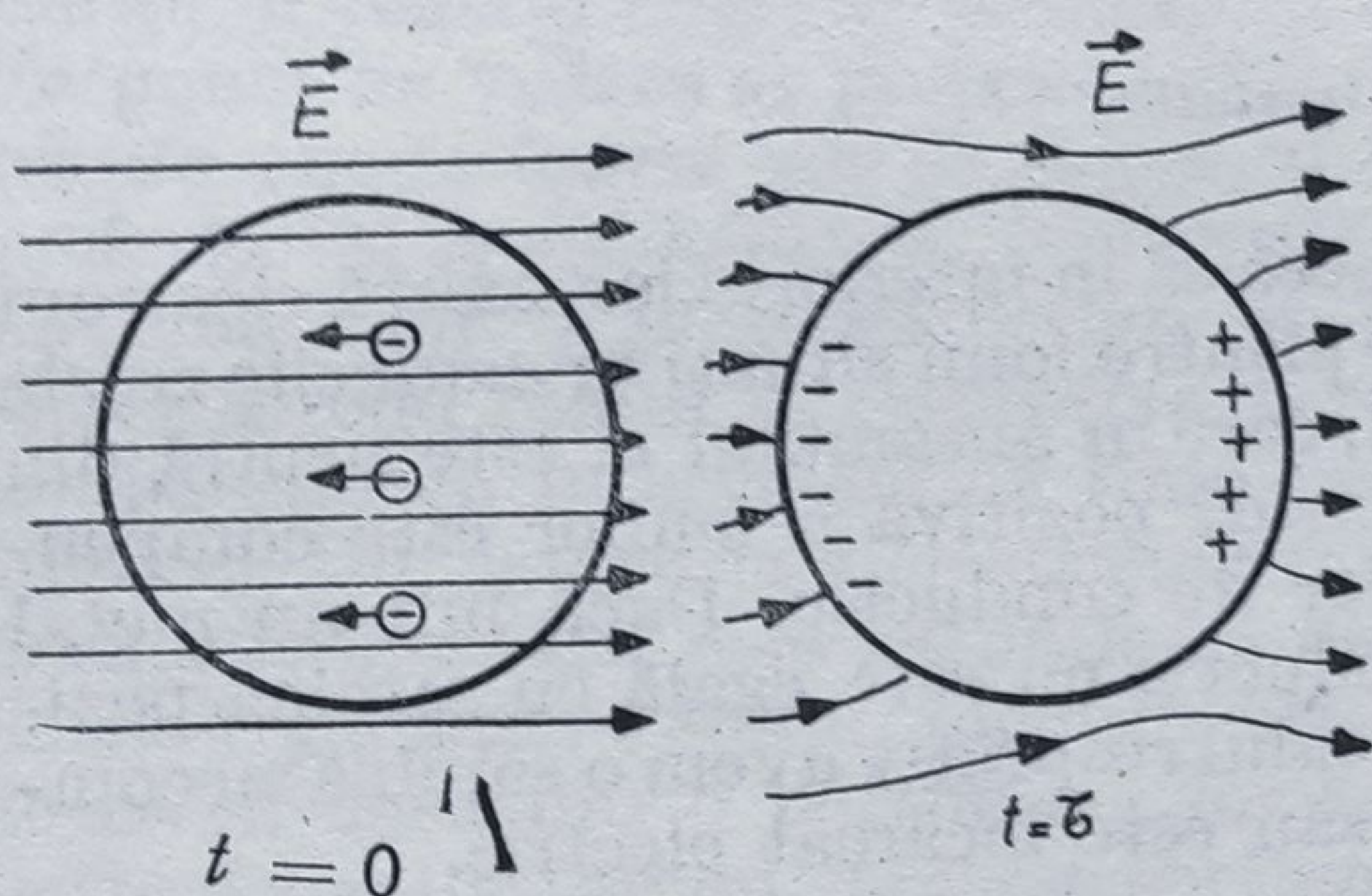


Fig. 6.6.9

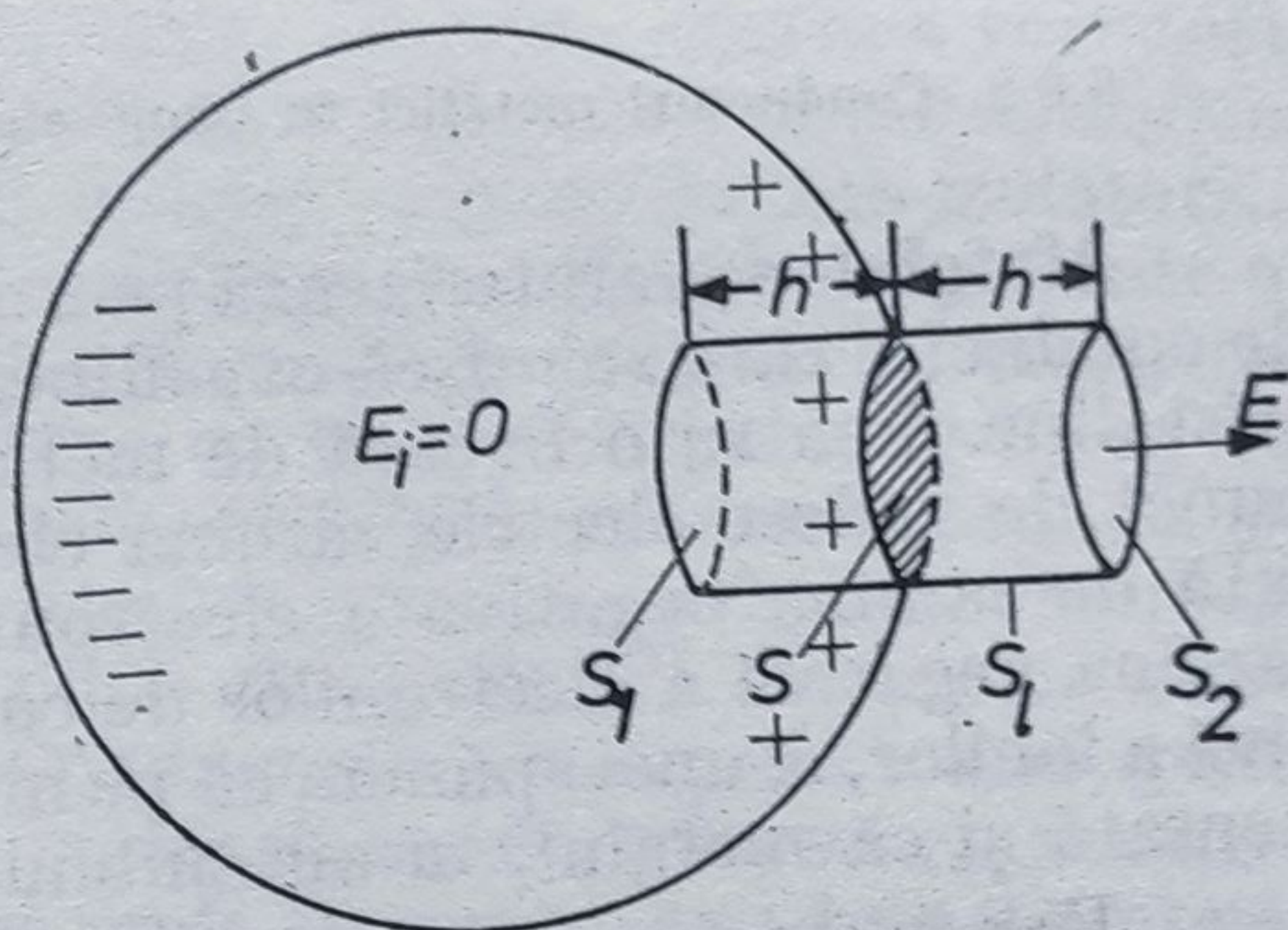


Fig. 6.6.10

Dacă se alege cazul limită când  $S_l \rightarrow 0$  și  $h \rightarrow 0$ , atunci putem afirma că:  $Q_{int} = \sigma S$ ;  $\iint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \, dS$ ;  $\iint \mathbf{E} \, dS_l = 0$  (deoarece  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}_l$ ). Atunci din (6.6.82) rezultă că intensitatea câmpului electrostatic în vecinătatea exterioră suprafeței metalului este normală la această suprafață și are valoarea

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (6.6.83)$$

Întrucît  $E_n$  este de același semn cu  $\sigma$ , rezultă că sarcinile electrice de pe suprafața metalului sînt acționate spre exteriorul metalului. Deoarece această acțiune se manifestă asupra sarcinilor sub forma unei forțe, iar sarcinile sînt distribuite pe suprafață, rezultă că putem vorbi de o forță pe unitatea de suprafață — adică de o presiune — ce se exercită asupra sarcinilor. Această presiune se numește *presiune electrostatică*.

Pentru a găsi expresia care determină presiunea electrostatică vom considera din nou elementul de arie  $dS$  de pe suprafața exterioră a metalului (fig. 6.6.11) și notăm cu  $\mathbf{E}'$  câmpul creat de sarcina  $\sigma dS$ , în vecinătatea imediată a lui  $dS$  și cu  $\mathbf{E}''$  câmpul creat de restul sarcinilor de pe suprafața



metalului în locul unde se află  $dS$ . Atunci, ținând cont că în interiorul metalului câmpul este nul ( $E_{int} = 0$ ), iar în exterior are valoarea  $E_n$ , dată de (6.6.83), putem scrie relațiile

$$E_n = E' + E'' = \frac{\sigma}{\epsilon_0};$$

$$E_{int} = E'' - E' = 0. \quad (6.84)$$

De aici rezultă

$$E'' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (6.6.85)$$

Forța care acționează asupra sarcinii  $dQ = \sigma dS$  va avea deci valoarea dată de expresia

$$dF = dQ \cdot E'' = \sigma dS \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \quad (6.6.86)$$

și va fi orientată spre exteriorul suprafeței metalice. Atunci rezultă pentru presiunea electrostatică expresia

$$P_E = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (6.6.87)$$

Existența presiunii electrostatice, respectiv a unei forțe care acționează asupra sarcinilor spre exteriorul suprafeței metalice face, atunci când avem un metal cu sarcini necompensate, ca acestea să fie împinse a se localiza doar pe suprafața exterioară a metalului. Dacă metalul are cavități interioare sarcinile nu se localizează pe suprafețele acestora, astfel că pe suprafețele cavităților interioare densitatea superficială de sarcină va fi nulă ( $\sigma_{int} = 0$ ). Datorită acestui fapt, dacă se comunică unui metal sarcini electrice prin cavități interioare, sarcinile vor trece imediat pe suprafața exterioară și în acest fel se pot încărca suprafețele exterioare ale metalelor la potențiale de valori foarte ridicate, care sînt limitate superior numai de fenomenele de scurgere a sarcinilor (vezi mai jos). Pe baza acestui principiu sînt construiți generatorii electrostatici Van de Graaf cu care se pot obține practic tensiuni electrostatice foarte mari. Ei sînt folosiți în acceleratori liniari de particule și în studiile privind proprietățile electrice ale diferitelor materiale (în special ale izolatoarelor folosite în electrotehnică).

Dacă pe un corp metalic aflat în afara influenței unor câmpuri electrostatice externe, avem o sarcină electrică necompensată  $Q$  (adică este

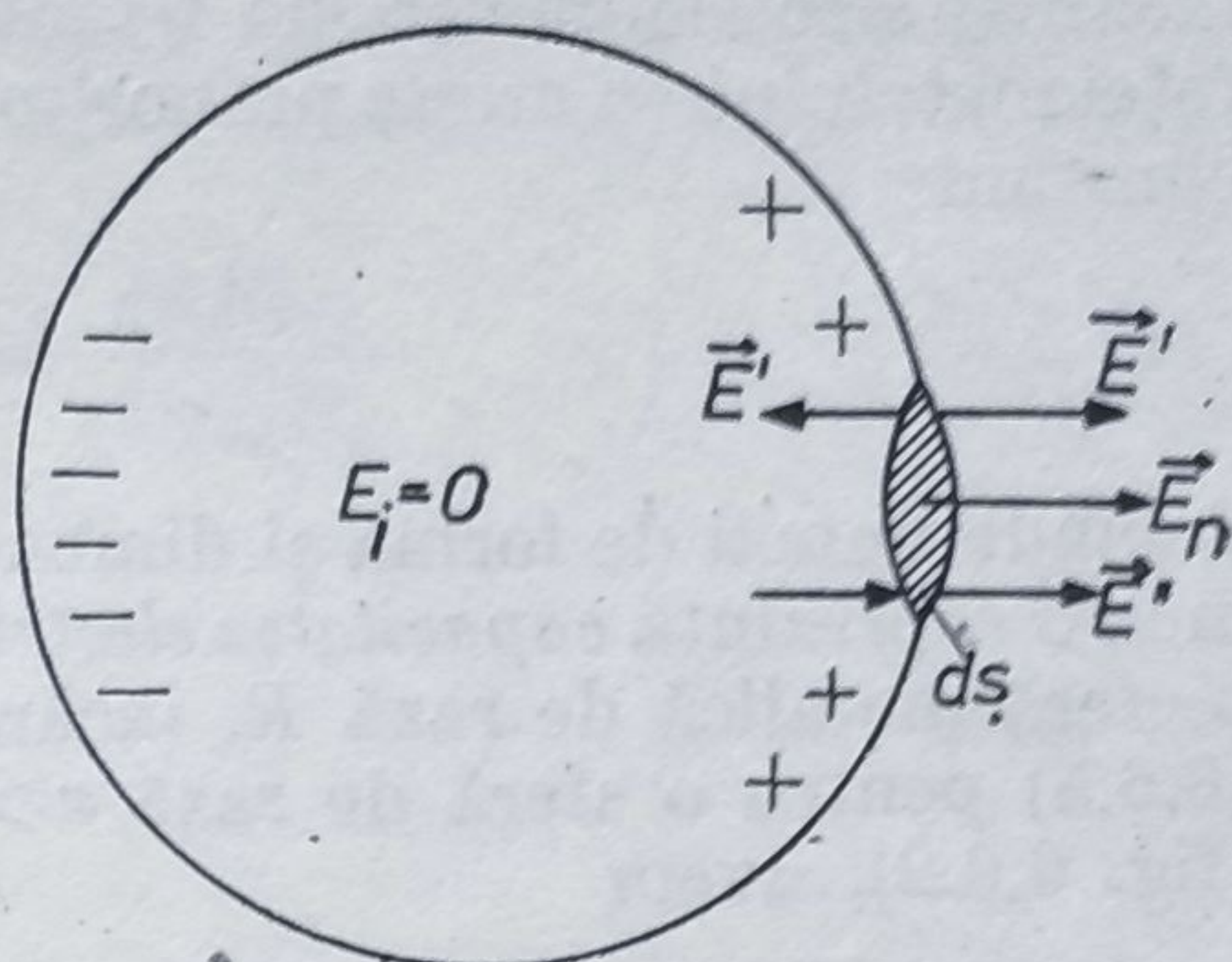


Fig. 6.6.11



încărcat electric cu sarcina  $Q$ ), atunci potențialul electrostatic  $\varphi$  al suprafeței metalului va crește proporțional cu valoarea lui  $Q$ , astfel încât raportul constant

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad (6.6.88)$$

depinde numai de forma și dimensiunile corpului metalic respectiv. Mărimea  $C$  reprezintă *capacitatea electrică* a corpului metalic. Dacă ne referim la o sferă metalică de rază  $R$ , încărcată cu sarcina  $Q$ , atunci aplicând legea (6.6.5) pentru o sferă de rază  $r > R$ , concentrică cu sfera metalică dată (fig. 6.6.2), avem

$$\oint \mathbf{E} \, dS = E \cdot 4\pi r = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (6.6.89)$$

Având în vedere simetria sferică a problemei putem scrie

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{r} \quad (6.6.90)$$

Pentru potențialul electrostatic  $\varphi(\mathbf{r})$ , în afara sferei obținem pe baza legii  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , expresia

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (6.6.91)$$

Această expresie își păstrează valabilitatea pentru  $r \geq R$ , deci și pe suprafața sferei metalice, al cărei potențial va fi dat de

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (6.6.92)$$

Comparând (6.6.92) cu (6.6.88) rezultă că pentru o sferă metalică avem expresia capacității electrice  $C$  dată prin relația

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (6.6.92)$$

Valoarea densității superficiale de sarcină  $\sigma$  pe suprafața unui metal poate fi, în general, diferită în puncte diferite ale suprafeței. Dacă metalul se află în vid sau într-un mediu dielectric omogen,  $\sigma$  într-un punct dat al suprafeței metalului este proporțională cu curbura suprafeței în punctul respectiv. Pentru a dovedi acest lucru vom proceda în felul următor: fie două porțiuni infinitezimale ale suprafeței echipotențiale luate în jurul punctelor în care razele de curbură au valorile  $R_1$  și  $R_2$  și unde densitatea superficială de sarcină are valorile  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ . Acestea pot fi considerate ca echivalente cu două sfere de raze  $R_1$  și  $R_2$  care având densitățile superficiale de sarcină  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  au același potențial electric  $\varphi_1 = \varphi_2$  (fig. 6.6.12).



Ținând cont de formula (6.6.92) și de faptul că sarcinile celor două sfere sînt  $Q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$  respectiv  $Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$ , egalitatea potențialelor se scrie

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} = \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \quad (6.6.94)$$

de unde rezultă că

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (6.6.95)$$

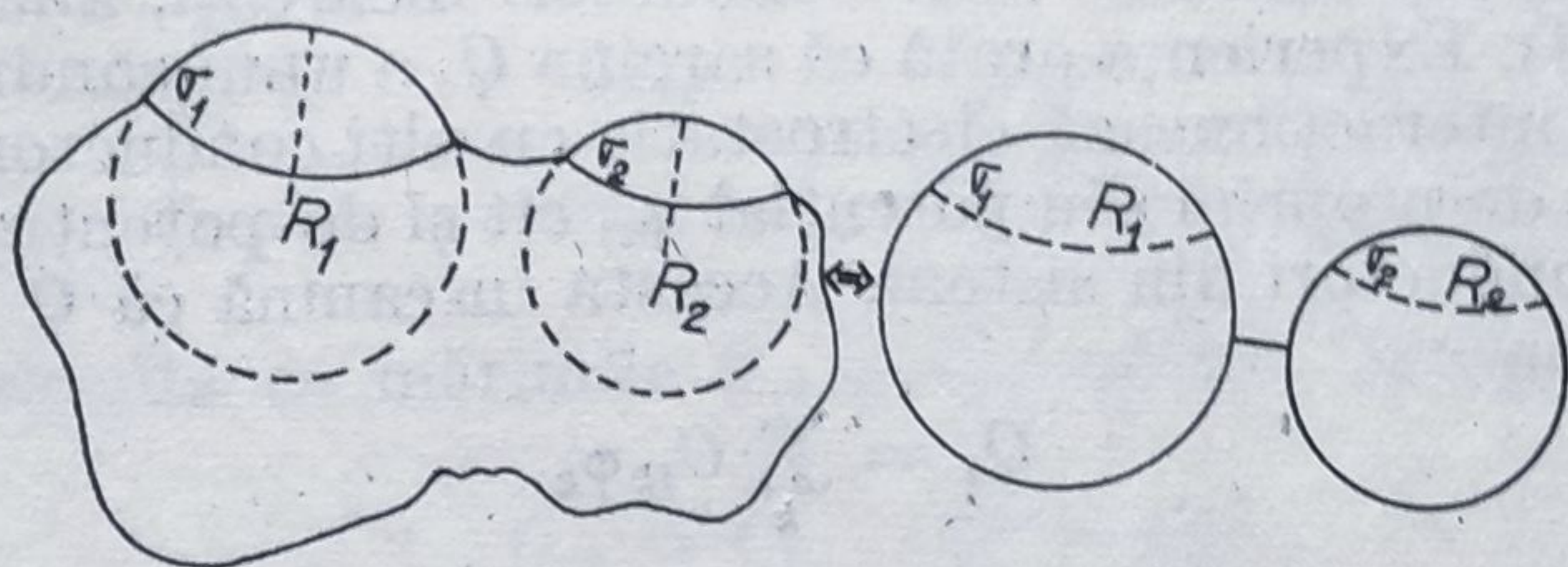


Fig. 6.6.12

Această relație arată că densitățile superficiale de sarcină în două puncte ale unei suprafețe echipotențiale sînt invers proporționale cu razele de curbură ale suprafețelor în punctele respective. De aici rezultă că, în punctele suprafețelor echipotențiale de curbură mare (care geometric reprezintă vîrfuri ascuțite) densitatea superficială de sarcină are valorile cele mai mari (în comparație cu restul punctelor suprafeței echipotențiale). Dar atunci din (6.6.87) rezultă că în aceste puncte presiunea electrostatică are valorile cele mai mari. Aceasta explică de ce scurgerile de sarcini de pe suprafețele electrizate apar întotdeauna prin vîrfurile acestora.

O aplicație practică foarte interesantă a proprietății de scurgere a sarcinilor prin vîrfuri ale suprafețelor metalice îl constituie *microscopul cu emisie în cîmp* (fig. 6.6.13). Acest microscop este construit în felul următor: un ac metalic foarte ascuțit ( $A$ ) (diametrul vîrfului este de ordinul a  $10^{-7}$  m) este plasat în centrul unei sfere de sticlă care are pe partea interioară un strat fluorescent (înnegrit, pe desen) și bun conductor de electricitate. Între acest strat și vîrful ascuțit al acului se stabilește o diferență de potențial foarte mare. Cînd acul este încărcat negativ electronii ce se scurg prin vîrf se deplasează spre stratul fluorescent și ciocnindu-l, dau pe acesta imaginea „locurilor de unde au plecat”, imaginea vîrfului acului metalic. În această variantă microscopul permite distingerea unor detalii de ordinul a  $20 \div 25 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) și această limită este determinată doar de fluctuațiile termice ale electronilor și de proprietățile lor cuantice (ondulatorii). Pentru a putea coborî și mai mult această limită și deci a mări puterea de rezoluție a microscopului se lucrează cu balonul umplut cu heliu. În acest caz rolul electronilor îl joacă, prin inversarea sensului cîmpului electric, ionii pozitivi de He, ce iau naștere în apropierea vîrfului. Pentru ionii de He, care au o masă mult mai mare decît a electronilor, lungimea de undă asociată și



efectul fluctuațiilor termice sînt micșorate. Această variantă de microscop se numește microscop cu emisie în cîmp cu ioni pozitivi și puterea lui de mărire a trecut deja de  $2 \cdot 10^6$  ori. Acest tip de microscop, cu toată simplitatea lui de principiu, a permis pentru prima dată ca să poată fi „văzuți” ionii din rețeaua metalică.

În considerațiile de pînă acum ne-am referit numai la problemele de electrostatică în legătură cu un singur conductor metalic. În continuare se vor face cîteva referiri la unele probleme de electrostatică în cazul cînd intervin doi sau mai mulți conductori metalici. Una dintre aceste probleme, de importanță practică deosebită o reprezintă studiul legăturii ce există între potențialele și sarcinile unor conductori încărcăți, aflați în interacțiune (fig. 6.6.14). Experiența arată că sarcina  $Q_i$  a unui conductor încărcat atunci cînd el interacționează electrostatic cu alți conductori, este o funcție lineară atît de propriul său potențial  $\varphi_i$ , cît și de potențialele  $\varphi_k (k \neq i)$  ale celorlalți conductori din sistem. Aceasta înseamnă că  $Q$  este dat de o relație de forma

$$Q_i = \sum_k C_{ik} \varphi_k \quad (6.6.96)$$

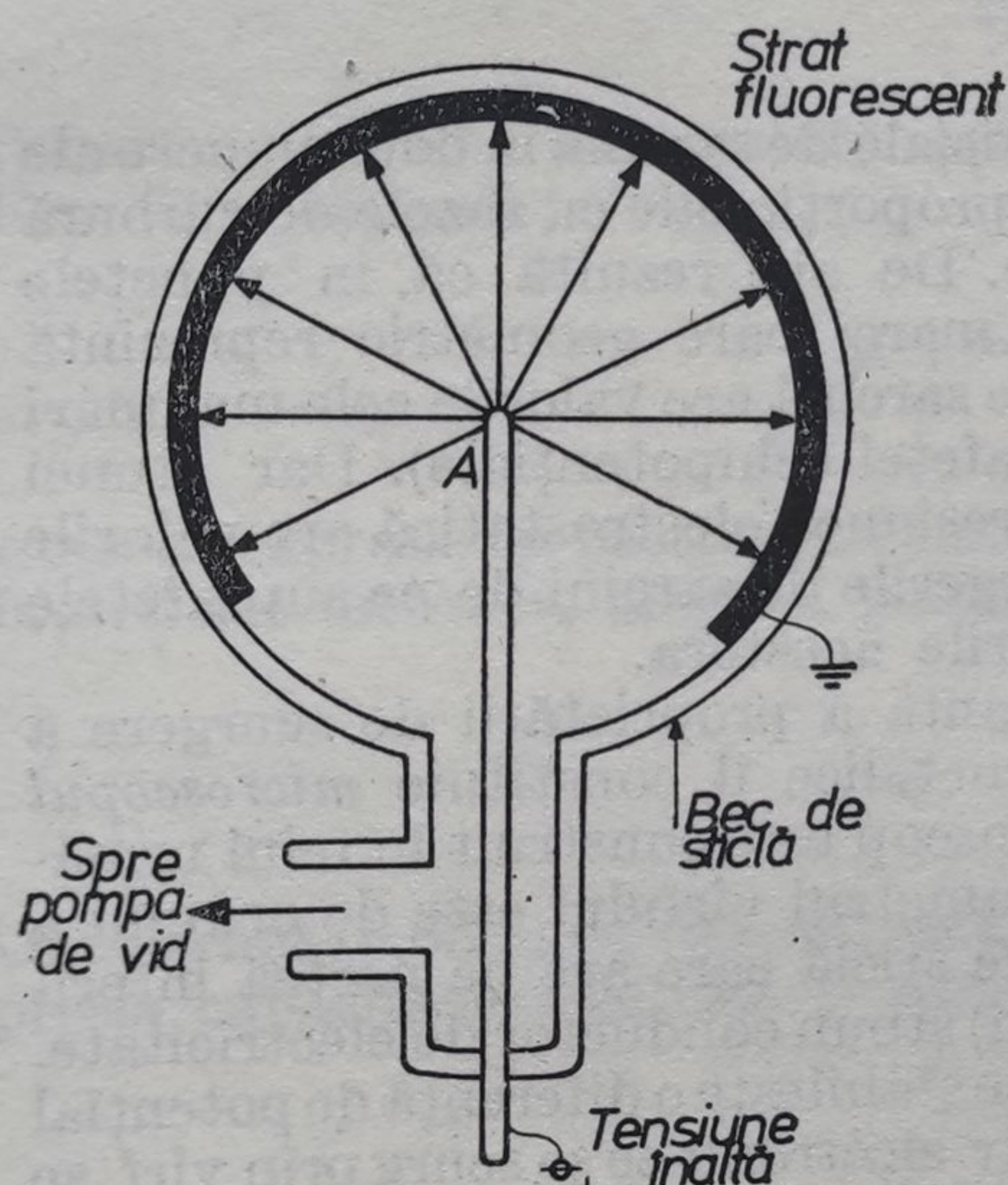


Fig. 6.6.13

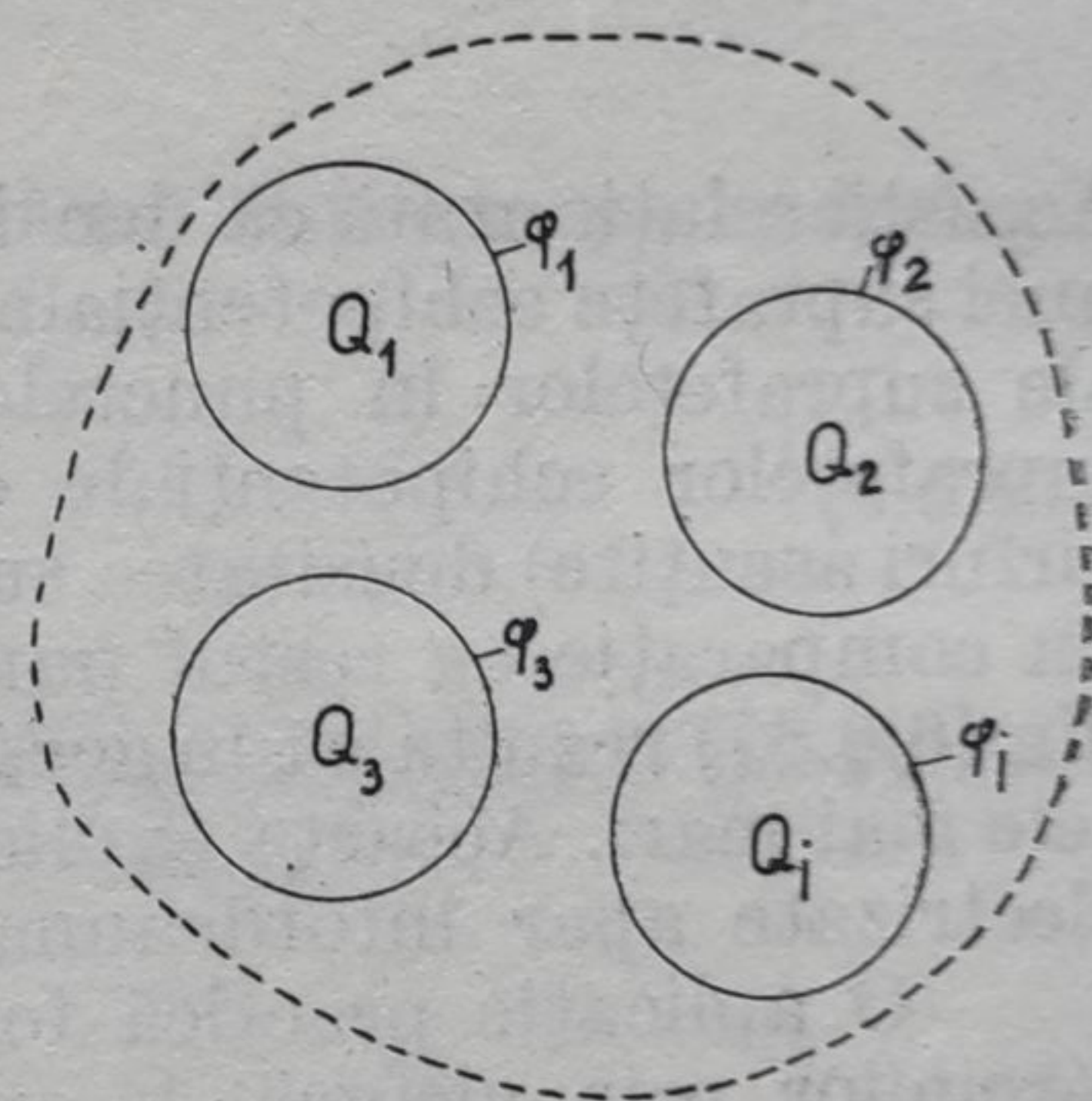


Fig. 6.6.14

Mărimile  $C_{ik} (i = k)$  se numesc *capacități proprii*, iar mărimile  $C_{ik} (i \neq k)$  se numesc *coeficienți de influență electrostatică*. Relația (6.6.96) nu este decît o consecință a faptului că sarcinile electrice, potențialele și interacțiunile electrostatice sînt aditive.

Din relațiile (6.6.96) rezultă că se pot exprima și potențialele  $\varphi_i$  în funcție de sarcinile  $Q_i$  cu care aceștia sînt încărcăți, prin relațiile

$$\varphi_i = \sum_k C_{ik}^{-1} Q_k \quad (6.6.97)$$

unde  $C_{ik}^{-1}$  sînt elementele inversei matricei  $(C_{ik})$ .



Deoarece pe conductorii încărcăți electric sarcinile necompensate se localizează la suprafața exterioară a acestora și datorită faptului că suprafața unui conductor este echipotențială ( $\varphi_s = \text{const}$ ), din (6.6.56) rezultă că energia unui sistem de conductori încărcăți este dată de

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \varphi_i \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik}^{-1} Q_i Q_k \quad (6.6.98)$$

(ultimele două expresii ale lui  $W$  s-au scris avînd în vedere relațiile (6.6.96) și (6.6.97)). Deoarece energia  $W$  satisface relațiile evidente

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial Q_k} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial Q_k \partial Q_i} \quad (6.6.99)$$

din (6.6.98) rezultă că mărimile  $C_{ik}$  și  $C_{ik}^{-1}$  satisfac următoarele relații de simetrie

$$C_{ik} = C_{ki} \quad C_{ik}^{-1} = C_{ki}^{-1}. \quad (6.6.100)$$

Se poate demonstra de asemenea că mărimile  $C_{ki}$  au următoarele semne

$$C_{ik} = \begin{cases} > 0; & i = k \\ < 0; & i \neq k. \end{cases} \quad (6.6.101)$$

Din cele de mai sus rezultă că în cazul unui singur conductor încărcat electric, energia lui este dată de relația

$$W = \frac{1}{2} Q_1 \varphi_1 = \frac{1}{2} C_{11} \varphi_1^2 = \frac{1}{2} C_{11}^{-1} Q_1^2. \quad (6.6.102)$$

Un sistem format din doi conductori aflați în interacțiune electrostatică și care sînt încărcăți cu sarcini egale și de semn contrar (adică  $Q_1 = -Q_2 = Q$ ) se numește *condensator electric*, conductorii respectivi numindu-se *armăturile condensatorului*. Se numește *capacitate reciprocă* a celor două armături sau, simplu, *capacitatea condensatorului* mărimea  $C$ , definită de relația

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C U_{12} \quad (6.6.103)$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sînt potențialele celor două armături, iar  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  este diferența de potențial sau *tensiunea electrică* aplicată celor două armături. Pe baza relațiilor (6.6.97); (6.6.100) și (6.6.103) se poate stabili, prin cîteva calcule simple, că legătura între capacitatea  $C$  a condensatorului și coeficienții  $C_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) este dată de relația

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}. \quad (6.6.104)$$



De asemenea, din (6.6.98) și (6.6.103) rezultă că energia unui condensator încărcat este dată de expresiile

$$W = \frac{1}{2} (Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{1}{2} Q U_{12} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U_{12}^2. \quad (6.6.105)$$

În cazul conductorilor plasați în vid coeficienții  $C_{ik}$  depind numai de forma geometrică a conductorilor și de poziția lor reciprocă. Deci pentru un condensator capacitatea  $C$  depinde de forma geometrică a armăturilor și de poziția lor reciprocă. În cazul când între conductori se află dielectrici coeficienții  $C_{ik}$  și deci și capacitatea  $C$  a condensatorului depinde și de proprietățile electrice ale dielectricilor respectivi. În practică se folosesc de regulă condensatori a căror armături au forme geometrice simple: plăci dreptunghiulare, cămăși cilindrice, sfere etc.

Calculul capacității acestor condensatoare poate fi făcut ușor, plecând de la cunoașterea câmpului electrostatic ce se creează între armăturile lui. Astfel, în cazul condensatorului plan, ale cărui armături sînt plăci plane de arie  $S$ , situate la distanța  $d$  una de alta, câmpul electrostatic va fi dat de suma câmpurilor create de către fiecare armătură în parte. Pentru distanțe  $d$  mici între armături în comparație cu dimensiunile lor liniare, câmpul electrostatic creat de distribuția plană de sarcină cu densitatea superficială  $\sigma = Q/S$  este dată de relația (6.6.23) și deci avem

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (6.6.106)$$

De altă parte,  $E = |E| = -|\nabla\varphi| = \frac{1}{d}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{U}{d}$  și deci

$$\frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad (6.6.107)$$

din care rezultă

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (6.6.107)$$

În mod similar, pentru un condensator sferic format din armături sferice și concentrice de raze  $R_1$  și  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ) câmpul electrostatic între armături va fi determinat numai de sarcina  $Q$  distribuită uniform pe armătura interioară de rază  $R_2$  (pentru că, așa cum știm, câmpul creat de sarcina  $-Q$ , distribuită uniform pe armătura exterioară de rază  $R_1$  are valoare nulă în interiorul acesteia. Aplicînd teorema fluxului electric pentru o suprafață sferică de rază  $r$  ( $R_2 < r < R_1$ ) și ținînd seama de simetria perfect sferică a problemei, avem

$$\oint \mathbf{E} \, dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (6.6.108)$$

respectiv

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (6.6.109)$$

Pe de altă parte

$$E = -|\nabla\varphi| = -\frac{d\varphi}{dr} \quad (6.6.110)$$



și deci

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = - \int_{R_2}^{R_1} E dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q(R_1 - R_2)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (6.6.111)$$

Prin urmare, pentru capacitatea  $C$  a condensatorului sferic se obține expresia

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}. \quad (6.6.112)$$

Pentru condensatorul cilindric format din două armături de formă cilindrică, coaxiale de lungime  $l$  și de raze  $R_1$  și  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ) câmpul electrostatic dintre armături este dat de o expresia de forma (6.6.21). Deoarece și în acest caz câmpul are o simetrie cilindrică putem scrie

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{r} = - \frac{d\varphi}{dr} \quad (6.6.113)$$

din care rezultă

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (6.6.114)$$

sau pentru capacitatea  $C$  a condensatorului

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}. \quad (6.6.115)$$

#### 6.6.4. Dielectrice în câmp electrostatic

În cazul dielectricilor introduși în câmp electrostatic procesul de electrizare este mai complex decât la metale. Unele substanțe dielectrice posedă momente dipolare proprii chiar în absența câmpurilor exterioare — momente care în prezența unui astfel de câmp electric caută să se orienteze pe direcția acestuia. Alte substanțe dielectrice în absența câmpurilor exterioare nu posedă momente dipolare, dar astfel de momente sînt induse de îndată ce substanța în cauză este supusă acțiunii unui câmp exterior. În toate cazurile avem însă de a face cu sarcini care se deplasează pe distanțe mici în dielectric. Aceste sarcini se numesc *sarcini legate*, iar procesul lor de deplasare sub acțiunea câmpurilor exterioare se numește *polarizare electrică*. Firește că în urma unui proces de polarizare dielectricul ajunge într-o stare deosebită, numită *stare de polarizare dielectrică*.

Starea de polarizare a unui dielectric poate fi caracterizată prin vectorul polarizare  $\mathbf{P}$ , definit ca suma vectorială a momentelor dipolare  $\mathbf{p}_i$  din unitatea de volum a dielectricului, adică prin relația

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (6.6.116)$$



Potențialul electric creat în punctul  $\mathbf{r}$  de o distribuție de dipoli electrici situați în punctele  $\mathbf{r}'$  va fi dat, în conformitate cu (6.6.40), de expresia

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V}'. \quad (6.6.117)$$

Dar, întrucât se poate verifica ușor că

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

(unde  $\nabla'$  se referă doar la componentele lui  $\mathbf{r}'$ ) din (6.6.117) obținem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathcal{V}' \right] \quad (6.6.118)$$

sau ținând cont de relația  $\mathbf{a} \nabla \Psi = \nabla(\mathbf{a} \Psi) - \Psi \nabla \mathbf{a}$ , putem transforma această expresie astfel

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint \nabla' \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathcal{V}' + \iiint \frac{-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V}' \right]. \quad (6.6.119)$$

Transformând în continuare prima integrală din termenul drept cu ajutorul teoremei lui Gauss (6.6.5) obținem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{P_n dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint -\frac{\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V}' \quad (6.6.120)$$

unde  $P_n = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}/|d\mathbf{S}|$  reprezintă componenta normală la suprafața  $dS$  a vectorului polarizare. Comparând expresia (6.6.120) cu (6.6.30) se vede că mărimile

$$\rho_{leg} = -\nabla \mathbf{P}(\mathbf{r}'); \quad \sigma_{leg} = P_n(\mathbf{r}') \quad (6.6.121)$$

joacă rolul de densități volumice, respectiv superficiale ale unor sarcini electrice. Aceasta înseamnă că potențialul electric creat de dipolii din dielectric poate fi considerat ca fiind generat de o distribuție de sarcini ( $\rho_{leg}$ , respectiv  $\sigma_{leg}$ ), care sînt sarcinile legate din dielectric.

Dacă în dielectric există și sarcini libere de densitate volumică  $\rho$ , atunci în locul relației (6.6.24) trebuie să luăm o relație de forma

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_{leg}) \quad (6.6.122)$$



sau dacă ținem cont de (6.6.121)

$$\nabla(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (6.6.123)$$

Se vede că această relație este identică cu (6.6.5) dacă se notează

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (6.6.124)$$

Am găsit astfel o expresie care leagă inducția electrică  $\mathbf{D}$  de starea de polarizare electrică a dielectricului, stare caracterizată prin vectorul  $\mathbf{P}$ .

În general,  $\mathbf{P}$  depinde de intensitatea câmpului polarizant  $\mathbf{E}$ , dar și de structură, starea fizică și forma geometrică a dielectricului. Pentru dielectrici izotropi din punct de vedere electric și infinit extinși spațial se poate lua

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (6.6.125)$$

mărimea  $\chi_e$  numindu-se *susceptivitate electrică* a dielectricului. În cazul dielectricilor anizotropi (cum sînt dielectricii cristalini), legătura între  $\mathbf{P}$  și  $\mathbf{E}$  este tensorială și se poate exprima sub forma

$$P_\alpha = \epsilon_0 \sum_\beta \chi_{\alpha\beta} E_\beta; \{\alpha\}, \{\beta\} = \{x, y, z\} \quad (6.6.126)$$

unde  $(\chi_{\alpha\beta})$  este tensorul susceptivității electrice.

De notat că relațiile (6.6.125) și (6.6.126) sînt valabile doar în cazul câmpurilor electrice nu prea puternice. Aceste relații constituie ceea ce se numește *aproximație liniară* a problemei. În general dependența lui  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{E}$  este dată de o funcție generală

$$\mathbf{P} = f(\mathbf{E}) \quad (6.6.127)$$

ale cărei aproximații de ordinul întâi în  $\mathbf{E}$  pentru cazul izotrop, respectiv anizotrop, sînt date de relațiile (6.6.125) și (6.6.126). Fenomenele care se pot descrie cu ajutorul relațiilor (6.5.125) și (6.5.126) formează obiectul de studiu al *electrostaticii liniare*, pe cînd cele care nu pot fi descrise decît cu relații mai generale de tipul (6.6.127) formează obiectul de studiu al *electrostaticii neliniare*. Aceasta din urmă este un subcapitol al *electrodinamicii neliniare*, disciplină a cărei dezvoltare sistematică a început doar în ultimele decenii.

Experimental se determină, de regulă, o altă constantă de material decît  $\chi_e$  și anume *constantă dielectrică relativă*  $\epsilon_r$ , definită prin relația

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. \quad (6.6.128)$$

Din relațiile (6.5.124) și (6.5.125) se vede că legătura între  $\epsilon_r$  și  $\chi_e$  este dată de relația

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (6.6.129)$$



În tabelul de mai jos sînt date valorile lui  $\epsilon_r$  pentru cîteva substanțe.

Substanța	$\epsilon_r$	Substanța	$\epsilon_r$	Substanța	$\epsilon_r$
Aer	1,00054	Sticlă de cuarț	3,8	Porțelan	6,5
Teflon	2,1	Sticlă pirex	4,5	Apă	78
Chihlimbar	2,7	Bachelită	4,8	Bioxid de titan	100
Hîrtie	3,5	Mică	5,4	Titanat de bariu	3000 ÷ 5000

În considerațiile făcute pînă aici s-a admis că mediul dielectric este omogen și că el se polarizează uniform într-un cîmp electrostatic exterior omogen ( $\mathbf{P}$  este constant, dacă  $\mathbf{E}$  este constant). Este evident că în acest caz suma algebrică a sarcinilor legate dintr-un element de volum finit al mediului dielectric este nulă (suma sarcinilor pozitive este egală cu suma sarcinilor negative). Acest fapt ne permite să calculăm ușor cîmpul electric creat de sarcinile libere plasate într-un astfel de mediu dielectric. Pentru o distribuție cu densitate volumetrică  $\rho$  avem

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}. \quad (6.6.130)$$

Soluția matematică a acestei ecuații se poate scrie prin analogie cu soluția ecuației (6.6.26) și este de forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.6.131)$$

În cazul unei sarcini punctiforme  $Q$  plasată în originea sistemului de referință, relația (6.6.131) devine

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \quad (6.6.132)$$

iar din  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  rezultă

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \cdot \mathbf{r} \quad (6.6.133)$$

respectiv pentru forța coulombiană de interacțiune dintre două sarcini punctiforme  $Q_1$  și  $Q_2$ , plasate în mediul dielectric

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \cdot \mathbf{r}. \quad (6.6.134)$$

Se remarcă faptul că prezența sarcinilor legate din dielectric determină o micșorare de  $\epsilon_r$  ori a cîmpului electrostatic creat de sarcinile libere.



Concluzia de mai sus este însă valabilă numai pentru mediile dielectrice polarizate omogen, nu și pentru cele polarizate neomogen. De notat că o polarizare neomogenă poate să apară și în câmpuri exterioare omogene, dacă mediul dielectric este delimitat spațial de suprafețe finite. În astfel de cazuri polarizarea va depinde de forma geometrică a acestor suprafețe, pentru că pe ele vor apare sarcini legate necompensate cu densitatea superficială  $\sigma_{leg} = P_n$ . Studiul acestui proces de polarizare va fi mult mai complex decât cel prezentat mai sus, dar el se poate face plecând de la relația generală (6.6.120) și ținând cont de condițiile de frontieră (6.2.44) și (6.2.45).

În anumite cazuri de interes practic acest studiu poate fi făcut pe modelul unui ansamblu de două medii dielectrice polarizate omogen și separate între ele printr-o suprafață de formă geometrică regulată, pe care constanta dielectrică suferă un salt între valorile  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ . Iată un exemplu:

Fie o sferă de rază  $R$ , plasată în vid și polarizată omogen de către câmpul electrostatic omogen  $E_0$ . Vom calcula potențialul electric în afara sferei ( $\varphi_{ext}$ ) și în interiorul ei ( $\varphi_{int}$ ). Pentru că  $E_0 = \text{const.}$ , putem scrie

$$\varphi_{ext} = \varphi_0 + \varphi_a \quad (6.6.135)$$

unde

$$\varphi_0 = -E_0 \cdot r \quad (6.6.136)$$

reprezintă potențialul electric al câmpului exterior  $E_0$ , iar  $\varphi_a$  potențialul creat în exterior de sfera polarizată omogen. Prin analogie cu (6.6.118) putem lua pentru  $\varphi_a$  o expresie de forma

$$\varphi_a = C_0 E_0 \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \quad (6.6.137)$$

$C_0$  fiind o constantă. Potențialul din interiorul sferei se va deosebi de cel creat în exterior de către câmpul  $E_0$  doar sub aspect cantitativ, așa cum stabilește relația (6.6.132) și de aceea se poate lua

$$\varphi_{int} = -CE_0 \cdot r \quad (6.6.138)$$

$C$  fiind de asemenea o constantă.

Pentru determinarea constantelor  $C_0$  și  $C$ , vom folosi condițiile de frontieră (6.2.44) și (6.2.45). Din prima, întrucât suprafața sferei nu conține sarcini libere ( $\sigma = 0$ ), avem

$$(D_n)_{r=R} \equiv (D_n)_{r=R}; \Rightarrow \epsilon \left( \frac{\partial \varphi_{int}}{\partial r} \right)_{r=R} \equiv \epsilon_0 \left( \frac{\partial \varphi_{ext}}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (6.6.139)$$

respectiv cu (6.6.135) — (6.6.138).

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial r} (-CE_0 \cdot r)_{r=R} \equiv \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( -E_0 \cdot r + C_0 \frac{E_0 \cdot r}{r^3} \right)_{r=R}$$



sau

$$-\varepsilon C E_0 = \varepsilon_0 \left( -E_0 - \frac{2C_0 E_0}{R^3} \right). \quad (6.6.140)$$

Din condiția (6.2.45) rezultă că pe suprafața sferei potențialului electric variază continuu

$$[\varphi_{int}]_{r=R} = [\varphi_{ext}]_{r=R}. \quad (6.6.141)$$

Deci

$$-CE_0 R = -E_0 R + \frac{C_0 E_0}{R^2} \quad (6.6.142)$$

respectiv

$$C = 1 - \frac{C_0}{R^3}. \quad (6.6.143)$$

Cu această expresie introdusă în (6.6.140), găsim pentru  $C_0$  și  $C$  relațiile

$$C_0 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R^3; \quad C = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \quad (6.6.144)$$

și deci potențialul electric în interiorul sferei polarizate, respectiv în afara ei va fi dat de expresiile

$$\varphi_{int}(\mathbf{r}) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (6.6.145)$$

$$\varphi_{ext}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R^3 \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad (6.6.146)$$

Dacă dorim să exprimăm al doilea termen din partea dreaptă a expresiei (6.6.146), (care reprezintă potențialul de dipol al sferei uniform polarizate) prin intermediul vectorului de polarizare  $\mathbf{P}$ , atunci ținând cont de (6.6.118), putem scrie

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R^3 \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathcal{V} \quad (6.6.147)$$

unde  $\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}$  reprezintă volumul sferei. Rezultă că în relațiile (6.6.145) și (6.6.146) se poate face înlocuirea

$$\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0. \quad (6.6.148)$$



În acest caz, expresiile care ne dau câmpul electrostatic în interiorul, respectiv în exteriorul sferei polarizate, se găsesc ușor din

$$\mathbf{E}_{int} = -\nabla \varphi_{int}(\mathbf{r}) = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (6.6.149)$$

$$\mathbf{E}_{ext} = -\nabla \varphi_{ext}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{P}}{r^3} \right] \mathcal{V}. \quad (6.6.150)$$

Prima expresie se mai poate scrie, ținând cont de (6.6.148) sub forma

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad (6.6.151)$$

Se vede că intensitatea câmpului electric în interiorul sferei este mai mică decât în afara ei cu mărimea

$$\mathbf{E}_d = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad (6.6.152)$$

numită și *câmp de depolarizare electrică*. Acest câmp de depolarizare se datorește sarcinilor legate necompensate ce apar pe suprafața sferei, iar valoarea lui depinde în mod esențial de forma geometrică a corpului dielectric.

Relația (6.6.152) poate fi generalizată pentru cazul unui elipsoid polarizat uniform, când

$$\mathbf{E}_{di} = -\frac{1}{\varepsilon_0} N_i \mathbf{P} \quad (6.6.153)$$

Aici prin  $N_i$  s-au notat așa numiții *factori de depolarizare* în lungul direcției  $i$ , care trebuie să satisfacă relația

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1. \quad (6.6.154)$$

De exemplu, pentru sferă  $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$ ; pentru cilindru polarizat uniform în lungul axei sale,  $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}$ ,  $N_3 = 0$  etc.

De notat că rezultatele de mai sus pot fi generalizate la cazul unei sfere dielectrice polarizate uniform și plasată într-un alt mediu dielectric omogen. Dacă  $\varepsilon_1$  este constanta dielectrică a sferei și  $\varepsilon_2$  a mediului înconjurător, atunci relațiile care ne dau câmpurile în cele două medii dielectrice se obțin din (6.6.149) și (6.6.150) prin înlocuirea  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$  și  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_2$ . Această



generalizare ne permite să găsim imediat câmpul electrostatic în interiorul unei cavități vidate, de formă sferică, practică într-un mediu dielectric polarizat omogen. În acest caz, va trebui să schimbăm locurile lui  $\epsilon$  și  $\epsilon_0$  în expresia (6.6.149), ceea ce ne va conduce la relația

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (6.6.155)$$

Câmpul suplimentar

$$\mathbf{E}_L = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (6.6.156)$$

poartă numele de câmp Lorentz.

#### 6.6.5. Polarizarea prin inducție și polarizarea prin orientare a dielectricilor

În paragraful precedent s-a menționat că substanțele dielectrice pot fi grupate în două clase și anume: clasa *dielectricilor polari*, formată din substanțe dielectrice care posedă momente dipolare electrice proprii (în lipsa vreunui câmp electric exterior) și clasa *dielectricilor nepolari* formată din substanțe dielectrice care nu posedă momente dipolare proprii, dar în care pot fi create astfel de momente dipolare prin inducție de către un câmp electric exterior. Firește, și într-un caz și în celălalt este vorba de momente dipolare electrice determinate de configurațiile sarcinilor pozitive și negative de la nivelul atomilor și moleculelor și de aceea, pentru a evidenția semnificația fizică a acestor procese de polarizare este necesar să facem un studiu asupra lor la nivel microscopic. În general, acest studiu ar trebui să țină seama de comportarea cuantică a purtătorilor microscopici de sarcină electrică (electronii și protonii). Totuși, într-o serie de cazuri se constată că o teorie microscopică clasică permite obținerea unor rezultate verificate de experiență, iar teoria cuantică nu aduce decât corecții neglijabile. De aceea, în continuare, va fi expusă tratarea clasică a proceselor microscopice de polarizare a dielectricilor, cu intenția de a desprinde semnificația fizică a parametrilor macroscopici de material  $\epsilon_r$  și  $\chi_e$ .

a) **Polarizarea prin inducție a substanțelor dielectrice.** Este un proces de polarizare ce se naște în toate substanțele dielectrice de îndată ce acestea sînt introduse în câmpuri electrice. Acest proces se datorește perturbării configurației sarcinilor electrice de la nivelul atomilor și moleculelor pe care o crează câmpul electric exterior. Fiind vorba de sarcini legate, în câmpuri exterioare statice se va stabili o nouă configurație stabilă în care centrul sarcinilor pozitive va fi deplasat pe direcția și în sensul câmpului exterior  $\mathbf{E}$  față de centrul sarcinilor negative, luînd astfel naștere un dipol electric indus. În general, valoarea momentului dipolar indus va fi determinată atît de acțiunea câmpului electric exterior cît și de acțiunea altor forțe (de natură electrică sau elastică) din interiorul substanței dielectrice respective. Experiența arată că în cazul dielectricilor omogeni și cu polarizare temporară (polarizare care dispare o dată cu câmpul electric exterior),



este valabilă aproximația liniară în care valoarea momentului dipolar indus la nivel de particulă depinde liniar de câmpul exterior  $E$

$$p = \alpha E. \quad (6.6.157)$$

Coeficientul de proporționalitate este cunoscut sub denumirea de *coeficient de polarizabilitate electrică* a particulei respective. Intervine deci, în acest caz, o polarizare prin deplasarea cvasielastică fie a electronilor (polarizare electronică caracterizată, prin  $\alpha_e$ ), fie a ionilor din molecule (atomii) substanței dielectrice respective (polarizare ionică — caracterizată prin  $\alpha_i$ ). Aceste fenomene vor fi prezente în toate substanțele dielectrice aflate în câmpuri electrice. La dielectricii polari însă, peste aceste procese de polarizare prin inducție se vor suprapune procesele de polarizare prin orientare a momentelor dipolare proprii sub acțiunea câmpului exterior.

Din clasa dielectricilor nepolari fac parte substanțele constituite din molecule (mono sau poliatomice) simetrice, cum sînt gazele nobile (He, Ne, Ar, Kr, Xe), gazele constituite din molecule biatomice cu legături homo, polare ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $Cl_2$  etc), unele hidrocarburi (gazoase sau lichide) cu așezare simetrică a atomilor în moleculă ( $CH_4$ ;  $C_2H_6$ ,  $C_6H_6$  etc.), o serie de polimeri solizi cu structuri simetrice (polietilenă, polistirenul etc), precum și unele substanțe în stare cristalină. Pentru a obține informații asupra coeficientului de polarizabilitate  $\alpha$  al acestor substanțe vom examina, pe modelul simplu al atomului de hidrogen, procesul de polarizare electrică prin inducție. Se poate admite că în prezența câmpului electric exterior  $E$ , planul orbitei unicului electron (de sarcină  $-e$ ) pe care-l are atomul de hidrogen se va deplasa în sens invers câmpului pe distanța  $d$  față de nucleul (vezi fig. 6.6.15). În noua configurație a atomului forța electrică

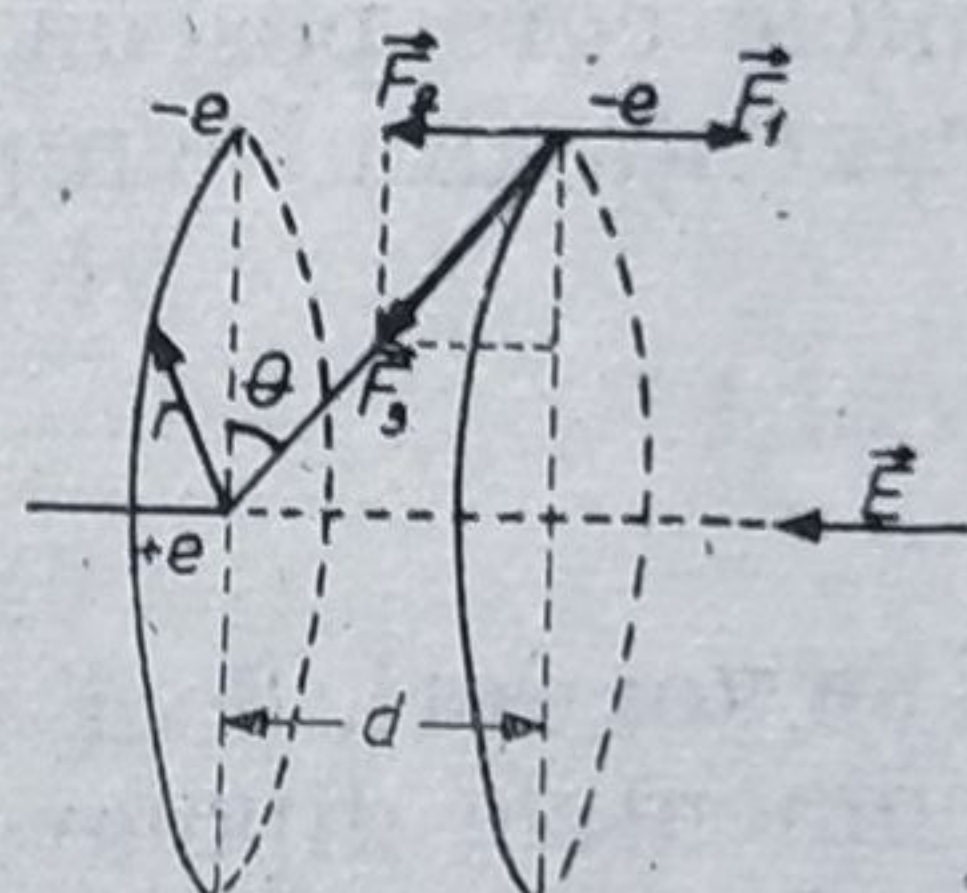


Fig. 6.6.15

$$F_1 = -eE \quad (6.6.158)$$

care acționează asupra electronului va fi echilibrată de forța cvasielastică  $F_2$ , care este de fapt componenta în lungul lui  $E$  a forței de interacțiune coulombiană a electronului cu nucleul atomic

$$F_2 = F_3 \sin \theta = \frac{e^2 d}{4\pi \epsilon_0 r^3}. \quad (6.6.159)$$

Deci

$$eE = \frac{e^2 d}{4\pi \epsilon_0 r^3}. \quad (6.6.160)$$

Înseamnă că momentul dipolar indus va fi dat de expresia

$$p = ed = 4\pi \epsilon_0 r^3 d. \quad (6.6.161)$$



Comparînd acest rezultat cu (6.6.157) găsim pentru coeficientul de polarizabilitate electronică  $\alpha_e$  expresia

$$\alpha_e = 4\pi\epsilon_0 r^3. \quad (6.6.162)$$

Dacă pentru  $r$  se va lua valoarea razei primei orbite Bohr ( $r = r_B = 0,51\text{\AA} = 5,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ), atunci se găsește pentru coeficientul de polarizabilitate electronică a atomului de hidrogen valoarea  $\alpha_e = 1,67 \cdot 10^{-41} \text{ F} \cdot \text{m}^3$ , valoare în bună concordanță cu datele experimentale.

De remarcat că rezultatul (6.6.162) este valabil pentru toate substanțele dielectrice nepolare în moleculele cărora intervin numai legături homopolare și deci vor apare numai procese de polarizare electronică. Aceste procese sînt destul de rapide, noua configurație stabilindu-se în intervale de timp de ordinul a  $10^{-15} \text{ s}$  de la aplicarea cîmpului electric exterior. Intervale de timp mai mari, de ordinul al  $10^{-13} \div 10^{-12} \text{ s}$  sînt necesare pentru realizarea proceselor de polarizare ionică. Acestea intervin în substanțele nepolare cu legături ionice și se datoresc unor deformări cvasielastice a moleculelor, ca urmare a deplasării ionilor componenți sub acțiunea cîmpului exterior.

b) **Polarizarea prin orientare a dielectricilor polari.** Se știe că moleculele care posedă momente dipolare proprii ( $p_0 \neq 0$ ) sînt acționate, în prezența unui cîmp electric exterior  $E$ , de cupluri de forțe, de moment.

$$M = p_0 \times E \quad (6.6.163)$$

și se vor roti, dacă mediul înconjurător le permite, pînă cînd își orientează momentele dipolare proprii pe direcția și în sensul cîmpului. În această nouă stare, energia potențială a fiecărui dipol

$$W_E = - p_0 \cdot E = - p_0 E \cos \theta \quad (6.6.164)$$

va fi minimă. Firește, o astfel de stare, în care toate momentele dipolare proprii ale moleculelor mediului dielectric să fie orientate pe aceeași direcție și în același sens se va putea realiza doar la temperatura de  $0\text{K}$ , deoarece la temperaturi mai ridicate intervine acțiunea perturbatoare a agitației termice. Din această cauză vectorul polarizare  $P$  a dielectricului va începe să scadă odată cu creșterea temperaturii. Experiența arată că această scădere se face în conformitate cu *legea lui Curie*, care stabilește că susceptivitatea electrică a dielectricului scade invers proporțional cu creșterea temperaturii

$$\chi_e = \frac{C}{T} \quad (6.6.165)$$

Fenomenul este determinat de micșorarea treptată a numărului de molecule ale căror momente dipolare proprii  $p_0$  rămîn orientate în direcția lui  $E$  pe



măsură ce temperatura dielectricului crește, proces ce poate fi studiat statistic. Astfel, dacă se notează cu  $n_0$  numărul de molecule din unitatea de volum a mediului dielectric, atunci numărul de molecule  $dn$  care la temperatura  $T$  au momentele dipolare proprii  $p_0$  orientate în intervalul  $(\theta, \theta + d\theta)$  față de  $E$  (fig. 6.6.16), va fi dat, conform cu legea de distribuție Boltzmann (5.3.11), de relația

$$dn = n_0 \frac{e^{-\frac{W_E}{kT}} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{-\frac{W_E}{kT}} \sin \theta d\theta}. \quad (6.6.166)$$

Componenta  $dP$  a momentului dipolar rezultat al acestor molecule pe direcția  $E$  va fi deci

$$dP = p_0 \cos \theta dn \quad (6.6.167)$$

iar pentru vectorul polarizare  $P$  se va obține

$$P = \int_0^\pi p_0 \cos \theta dn = n_0 p_0 \frac{\int_0^\pi e^{\frac{p_0 E}{kT} \cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{p_0 E}{kT} \cos \theta} \sin \theta d\theta}. \quad (6.6.168)$$

Calcululele se efectuează ușor pentru cazul temperaturilor obișnuite, când energia potențială a dipolului  $p_0$  în câmpul  $E$  este mică în comparație cu energia agitației termice ( $p_0 E \cos \theta \ll kT$ ) și când este îndeplinită suficient de bine aproximația

$$e^{\frac{p_0 E}{kT} \cos \theta} \simeq 1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta. \quad (6.6.169)$$

În aceste condiții (6.5.168) devine

$$P = n_0 p_0 \frac{\int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta d\theta} = \frac{n_0 p_0^2}{3kT} \cdot E. \quad (6.6.170)$$

Comparînd acest rezultat cu (6.6.165) se găsește pentru constanta  $C$  din legea lui Curie expresia

$$C = \frac{n_0 p_0^2}{3k\epsilon_0}. \quad (6.6.171)$$

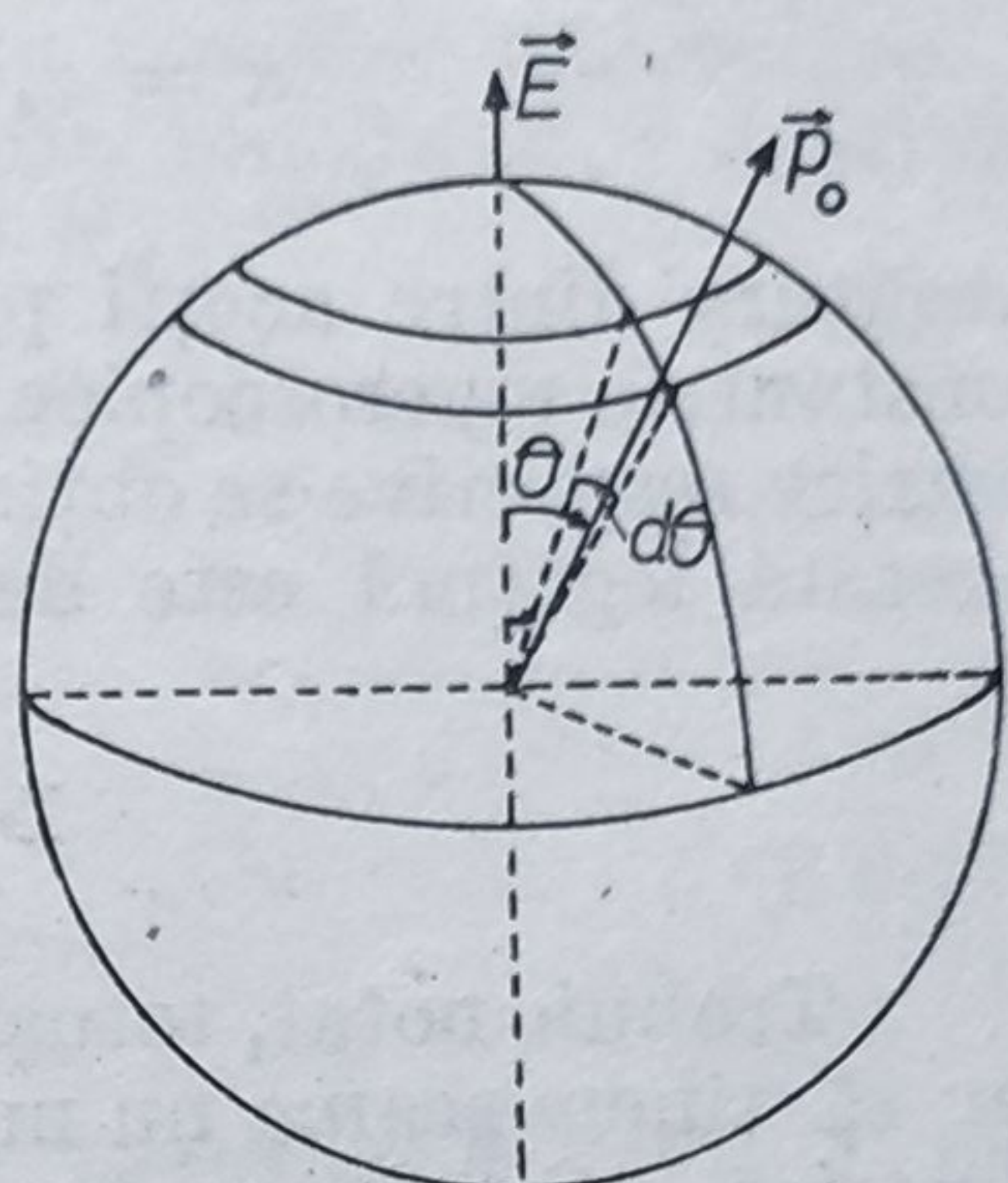


Fig. 6.6.16



Dacă se notează și în acest caz cu  $\alpha_T$  coeficientul de polarizabilitate moleculară prin orientare și se ține seama că în substanțele dielectrice polare mai intervine și procesul de polarizare prin inducție (electronică sau ionică), înseamnă că pentru aceste substanțe

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_T = \alpha_e + \alpha_i + \frac{p_0^2}{3kT}. \quad (6.6.172)$$

Legătura dintre acești parametri microscopici ai polarizării electrice și constantele macroscopice de material ( $\chi_e$ , respectiv  $\epsilon_r$ ) ale substanței dielectrice respective se obține imediat pe baza relațiilor (6.6.125) și (6.6.129). Această legătură este de forma

$$\chi_e = \frac{n_0}{\epsilon_0} \alpha; \quad \epsilon_r - 1 = \frac{n_0}{\epsilon_0} \alpha. \quad (6.6.173)$$

Trebuie notat, totuși, că în stabilirea acestei legături uneori este necesar să ținem seama nu numai de natura intimă a procesului de polarizare electrică a fiecărei molecule în parte, ci și de interacțiunile care se nasc între momentele dipolare electrice ale acestor molecule. Aceste interacțiuni pot fi neglijate în cazul dielectricilor gazoși, dar pentru dielectricii lichizi și solizi contribuția lor la procesul de polarizare electrică este însemnată. Într-adevăr, așa cum s-a arătat în § 6.6.4, prezența momentelor dipolare electrice modifică intensitatea câmpului electric din interiorul substanței dielectrice respective. În aceste condiții, polarizarea fiecărei molecule se va produce în câmpul electric interior  $E_{int}$ , diferit de câmpul polarizant exterior  $E$ . Pentru medii dielectrice omogene câmpul electric interior este dat de suma câmpurilor exterioare și a câmpului Lorentz și deci va trebui să luăm

$$\mathbf{P} = n_0 \alpha \mathbf{E}_{int} = n_0 \alpha \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right). \quad (6.6.174)$$

Această relație poate fi transformată cu ajutorul relațiilor (6.6.125) și (6.6.129). Astfel, pentru membrul din stînga putem scrie

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad (6.6.175)$$

iar pentru membrul din dreapta

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \mathbf{E} \left( 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{3} \right) = \mathbf{E} \frac{\epsilon_r + 2}{3}. \quad (6.6.176)$$

Prin urmare

$$\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = n_0 \alpha \mathbf{E} \frac{\epsilon_r + 2}{3}$$

sau

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n_0 \alpha}{3\epsilon_0}. \quad (6.6.177)$$



Se remarcă faptul că această relație, care leagă constanta macroscopică de material  $\epsilon_r$ , de coeficientul de polarizabilitate moleculară  $\alpha$ , conține relația (6.6.173) ca pe un caz limită, cînd  $\epsilon_r \simeq 1$ , condiție satisfăcută numai de dielectricii gazoși (la care  $\epsilon_r \simeq 1$ ).

De obicei, relația (6.6.177) se prezintă într-o formă modificată, care să conțină în membrul al doilea doar constante specifice moleculare. În acest scop, se înlocuiește  $n_0$  prin intermediul masei molare  $M$ , a densității substanței dielectrice  $\rho$  și numărul lui Avogadro  $N_A$

$$n_0 = N_A \frac{\rho}{M} \quad (6.6.178)$$

și se obține

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{N_A \cdot \alpha}{3\epsilon_0}. \quad (6.6.179)$$

Sub această formă este cunoscută ca *ecuația Clausius-Mosotti* și prezintă un deosebit interes pentru că măsurînd pe  $\epsilon_r$  și  $\rho$  putem obține informații asupra coeficientului de polarizabilitate  $\alpha$  a moleculelor. Uneori, ecuația Clausius-Mosotti este scrisă în varianta lui Debye, care se obține prin înlocuirea lui  $\alpha$  cu expresia dată de (6.6.172), adică

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{N_A}{3\epsilon_0} \left( \alpha_e + \alpha_i + \frac{p_0^2}{3kT} \right). \quad (6.6.180)$$

c) **Polarizarea dielectricilor cu ordonare electrică.** În ultima vreme a fost pusă în evidență existența unei importante clase de substanțe dielectrice pentru care legătura dintre vectorul polarizare  $\mathbf{P}$  și cîmpul exterior  $\mathbf{E}$  nu mai este liniară. Experimental s-a demonstrat că pentru aceste medii dielectrice susceptivitatea electrică depinde atît de temperatura  $T$ , cît și de valoarea cîmpului polarizant  $\mathbf{E}$ . De exemplu, dacă cîmpul exterior  $\mathbf{E}$  este variat alternativ, atunci variația corespunzătoare a vectorului de polarizare  $\mathbf{P}$  va fi descrisă grafic de o curbă închisă, de forma celei prezentate în figura 6.6.17, numită *bucă de histerezis*. Se remarcă de pe figură că dacă substanța este supusă pentru prima dată polarizării electrice se obține o dependență neliniară a lui  $P$  de  $E$  (curba de primă polarizare). În continuare, micșorînd cîmpul  $\mathbf{E}$ , polarizarea  $P$  rămîne în urma cîmpului  $\mathbf{E}$  (histerezis propriu-zisă), în așa fel încît la  $E = 0$ , substanța păstrează o *polarizare remanentă*  $P_r \neq 0$ . Pentru anularea acestei polarizări este necesar un cîmp electric de valoare  $E_c$  și de sens invers celui inițial, numit *cîmp coercitiv*. Un astfel de fenomen de histereză fiind specific și magnetizării substanțelor feromagnetice, dielectricii cărora le este specific un asemenea fenomen au fost denumiți *feroelectrici*.

Printre primii reprezentanți studiați din clasa feroelectricilor a fost așa numita sare Seignette —  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , care este un tartrat dublu de sodiu și potasiu. Această substanță este foarte higroscopică și se des-



compune ușor la căldură, dar în stare monocristalină manifestă proprietăți feoelectrice (proprietăți numite inițial seignetto-electrice). Ulterior au fost puse în evidență și alte substanțe cu proprietăți feoelectrice remarcabile cum sînt: titanatii (îndeosebi titanatul de bariu:  $\text{BaTiO}_3$  și de stronțiu  $\text{SrTiO}_3$ ), cîteva soluții solide din grupul niobaților și tanta- laților, zirconatul de plumb, dihidrofosfații și dihidroarseniații de pota- siu ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ;  $\text{KH}_2\text{AsO}_4$ ), apoi materialele ceramice feoelectrice și electreții.

*Electreții* sînt substanțe la care polarizarea remanentă se crează arti- ficial prin diverse procedee. Ei au fost descoperiți în anul 1921 de către M. Eguchi, care constată că prin răcirea și solidificarea unor substanțe orga- nice (polimetil-metacrilati, ebonita, naftalenul etc.) în cîmp electric se păstrează o polarizare remanentă diferită de zero. Aceste substanțe au primit numele de termoelectreți. În anul 1937, G. Nadjakov obține fotoe- lectreții, substanțe cum sînt antracenul, anumite sulfuri etc., care iluminate puternic în cîmp electric  $E$  păstrează de asemenea o polarizare remanentă, dacă cîmpul  $E$  este îndepărtat brusc. Astăzi gama electreților ca și a uti- lizărilor lor practice este destul de mare. S-au obținut electroelectreți, radio- electreți și mecanoelectreți la care orientarea momentelor dipolare pe o anumită direcție se face cu ajutorul cîmpului electric, a radiațiilor, a unor acțiuni mecanice, iar stabilizarea acestei orientări se obține prin răcirea și solidificarea substanței respective.

Studiile experimentale făcute în deosebi pe titanatul de bariu, care posedă atît o structură cristalină simplă (cubică de tip perovskit; vezi fig. 6.6.18), cît și o serie de alte caracteristici avantajoase (rezistență me-

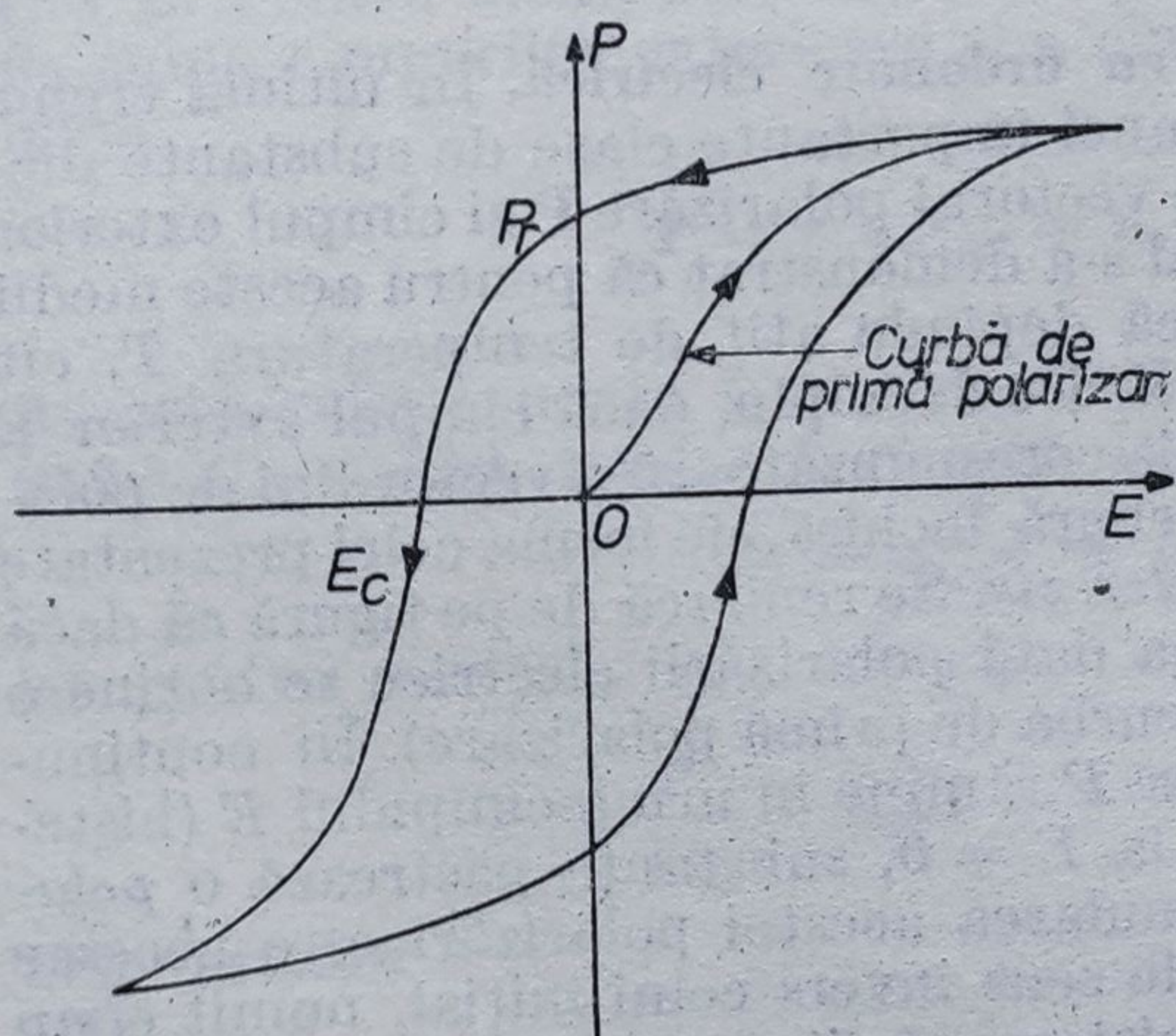


Fig. 6.6.17

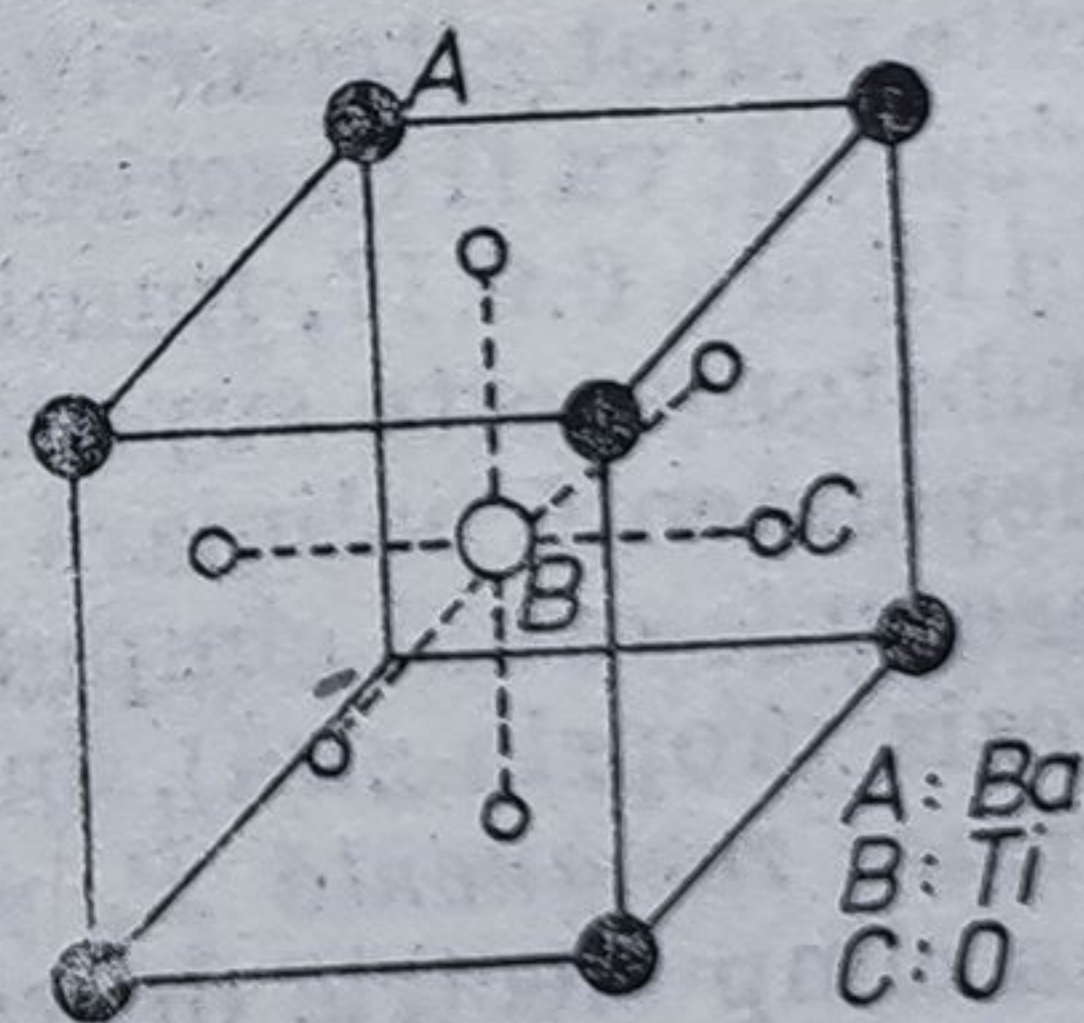


Fig. 6.6.18

canică ridicată, rezistență la încălzire etc.) au scos în evidență cîteva dintre proprietățile specifice substanțelor feoelectrice ca:

— existența unei temperaturi critice  $T_c$  (numită temperatura Curie) peste care proprietățile feoelectrice dispar;



— prezența unei polarizări remanente  $P_r$ , în lipsa cîmpului electric polarizant  $E$ , care variază cu temperatura după o lege specifică dielectricilor feroelectrici;

— susceptivitățile electrice  $\chi_c$  la feroelectrici au valori foarte ridicate (vezi tabelul 6.6.1) și depind puternic de temperatura și de cîmpul polarizant etc. Aceste proprietăți specifice, împreună cu faptul că la temperaturi  $T > T_c$  legea lui Curie (6.6.165) a trebuit să fie modificată printr-o lege mai generală, de tip Curie-Weiss (pentru alte detalii vezi § 6.8),

$$\chi_c = \frac{C}{T - T_c} \quad (6.6.181)$$

au condus la concluzia că la substanțele feroelectrice intervine un proces de ordonare pe domenii de polarizare a momentelor dipolare proprii (fig. 6.6.19). În cazul  $\text{BaTiO}_3$  domeniile de polarizare apar ca urmare a deplasării ionilor  $\text{Ti}^{2+}$  și  $\text{O}^{2-}$  pe distanțe de aproximativ  $0,18\text{\AA}$  (unul spre celălalt), cu realizarea unor legături covalente și a unor momente dipolare proprii orientate pe aceeași direcție. Acest proces conduce la apariția, în cadrul unui domeniu de polarizare, a unei polarizări spontane ( $P_s \neq 0$ ). În

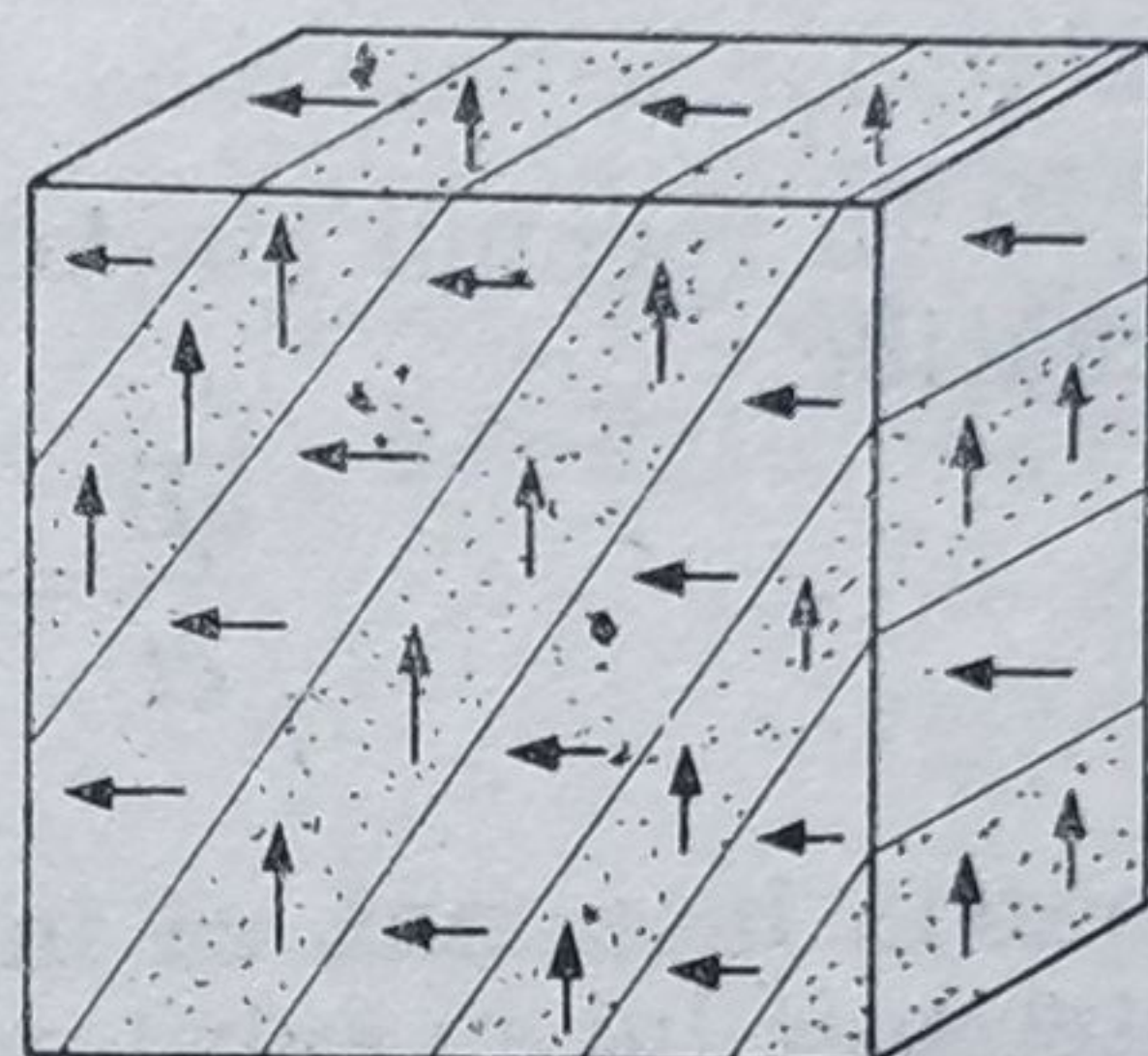


Fig. 6.6.19

lipsa cîmpului polarizant  $E$ , sub acțiunea unor efecte termice și mecanice se realizează de regulă o distribuție haotică a domeniilor de polarizare (ca formă geometrică și direcție de polarizare), ceea ce explică faptul că în aceste condiții  $P = 0$ . Sub acțiunea cîmpului exterior  $E$  însă, apare un proces de orientare treptată a polarizării domeniilor pe direcția lui  $E$ , proces în care fie că cresc domeniile în care polarizarea spontană  $P_s$  este orientată în sensul lui  $E$ , fie intervine o rotație a polarizării  $P_s$  spre direcția lui  $E$ . Ambele procese sînt condiționate de simetria cîmpului cristalin și studiul lor oferă informații prețioase asupra curbei de histerezis. Astfel de studii sînt cu atât mai necesare cu cît substanțelor cu ordonare electrică, din care clasă fac parte substanțele feroelectrice, feroelectrice și antiferoelectrice (vezi și § 6.8) li s-au găsit o serie de întrebuințări practice de mare însemnătate, în: realizarea condensatoarelor electrice de capacități și tensiuni ridicate, a multiplicatoarelor de frecvențe și a modulatorilor, a stabilizatoarelor de tensiune, amplificatoarelor dielectrice și ca elemente de memorie în mașinile electronice de calcul.

Revenind la problema generală a polarizării substanțelor dielectrice din starea solidă, este de remarcat faptul că acest proces fiind determinat de deplasarea ionilor din rețeaua cristalină, va fi însoțit de modificări ale altor proprietăți fizice ale corpului respectiv și în primul rînd a celor mecanice. Într-adevăr, oricît de mici ar fi aceste deplasări, ele trebuie să genereze deformări ale rețelei cristaline, respectiv tensiuni elastice. Acest fenomen a fost pus în evidență experimental și a primit numele de *electrostricțiune*.



Fenomenul de electrostricțiune este un fenomen reversibil, în sensul că și deformările elastice produse în aceste corpuri dielectrice sînt însoțite de generarea unor sarcini (respectiv cîmpuri) electrice. Acest fenomen este cunoscut sub numele de *efect piezoelectric*. Ambele fenomene oferă multiple posibilități de utilizare practică (generatoare de ultrasunete, mărci tensometrice, traductoare electro-acustice etc.).

## 6.7. REGIMUL STAȚIONAR AL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC (ELECTROCINETICA)

În regimul staționar, cîmpul electromagnetic este caracterizat prin ecuațiile

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \mathbf{J} \neq 0. \quad (6.7.1)$$

Aceasta înseamnă că în regim staționar cîmpul nu depinde de timp. La interacția lui cu substanța, se disipează energie sub formă de căldură. Din ecuația de continuitate (6.2.28) rezultă că în regimul staționar avem

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.7.2)$$

sau aplicînd teorema Gauss

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV = \oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (6.7.3)$$

Această relație arată că în regimul staționar fluxul curenților prin orice suprafață închisă este egal cu zero.

### 6.7.1. ELECTROCINETICA

Electrocinetica cuprinde studiul curenților electrici, adică al transportului orientat de sarcină electrică printr-un mediu, numit conductor electric. Sînt conductoare electrice în general toate mediile care posedă sarcini electrice libere, adică sarcini care se pot deplasa pe distanțe mari sub acțiunea unor forțe externe. După cum s-a văzut în § 6.2., transportul de sarcină electrică poate fi caracterizat prin vectorul densitate de curent  $\mathbf{J}$ , definit prin relația

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (6.7.4)$$

În această relație, în definirea lui  $\mathbf{J}$  se consideră că toată cantitatea de sarcină  $dQ = \rho dV$  dintr-un element de volum  $dV$  se deplasează „în bloc”



(împreună), cu viteza  $v$ . Am arătat însă că sarcina electrică are o structură „granulară”, ea constând din sarcini elementare de valoare  $e$ . În cazul conductoarelor metalice, de exemplu, sarcina care se poate deplasa este constituită din sarcinile elementare ale electronilor de conducție (electronii de valență ai metalului). În soluțiile de electroliți și în gazele ionizate sarcinile electrice sînt transportate de ionii pozitivi și negativi (de diverse valențe), iar în cazul coloizilor, purtătorii de sarcină sînt particule mai mari constituite din mai multe molecule (numite molioni sau micle). Existența acestor particule purtătoare de sarcină, face ca în general să nu mai putem vorbi de deplasarea „în bloc” a sarcinii electrice dintr-un element de volum dat, întrucît diverșii purtători de sarcină din același element de volum se pot deplasa cu diverse viteze, ca urmare a mișcării lor de agitație termică, peste care se suprapune mișcarea ordonată ce constituie curentul electric. Pentru a lua în considerare situația aceasta mai generală, densitatea de curent  $\mathbf{J}$  se definește în felul următor: dacă în elementul de volum avem  $n_1$  purtători identici de sarcină (fie electroni, fie ioni sau molioni), care se mișcă cu viteza  $\mathbf{v}_1$ ;  $n_2$  care se mișcă cu  $\mathbf{v}_2$  ș.a.m.d., atunci vectorul  $\mathbf{J}$  se definește prin

$$\mathbf{J} = q \sum_i n_i \mathbf{v}_i; \quad \sum_i n_i = n_0 \quad (6.7.5)$$

unde  $n_0$  reprezintă numărul total al purtătorilor de sarcină existenți în unitatea de volum, iar  $q$  sarcina electrică a unui purtător elementar. Se obișnuiește ca în locul vitezelor  $\mathbf{v}_i$  să se lucreze cu o viteză medie, definită prin relația

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n_0} \sum_i n_i \mathbf{v}_i \quad (6.7.6)$$

Această viteză medie poartă denumirea de *viteză de drift* (pentru că mișcarea obținută din suprapunerea peste agitația termică a unei mișcări dirijate a purtătorilor de sarcină, poartă numele de *mișcare de drift* — mișcare ce s-ar putea asemui cu deplasarea unui roi de albine). Ea este diferită de zero numai dacă purtătorii de sarcină sînt antrenati într-o mișcare dirijată de către forțe exterioare. De regulă, aceste forțe sînt de natură electrică, fiind create de un câmp electric exterior  $\mathbf{E} \neq 0$ , dar pot fi și de natură neelectrică. De exemplu, un gradient termic sau un gradient al concentrației determină în mediile conductoare curenți termoelectrice, respectiv curenți de difuzie.

Ținînd cont de relațiile (6.7.5) și (6.7.6), densitatea de curent se poate scrie sub forma

$$\mathbf{J} = n_0 q \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (6.7.7)$$

Este interesant de remarcat că în cazul curentului electric generat de un câmp electric constant ( $\mathbf{E} = \text{const.}$ ), deși ar trebui ca purtătorii de sarcină să se deplaseze uniform accelerat (fiind acționați de forța  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ) și deci viteza lor de drift și, în consecință, densitatea de curent  $\mathbf{J}$  să se modifice



în timp, experiența ne arată că densitatea de curent rămîne constantă în timp. Un astfel de curent se numește *continuu*. Înseamnă că în mișcarea ordonată a purtătorilor de sarcină mai intervin și alte forțe care asigură staționaritatea acestei mișcări. De aceea, pentru un mediu conductor omogen și izotrop se poate scrie că

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mu \mathbf{E} \quad (6.7.8)$$

coeficientul de proporționalitate  $\mu$  — numit și *mobilitate a purtătorilor de sarcină* — fiind o mărime ce depinde atât de tipul acestor purtători, cât și de starea fizică a mediului conductor. Cu (6.7.8), expresia densității de curent (6.7.7) primește forma

$$\mathbf{J} = n_0 q \mu \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (6.7.9)$$

Această relație exprimă *legea diferențială a lui Ohm*. Noua mărime  $\sigma$ , definită prin relația

$$\sigma = n_0 q \mu \quad (6.7.10)$$

și numită *conductivitate electrică*, caracterizează gradul de conducție electrică al conductoarelor. Valorile acestei mărimi sînt cuprinse între  $\sigma = 10^8 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$  (cazul metalelor) și  $\sigma = 10^{-12} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$  (cazul dielectricilor; vezi și tabelul de la § 6.7.1) și trebuie notat totodată că  $\sigma$  depinde de temperatură, de tipul conducției electrice a mediului respectiv și de natura acestuia. Pentru a evidenția însă aceste dependențe este necesar să se facă un studiu mai detaliat al mecanismului de conducție electrică.

În cazul mediilor conductoare anizotrope (cazul corpurilor cristaline) legea diferențială a lui Ohm (6.7.9) primește formă tensorială

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k \quad (6.7.11)$$

( $\sigma_{ik}$ ) fiind tensorul conductivității electrice. El este un tensor simetric ( $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ ), proprietate care derivă direct din relațiile de reciprocitate ale lui Onsager (4.6.20) referitoare la coeficienții fenomenologici care descriu procese ireversibile liniare.

Obținerea, pe baza acestor legi diferențiale (6.7.9) și (6.7.11), a unor legi integrale presupune cunoașterea în plus a condițiilor la limita de separare a două medii conductoare diferite, respectiv a condițiilor de frontieră. Condițiile la limită pentru curenți electrice se obțin imediat din condițiile la limită generale (6.2.44) și (6.2.45) pentru câmpul electric. Ele stabilesc că componentele normale la suprafața de separație ale densității de curent rămîn neschimbate

$$\mathbf{J}_{n1} = \mathbf{J}_{n2} \quad (6.7.12)$$

în timp ce componentele tangențiale sînt legate între ele prin relația

$$\frac{\mathbf{J}_{t1}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{J}_{t2}}{\sigma_2}. \quad (6.7.13)$$



Pe frontiera conductorului, întrucît în afara acestuia curenul este nul, putem lua

$$E_N = \frac{J_N}{\sigma} = 0. \quad (6.7.14)$$

Deci cîmpul electric normal la suprafața laterală a conductorului este nul. Această concluzie ne permite să definim conductorul drept un tub de curen, în lungul căruia sînt satisfăcute egalități de forma

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{S}_1 = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{S}_2 = \dots = \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{S}_n = I = \text{const.} \quad (6.7.15)$$

$S_i$  reprezentînd aria secțiunii transversale a tubului de curen străbătută de curenul de densitate  $\mathbf{J}_i$ . Mărimea scalară  $I$ , definită prin (6.7.15), sau printr-o relație mai generală de forma

$$I = \iint_{(S)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.7.16)$$

se numește *intensitate a curenului*. Ea descrie fluxul sarcinilor electrice ce străbat secțiunea transversală a conductorului în unitatea de timp și reprezintă, așa cum se știe, mărimea fundamentală în descrierea la scară microscopică a curenților electrice. Pentru a stabili relația ce leagă această mărime de cîmpul electric care generează curenul electric, să mai observăm că în cazul unui conductor străbătut de un curen continuu potențialul electric  $\varphi$  satisface o ecuație de tip Laplace. În adevăr, pe baza legii diferențiale (6.7.2) putem scrie

$$\nabla \mathbf{J} = \nabla(\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla(-\nabla \varphi) = \sigma \nabla^2 \varphi = 0. \quad (6.7.17)$$

Deci

$$\Delta \varphi = 0$$

ceea ce înseamnă că în regimul staționar suma sarcinilor pozitive din conductor este în permanență egală cu suma celor negative. Această concluzie este importantă și ea se referă la sarcinile volumice. De exemplu, în cazul metalelor, sarcina volumică a electronilor de conducție este compensată de sarcina ionilor din nodurile rețelei cristaline. În aceste condiții suprafața exterioară (suprafața laterală) a conductoarelor plasate în cîmpuri omogene ( $\mathbf{E} = \text{const}$ ) nu mai este o suprafață echipotențială ca în cazul regimului static. Potențialul electric  $\varphi$  variază continuu în lungul conductorului. De exemplu, pentru un conductor cilindric de arie  $S$  și lungime  $l$  avem (fig. 6.7.1)

$$E = -|\nabla \varphi| = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{U}{l} \quad (6.7.18)$$

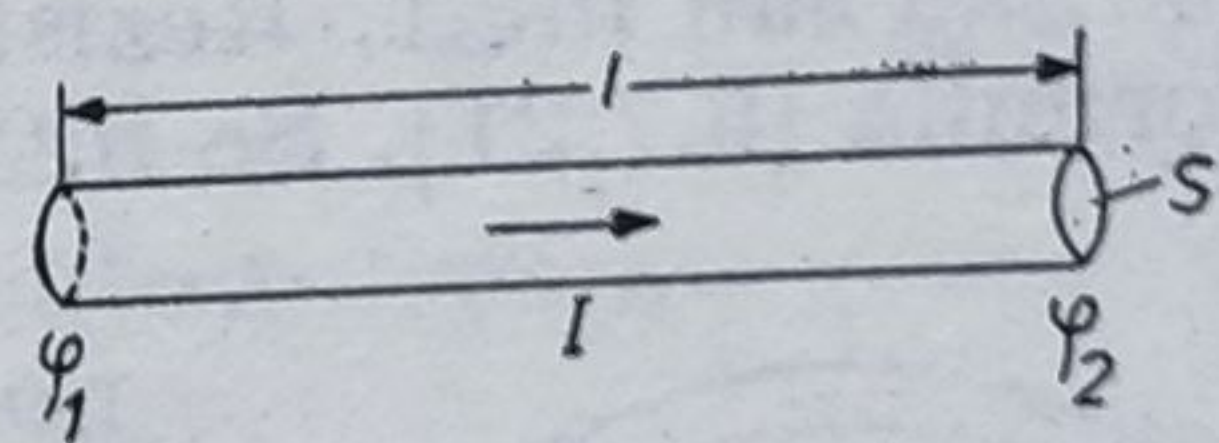


Fig. 6.7.1

unde

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6.7.19)$$

reprezintă diferența de potențial sau tensiunea la capetele conductorului. Ținînd cont și de (6.7.16), (6.7.9) și (6.7.18) obținem pentru intensitatea curenului electric ce se naște în conductorul respectiv expresia

$$I = \frac{\sigma S}{l} U \quad (6.7.20)$$



## Mărimea

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \rho \frac{l}{S} = R_0(1 + \alpha_R t) \quad (6.7.21)$$

se numește *rezistență electrică* a conductorului,  $\rho$  fiind *rezistivitatea* sau *rezistența specifică* a conductorului, iar  $\alpha_R$  coeficientul de variație termică a rezistenței electrice. Formula (6.7.21) este valabilă numai pentru conductoare cilindrice, formă geometrică în care se prezintă de obicei conductoarele metalice. S-a menționat deja că la conductoarele metalice rezistivitatea electrică are valori de ordinul a  $10^{-8} \Omega \cdot m$ , cuprul metalic fiind pînă nu demult elementul cel mai mult utilizat la transportul curentului electric. Se știe că în ultima vreme, conductoarele de cupru au început să fie înlocuite cu conductoare de aluminiu, din motive de economicitate. Pentru a obține aceeași rezistență pe unitatea de lungime a conductorului, deși secțiunea transversală a conductorului de aluminiu trebuie să fie de 1,67 ori mai mare decît a celui de cupru, masa lui se reduce la jumătate.

Pentru a regla valoarea lui  $I$  se folosesc *rezistoare* — porțiuni de circuit a căror rezistență  $R$  este mare în comparație cu a restului circuitului. Rezistoarele se realizează fie din sîrmă de wolfram sau tantal, fie din sîrmă de manganin, nicrom și alte aliaje (a căror rezistivitate este de zeci sau sute de ori mai mare decît a cuprului; vezi tabelul următor) în variante

Tabelul 6.7.1.

Material	$\rho [\Omega \cdot m]$	$\alpha_R [K^{-1}]$	Material	$\rho [\Omega \cdot m]$	$\alpha_R [K^{-1}]$
Cupru metalic	$1,75 \cdot 10^{-8}$	$38,6 \cdot 10^{-4}$	Tantal	$15,5 \cdot 10^{-8}$	$31 \cdot 10^{-4}$
Argint	$1,60 \cdot 10^{-8}$	$36 \cdot 10^{-4}$	Manganin 84% Cu 12% Mn 4% Ni	$44,7 \cdot 10^{-8}$	$30 \cdot 10^{-5}$
Aluminiu	$2,80 \cdot 10^{-8}$	$49 \cdot 10^{-4}$	Nicrom 65% Ni 12% Cr 23% Fe	$112 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-4}$
Wolfram	$56 \cdot 10^{-8}$	$45 \cdot 10^{-4}$	Mailechort 60% Cu 25% Zn 15% Ni	$30 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-5}$

diverse, avînd rezistențe constante sau variabile. Ele sînt realizate de obicei din sîrmă bobinată pe suporti cilindrici izolanti și pot fi grupate în serie, paralel sau mixt. Rezistența electrică a acestor rezistoare se calculează cu formula (6.7.21). Se întîlnesc însă rezistoare și în alte variante geometrice

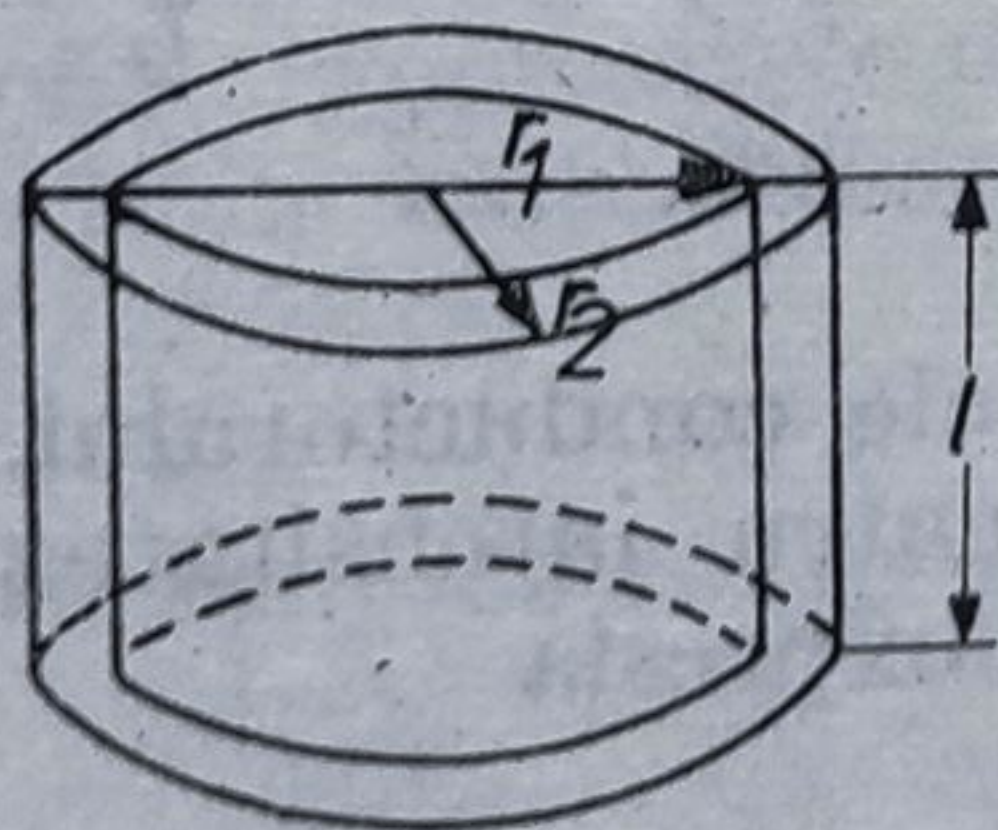


Fig. 6.7.2

în care cazuri calcularea rezistenței presupune cunoașterea distribuției curenților prin mediul conductor. De exemplu, în cazul izolațiilor cilindrice (fig. 6.7.2), mediul de rezistivitate  $\rho$  formează o cămașă cilindrică cu raza suprafeței interioare  $r_1$  și a celei exterioare  $r_2$ , care este străbătută radial de către curentul electric. De aceea, putem scrie

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.7.22)$$



sau dacă se introduce notația

$$\Lambda = \frac{2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6.7.23)$$

numită și „lungime efectivă” a izolației ( $l$  fiind lungimea geometrică a acestei izolații)

$$R = \frac{\rho}{\Lambda}. \quad (6.7.24)$$

Acest rezultat este valabil pentru un rezistor de orice formă geometrică și el ne arată că calcularea rezistenței  $R$  se reduce la calcularea unui factor  $\Lambda$ , care depinde numai de forma geometrică a rezistorului respectiv. Înseamnă că pentru fiecare mediu conductor se poate defini și calcula (sau determina) o rezistență electrică  $R$ , în așa fel încît relația (6.7.20) să poată fi scrisă sub forma

$$I = \frac{U}{R}. \quad (6.7.25)$$

Această nouă relație exprimă *legea lui Ohm* pentru curentul continuu ce străbate rezistorul de rezistență electrică  $R$ . Ea este o lege integrală, spre deosebire de legea lui Ohm diferențială (6.7.9).

Atunci cînd printr-un conductor circulă un curent continuu sub acțiunea unui cîmp electric exterior de intensitate constantă, evident că asupra sarcinilor care se deplasează se execută un lucru mecanic  $\mathcal{A}$  de către cîmpul exterior. Acest lucru pentru o sarcină  $Q$  are expresia

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 QE \cdot d\mathbf{r} = -Q \int_1^2 \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = QU. \quad (6.7.26)$$

Ținînd cont că în cazul curentului continuu putem scrie

$$Q = It \quad (6.7.27)$$

din (6.7.26) rezultă că lucrul efectuat se poate scrie sub forma

$$\mathcal{A} = UIt. \quad (6.7.28)$$

De aici rezultă că puterea consumată de la cîmpul exterior este dată de relația

$$P = UI. \quad (6.7.29)$$

De remarcat acum faptul că lucrul efectuat de cîmpul exterior asupra sarcinilor electrice nu este „absorbit” de către purtătorii de sarcină pentru mărirea energiei lor cinetice, deoarece în cazul curentului continuu, așa



cum am arătat mai sus, viteza sarcinilor (viteza de drift) se menține constantă. Atunci înseamnă că în cazul curentului continuu sarcinile electrice nu rețin energia primită de la câmpul exterior, ci ele transferă această energie substanței ce constituie mediul conductor respectiv. Interacțiunile dintre purtătorii de sarcină și particulele constitutive ale mediului conductor sînt specifice tipului de conducție electrică și se realizează, de regulă, prin ciocniri cu transfer de energie între aceste particule. De cele mai multe ori, mediul conductor primește această energie sub formă de căldură. Cantitatea de căldură  $Q_0$  absorbită în intervalul de timp  $t$ , de către substanța unui mediu conductor de rezistență  $R$  prin care trece un curent continuu de intensitate  $I$  va fi dată, potrivit relațiilor (6.7.25) și (6.7.27), de

$$Q_0 = RI^2t = UI t = \frac{U^2}{R} t = t \iiint_{(V)} \sigma E^2 dV. \quad (6.7.30)$$

Aceste relații exprimă așa numita *lege a lui Joule*.

Din cele prezentate mai sus rezultă că pentru menținerea unui curent continuu este necesar un consum de energie din exterior. Acest consum de energie este asigurat de către câmpul electric exterior, prin lucrul pe care îl efectuează asupra purtătorilor de sarcină în mișcare. De altă parte, am văzut că în cazul electrostatic câmpul electric nu efectuează nici un lucru mecanic asupra sistemului de sarcini aflate în câmp (deoarece energia sistemului de sarcini, atât cea de interacțiune reciprocă (6.6.56), cât și cea de interacțiune cu câmpul exterior (6.6.70), rămîn neschimbate în timp, întrucît fiecare sarcină din sistem se află în repaus). De aici rezultă deosebirea esențială între regimul staționar (cînd avem curenți electrice și deci deplasări de sarcini electrice) și regimul static (cînd nu avem deplasări de sarcini) al câmpului electromagnetic.

Elementul care menține în regim staționar un câmp electric, făcîndu-l capabil să efectueze lucrul mecanic asupra sarcinilor în mișcare este *generatorul* sau *sursa de tensiune electrică*. Generatoarele electrice folosite în practică transformă în energie electrică alte forme de energie (mecanică la dinam; termică la pila termoelectrică și generatoarele magnetohidrodinamice — generatoarele MHD; chimică la elementele galvanice; luminoasă în celula fotoelectrică etc.). Din punctul de vedere al câmpului electric

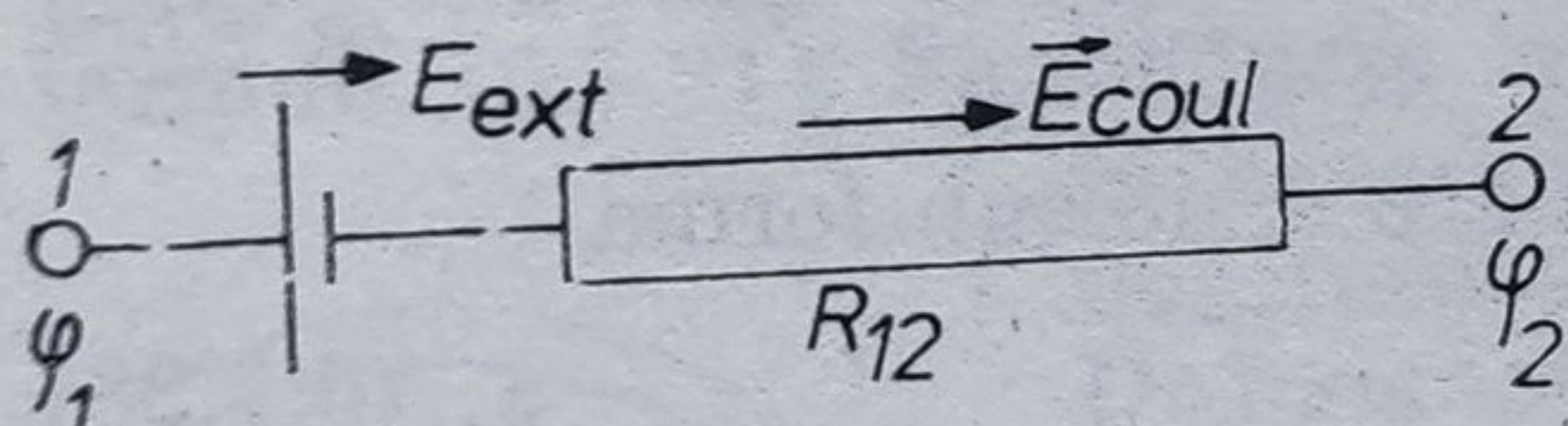


Fig. 6.7.3

putem spune că în generator se crează un câmp electric „exterior” (sau „director”, sau „imprimat” etc.),  $E_{ext}$  care menține circulația curentului continuu prin circuitul format de generator și conductor (fig. 6.7.3). Acest câmp se suprapune peste câmpul electrostatic de tip coulombian  $E_{coul}$  (dat de interacțiunea coulombiană a sarcinilor în repaus). De aceea, legea diferențială a lui Ohm (6.7.9) se scrie, în prezența surselor de curent, sub forma

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \mathbf{E}_{coul} + \mathbf{E}_{ext}.$$



Dacă integrăm această ecuație pentru o porțiune de circuit ca cea din figura 6.7.3, obținem

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \, ds = \int_1^2 \mathbf{E}_{coul} \, ds + \int_1^2 \mathbf{E}_{ext} \, ds. \quad (6.7.31)$$

Deoarece  $\mathbf{E}_{coul} = -\nabla\varphi$ , unde  $\varphi$  este potențialul câmpului electrostatic, putem scrie

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{coul} \, ds = -\int_1^2 \nabla\varphi \, ds = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6.7.32)$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  reprezintă valorile potențialului electrostatic în capetele 1 respectiv 2 ale porțiunii de circuit. Mărimea

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{ext} \, ds \quad (6.7.33)$$

se numește *tensiune electromotoare (t.e.m.)*, aplicată pe porțiunea de circuit respectivă. De observat apoi că în orice punct al porțiunii de circuit avem  $\mathbf{J} \parallel ds$  și deci  $\mathbf{J}ds = Jds$ . În plus, pentru un circuit realizat din conductoare cilindrice, în fiecare punct al porțiunii de circuit avem  $J = I_{12}/S$ ,  $S$  fiind aria secțiunii transversale a conductorului, iar  $I_{12}$  — intensitatea curentului prin respectivul conductor. Dacă între punctele 1 și 2 circuitul nu are ramificații, atunci intensitatea  $I_{12}$  are aceeași valoare în toate punctele porțiunii de circuit respective și putem scrie

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}ds = \int_1^2 \frac{1}{\sigma} J \, ds = I_{12} \int_1^2 \frac{ds}{\sigma S} = I_{12} R_{12}. \quad (6.7.34)$$

Mărimea  $R_{12}$  definită prin aceste relații va fi tocmai rezistența electrică a porțiunii de circuit între punctele 1 și 2.

Ținând cont de relațiile (6.7.32)–(6.7.33) se observă că putem transcrie relația (6.7.31) sub forma

$$I_{12} R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (6.7.35)$$

Această relație reprezintă *legea integrală a lui Ohm* pentru o porțiune deschisă (punctul 1 nu coincide cu punctul 2) de circuit fără ramificații. Dacă ne referim la un circuit închis, punctele 1 și 2 coincid, avem deci  $\varphi_1 = \varphi_2$  și din (6.7.35) obținem legea integrală a lui Ohm pentru un circuit închis fără ramificații exterioare, scrisă sub forma

$$I_{circ} \cdot R_{circ} = \mathcal{E}_{circ}. \quad (6.7.36)$$

În practică, de regulă, avem de a face adesea cu circuite ramificate. Să vedem în continuare cum se scrie legea integrală a lui Ohm pentru



astfel de circuite. Să considerăm pentru aceasta un circuit cu ramificații de tipul celui din fig. 6.7.4, a. Dacă ne referim la o porțiune de circuit formată din succesiunea de puncte 1, 2, ..., n, astfel alese încât între două

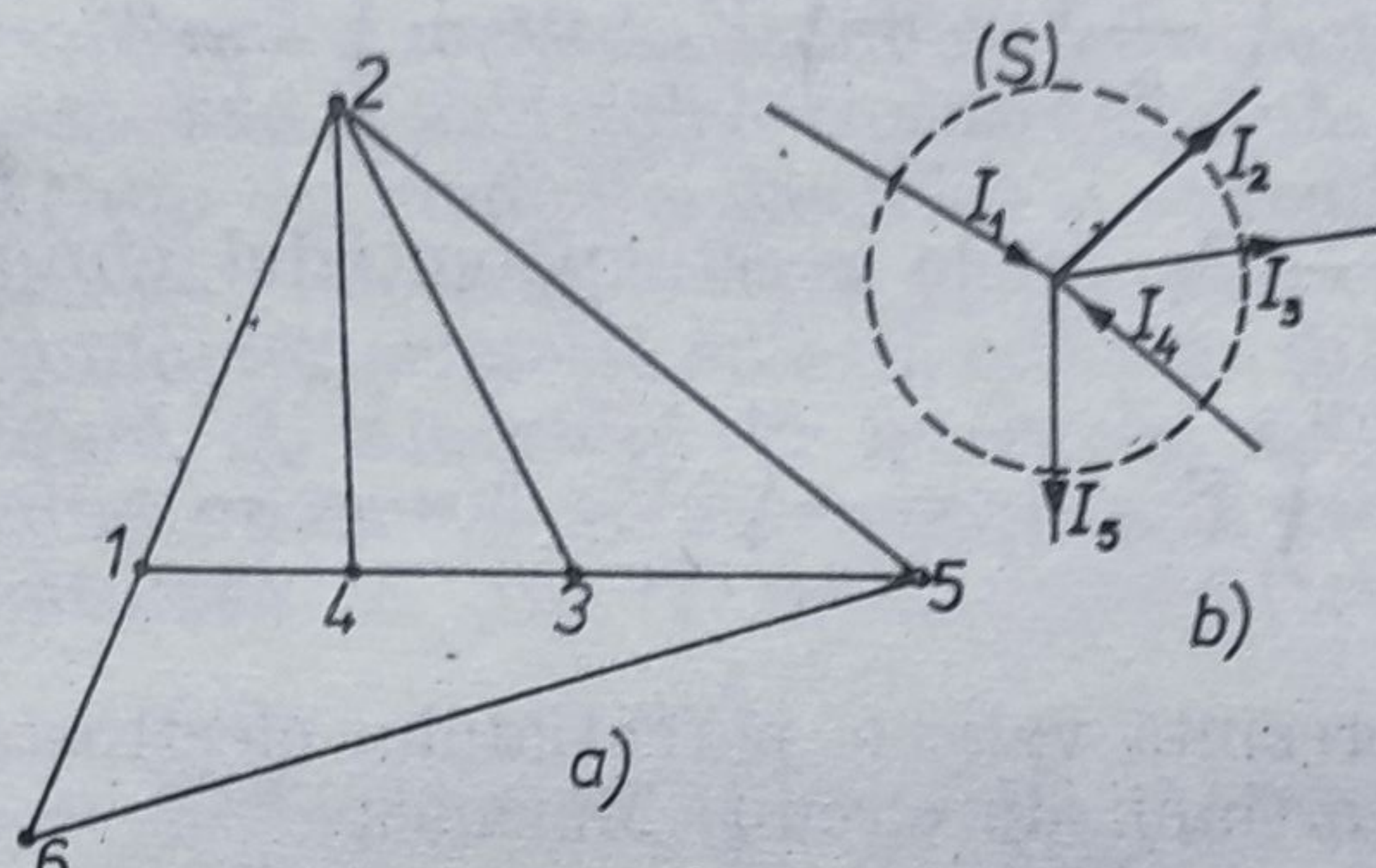


Fig. 6.7.4

puncte succesive  $i$  și  $i + 1$  circuitul să nu prezinte ramificații, atunci prin sumarea unor relații de tipul (6.7.35) obținem

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_{i,i+1} R_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_{i,i+1} \quad (6.7.37)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_{i,i+1} R_{i,i+1} = \varphi_1 - \varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_{i,i+1} \quad (6.7.38)$$

Dacă porțiunea de circuit considerată formează o buclă închisă, atunci punctul 1 va coincide cu punctul  $n$  și  $\varphi_1 = \varphi_n$ , iar relația (6.7.37) se reduce la forma

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_{i,i+1} R_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_{i,i+1} \quad (6.7.39)$$

Această relație este cunoscută sub numele de *legea a doua a lui Kirchhoff* referitoare la buclele rețelelor electrice.

Ce se întâmplă într-un nod al rețelei ne spune legea conservării sarcinilor electrice, respectiv ecuația de continuitate (6.2.28), care în regim staționar primește forma (6.7.2). Dacă ne referim la un nod anumit al rețelei, ca cel figurat în fig. 6.7.4, b, atunci din (6.7.3) obținem

$$\oiint \mathbf{J} d\mathbf{S} = \sum_k \oiint_{(S_k)} \mathbf{J}_k d\mathbf{S}_k = \sum_k I_k = 0. \quad (6.7.40)$$

Deci într-un nod al unei rețele electrice de curent continuu suma algebrică a curenților este nulă ( $-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$  pentru nodul din figura 6.7.4, b). Această concluzie reprezintă *prima lege a lui Kirchhoff*.



Cele două legi ale lui Kirchhoff (relațiile (6.7.39) și (6.7.40)) sînt suficiente pentru rezolvarea problemei rețelelor de curent continuu, adică pentru aflarea curenților prin fiecare linie atunci cînd se cunosc rezistențele acestor linii și tensiunile electromotoare ale surselor din rețea.

### 6.7.2. CONSIDERAȚII (CLASICE) ASUPRA MECANISMULUI DE CONDUCTIE ELECTRICĂ

S-a arătat, în paragraful precedent, că în toate mediile care conțin purtători liberi de sarcină iau naștere curenți electrici dacă acești purtători sînt antrenati într-o mișcare ordonată de către un cîmp de forțe (de natură electrică, termică etc). Diversitatea tipurilor de purtători de sarcină, de interacțiuni ale acestora cu celelalte particule din mediul respectiv determină, în ultimă instanță, variația coeficientului de conductivitate electrică  $\sigma$  funcție atît de tipul mediului, cît și de starea lui fizică. Desigur că studiul microscopic al unor astfel de fenomene trebuie să țină seama de comportarea specific cuantică a fiecărui purtător individual de sarcină, dar s-a constatat că informații importante asupra mecanismului de conducție electrică se pot obține și în cadrul unei tratări clasice. O astfel de tratare distinge trei categorii principale de mecanisme de conducție electrică și anume:

- conducția electronică,
- conducția ionică,
- conducția molionică (sau electroforetică).

De notat că aceste tipuri de conducție electrică pot fi întîlnite la aceeași substanță în stări de agregare diferite. De exemplu, metalele în stare solidă și lichidă (topită), au o conducție specific electronică, în timp ce în stare de vapori, o conducție ionică; germaniul are la temperatura camerei proprietăți semiconductoare, în stare topită se comportă ca un metal (deci posedă o conducție electronică), iar în stare de vapori ca și în apropiere de temperatura de 0 K se comportă ca un dielectric (conducție slabă ionică) etc.

a) *Conducția electronică*. Este realizată de electronii liberi din metale, semiconductori\* și din plasmă, care se pun în mișcare ordonată sub acțiunea unui cîmp exterior sau a unui gradient termic (cazul curenților termoelectrice). Este de remarcat că, deși într-un cîmp electric constant electronii ar trebui să se deplaseze uniform accelerat, sub acțiunea forței

$$\mathbf{F} = -|e| \mathbf{E}; e < 0 \quad (6.7.41)$$

se obține, așa cum s-a menționat mai sus, un curent continuu. Explicația acestui fapt constă în aceea, că electronii antrenati într-o mișcare ordonată în sens invers cîmpului  $\mathbf{E}$ , suferă o serie de ciocniri neelastice cu ionii pozitivi din nodurile rețelei cristaline sau cu alte particule din conductor. În fiecare din aceste ciocniri ei pierd energie și prin urmare ciocnirile joacă

\* Studiul conductibilității electrice a mediilor semiconductoare necesită o tratare specific cuantică și, de aceea, nu va fi prezentat aici.



un rol de frinare în mișcarea ordonată a electronilor. De aceea, putem să aproximăm efectul acestor ciocniri neelastice cu acțiunea unor forțe de frecare de tipul

$$\mathbf{F}_f = -f\langle \mathbf{v} \rangle. \quad (6.7.42)$$

Atunci, pentru cazul mișcării nerelativiste (viteza electronilor de conducție la curenți obișnuiți, de ordinul zecilor sau sutelor de amperi este de ordinul lui  $10^3$  m/s), putem scrie ecuația de mișcare a electronilor de conducție sub forma \*

$$m_0 \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle = -e\mathbf{E} - f\langle \mathbf{v} \rangle \quad (6.7.43)$$

respectiv

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{f}{m_0} \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\mathbf{E}}{m_0}. \quad (6.7.44)$$

Această ecuație diferențială liniară neomogenă are soluția de forma

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_0 \rangle e^{-\frac{f}{m_0}t} - \left( \frac{m_0}{f} \right) \frac{e\mathbf{E}}{m_0}. \quad (6.7.45)$$

Mărimea

$$\tau = \frac{m_0}{f} \quad (6.7.46)$$

reprezintă intervalul de timp în care viteza de drift se micșorează de  $e$  ori, datorită ciocnirilor și se numește *timp de relaxare*. Dacă se ține cont că pentru metale  $\tau \sim 10^{-8}$  s, atunci se vede că primul termen din (6.7.45) scade rapid în timp și pentru intervale de timp de ordinul celor măsurabile în experiențe obișnuite ( $t \sim 1$  s) putem aproxima soluția (6.7.45) prin expresia

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\tau}{m_0} \mathbf{E}. \quad (6.7.47)$$

Aceasta înseamnă că mobilitatea electronilor de conducție este dată de relația

$$\mu = -\frac{e\tau}{m_0}; \quad e < 0 \quad (6.7.48)$$

iar coeficientul de conductibilitate electronică prin

$$\sigma = \frac{e^2 n_0 \tau}{m_0}. \quad (6.7.49)$$

\* Într-o tratare cuantică, în locul masei proprii  $m_0$  a electronului trebuie luată masa efectivă, determinată nu numai de proprietățile inerțiale ale electronului, ci și de interacțiunile lui cu câmpul local cristalin.



Se remarcă faptul că dependența conductivității  $\sigma$  de natura și starea fizică a conductorului este determinată de densitatea volumică a electronilor de conducție  $n_0$  și de timpul de relaxare  $\tau$ . Dacă se are în vedere caracterul statistic al proceselor de ciocnire, atunci se poate spune că inversul timpului de relaxare este o măsură a probabilității acestor ciocniri. Cum într-o structură cristalină, de exemplu, pot interveni atât ciocniri cu oscilațiile nodurilor rețelei, cât și cu defectele de structură, respectiv cu impuritățile ei, iar contribuția acestora la mecanismul de conducție electronică este aditiv, putem scrie

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_i}. \quad (6.7.50)$$

Înseamnă că rezistivitatea  $\rho = \sigma^{-1}$  a conductorului va fi dată, potrivit relației (6.7.50), de suma a trei termeni

$$\rho = \rho_T + \rho_d + \rho_i. \quad (6.7.51)$$

Primul termen exprimă contribuția la rezistivitatea electrică a ciocnirilor electronilor cu nodurile rețelei aflate în mișcare de vibrație termică, al doilea contribuția defectelor de structură ale rețelei, iar al treilea contribuția impurităților de substituție. Relația (6.7.51) este cunoscută sub denumirea de *regula lui Mathiessen*. Pe baza ei se poate explica de ce rezistivitatea aliajelor este, în general, mai ridicată decât a metalelor pure (se știe că prin alierea Cu cu Ag, rezistivitatea electrică crește, deși  $\rho_{Ag} < \rho_{Cu}$ ). De notat, de asemenea, că numai primul termen  $\rho_T$  este sensibil influențat de temperatură, pentru că vibrațiile nodurilor rețelei se amplifică odată cu creșterea temperaturii.

O investigație simplă a acestei influențe se poate face folosind legile statisticii clasice. Se consideră de obicei, în acest scop, modelul gazului electronic, în care fiecare electron de conducție execută mișcări libere între două ciocniri succesive. Dacă se notează cu  $\langle l \rangle$  liberul parcurs mijlociu în această mișcare și cu  $v_t = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  viteza pătratică medie, atunci se poate lua

$$\tau = \frac{\langle l \rangle}{v_t}. \quad (6.7.52)$$

Calculînd în continuare viteza pătratică medie a electronilor dintr-o lege clasică de echipartiție a energiei de forma

$$\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (6.7.53)$$

și introducînd rezultatul în (6.7.49), obținem

$$\sigma_T = \frac{n_0 e^2 \langle l \rangle}{2 \sqrt{3} m_0 k T} \quad (6.7.54)$$



respectiv

$$\rho_T = \frac{2\sqrt{3m_0k}}{n_0 e^2 \langle l \rangle} \cdot \sqrt{T} = \rho(T). \quad (6.7.55)$$

Graficul din figura 6.7.5, care exprimă variația cu temperatura a rezistivității electrice a fierului metalic, arată buna concordanță a rezultatului (6.7.55) cu datele experimentale. Pentru a exprima dependența de tem-

peratură a rezistivității se definește coeficientul fenomenologic de variație termică a rezistivității  $\alpha_R$  prin relația

$$\alpha_R = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT}. \quad (6.7.56)$$

Experiența arată că la temperaturi obișnuite  $\alpha_R = \text{const.}$  și deci avem

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha_R \cdot t). \quad (6.7.57)$$

De notat că studiul dependenței de temperatură a rezistivității electrice la mercur, făcut în anul 1911 de către Kamerling-Onnes,

a condus la concluzia că sub o anumită temperatură critică  $T_c$ , apropiată de temperatura heliului lichid (4,2 K), rezistivitatea  $\rho_T$  tinde la zero. Se obține așa numita *stare de supraconductibilitate*, care oferă interesante aplicații practice, dar care poate fi studiată numai în cadrul unei teorii cuantice.

Valabilitatea aproximativă a teoriilor clasice ale conductibilității electronice este dovedită de *legea Wiedemann-Franz*, care leagă conductivitatea electrică  $\sigma$  de cea termică  $K$ . Folosind relația (6.7.54) se obține

$$\frac{K}{\sigma} = L \cdot T \quad (6.7.58)$$

$L$  fiind o constantă ( $L = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega/\text{K}^2$ ), numită și „numărul lui Lorentz”. Această lege atestă faptul că electronii de conducție sînt purtători de energie termică, respectiv de energie electrică în ambele procese de conducție.

b) *Conducția ionică*. Este specifică soluțiilor de electroliți (soluții de oxizi, acizi, baze și săruri) în care, datorită procesului de *disociere electrolică*, iau naștere purtători de sarcină pozitivă și negativă numiți *ioni*. Se știe că disociația moleculelor unei substanțe dizolvate intervine ca urmare a slăbirii legăturilor ionice din cadrul acestor molecule, slăbire cauzată de prezența solventului ca mediu dielectric. Într-adevăr, fiind vorba de legături realizate prin forțe de interacțiune coulombiene, în prezența solventului, intensitatea lor se va micșora de  $\epsilon_r$  ori ( $\epsilon_r = 78$ , la apă!), devenind așa de slabe încît permit ionilor pozitivi și negativi să migreze prin soluție.



Teoria disocierii electrolitice creată de către Arrhenius se bazează pe ideea că procesul de disociere moleculară este un proces reversibil, fiind însoțit în permanență de procese inverse, de recombinație a ionilor (numite și procese de *molizare*), cu formare de molecule neutre. În condiții de echilibru termodinamic va exista o fracțiune  $x$  constantă din numărul de molecule  $n_0$ , aflate în unitatea de volum, în stare disociată. Această fracțiune  $x$  poartă numele de *grad de disociere electrolitică* (sau mai general grad de ionizare, întâlnit și la studiul conducției electrice a gazelor ionizate, respectiv a plasmei). Vor exista deci

$$n'_0 = x n_0 \quad (6.7.59)$$

molecule disociate, respectiv  $2n'_0$  ioni (jumătate dintre ei purtând sarcina  $q_+ = ve > 0$ , iar cealaltă jumătate, sarcina  $q_- = ve < 0$ ,  $v$  reprezentând valența ionilor) și

$$n''_0 = (1 - x) n_0 \quad (6.7.60)$$

molecule nedisociate într-o unitate de volum a electrolitului.

Firește că în prezența unui câmp electric constant (realizat prin introducerea a doi electrozi metalici în electrolit, unul fiind alimentat la un potențial pozitiv și numit *anod*, iar celălalt la un potențial negativ și numit *catod*) ionii vor fi antrenati spre electrozii de semne contrare lor și vor determina astfel un curent electric. Experiența arată că la  $E = \text{const.}$ , se generează un curent continuu, ceea ce înseamnă că și în acest caz pot fi definite mobilități ale ionilor pozitivi și negativi, prin relații de forma (6.7.8). Deci putem scrie

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_+ + \mathbf{J}_- = q x n_0 (\langle \mathbf{v} \rangle_+ + \langle \mathbf{v} \rangle_-) \quad (6.7.61)$$

sau cu

$$\langle \mathbf{v} \rangle_+ = \mu_+ \mathbf{E}; \quad \langle \mathbf{v} \rangle_- = \mu_- \mathbf{E} \quad (6.7.62)$$

din (6.7.61) va rezulta tot o lege diferențială a lui Ohm

$$\mathbf{J} = q x n_0 (\mu_+ + \mu_-) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.7.63)$$

în care coeficientul de conductivitate  $\sigma$  este dat de expresia

$$\sigma = q x n_0 (\mu_+ + \mu_-). \quad (6.7.64)$$

Dacă notăm prin numărul lui Faraday

$$F = 96,496 \cdot 10^3 \text{ C/kmol} \quad (6.7.65)$$

sarcina purtată de un kmol de ioni monovalenți și prin

$$\eta = \frac{n_0}{N_A} \quad (6.7.66)$$

concentrația echivalentă a moleculelor solvate, atunci expresia (6.7.64) se mai poate scrie sub forma

$$\sigma = v F \eta x (\mu_+ + \mu_-). \quad (6.7.67)$$



Această expresie pune în evidență o dependență a conductibilității ionice atât de gradul de disociere  $x$ , cât și de concentrația echivalentă  $\eta$ . În figura 6.7.6 este prezentată grafic variația lui  $\sigma$ , pentru o soluție de acid sulfuric și apă, funcție de concentrația procentuală a acesteia. Creșterea inițială puternică a lui  $\sigma$  odată cu concentrația se explică prin aceea că la con-

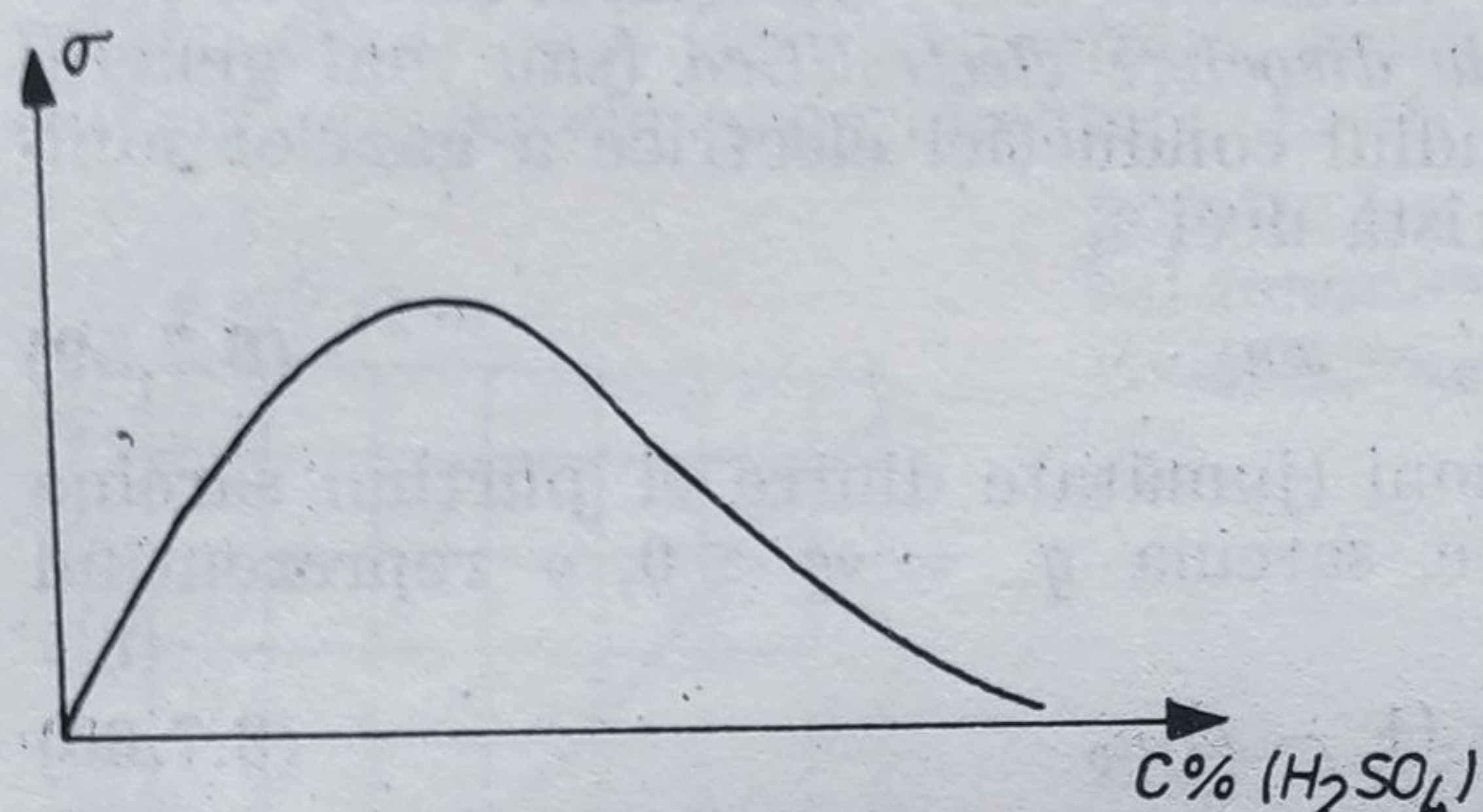


Fig. 6.7.6

centrații mici (electroliți slabi) gradul de disociere fiind maxim ( $x = 1$ ) crește numărul de ioni odată cu creșterea lui  $n_0$ . La concentrații mai mari (electroliți tari), gradul de disociere începe să scadă odată cu creșterea concentrației și aceasta determină scăderea lui  $\sigma$ . În determinări practice, de regulă, se măsoară așa numita *conductivitate echivalentă*, definită prin relația

$$\Lambda = \frac{\sigma}{\eta} \quad (6.7.68)$$

Cunoscând valoarea  $\Lambda_\infty$  pentru un electrolit slab ( $x = 1$ ) și valoarea  $\Lambda$  pentru electrolitul tare respectiv, se poate determina gradul de disociere al acestuia din urmă cu ajutorul relației

$$x = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} \quad (6.7.69)$$

În sfârșit, să mai notăm că pentru determinarea mobilităților ionice  $\mu_+$  și  $\mu_-$ , se află mai întâi raportul lor

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \frac{\eta_0 - \eta_t^A}{\eta_0 - \eta_t^K} \quad (6.7.70)$$

din măsurători de scădere în timp a concentrației echivalente lângă anod ( $\eta_t^A$ ), respectiv lângă catod ( $\eta_t^K$ ). Acest raport, împreună cu (6.7.69), constituie două ecuații care permit determinarea lui  $\mu_+$  și  $\mu_-$ .

O conducție ionică se obține și în cazul gazelor slab ionizate. Se știe că la starea gazoasă ionizarea poate fi produsă fie de către surse externe (încălziri, radiații X, radiații nucleare etc.), fie prin procese de autoexcitare care apar în timpul unor descărcări electrice. În primul caz se obține o ionizare slabă, gradul de ionizare  $x$  fiind de ordinul lui  $10^{-3} - 10^{-5}$ . În al doilea caz apar ionizări puternice în momentul în care electronii rezultați din ionizarea moleculelor de gaz încep să aibă o existență independentă, pentru că aceștia vor produce, prin ciocniri cu moleculele neutre, noi procese de ionizare. Se constată că în prezența unui câmp electric constant



(realizat prin intermediul a doi electrozi metalici alimentați la o tensiune electrică constantă), aceste ciocniri, la care participă și electronii smulși din catod, se produc în avalanșe rezultând o descărcare electrică în gaz care se autoîntreține. Desigur că mecanismul de conducție electrică în acest caz devine foarte complex, el fiind determinat de prezența atât a ionilor cât și a electronilor liberi. Fără a intra în detaliile acestor procese de conducție (electronică și ionică) de o largă utilitate practică, vom analiza succint doar mecanismul de conducție ionică a gazelor slab ionizate.

Dacă într-un astfel de mediu gazos se produc  $\Delta n_0$  ioni pe secundă în unitatea de volum a gazului, iar dintre aceștia, un număr  $\Delta n' = \delta \cdot n_0^2$  se recombina în unitatea de timp ( $\delta$  fiind un coeficient de recombinare sau de molizare, iar  $n_0$  numărul de ioni existenți în unitatea de volum a gazului), atunci în condiții de echilibru, din egalitatea

$$\Delta n_0 = \Delta n' \quad (6.7.71)$$

rezultă]

$$n_0 = \sqrt{\Delta n_0 / \delta}. \quad (6.7.72)$$

În prezența unui câmp electric constant ( $E = \text{const.}$ ) o parte dintre ionii formați vor fi antrenati într-o mișcare dirijată și vor forma curentul electric. Condiția (6.7.72) în acest caz se va scrie sub forma

$$\Delta n_0 = \delta \cdot n_0^2 + \frac{|J|}{qd} \quad (6.7.73)$$

$J$  fiind densitatea de curent ce se stabilește între electrozii plasați la distanța  $d$  unul față de celălalt, iar  $q$  sarcina purtată de un ion. Pentru curenți de intensități slabe, când este îndeplinită condiția

$$J/qd \ll \delta \cdot n_0^2 \quad (6.7.74)$$

se poate considera că  $n_0$  rămâne practic constant și deci, în acest caz, densitatea de curent  $J$  satisface legea diferențială a lui Ohm

$$J = q \sqrt{\frac{\Delta n_0}{\delta}} (\mu_+ + \mu_-) E = \sigma E. \quad (6.7.75)$$

În cazul limită, când

$$J_0 = qd \Delta n_0 \quad (6.7.76)$$

și când deci toți ionii formați iau parte la mișcarea ordonată sub acțiunea câmpului  $E$ , se obține un curent de saturație (fig. 6.7.7). Creșterea în con-



tinuare a tensiunii electrice aplicate electrozilor, peste o valoare critică  $U_c$ , conduce la apariția unei descărcări electrice independentă, despre care s-a amintit mai sus, conducția ne mai rămînînd în acest caz pur ionică.

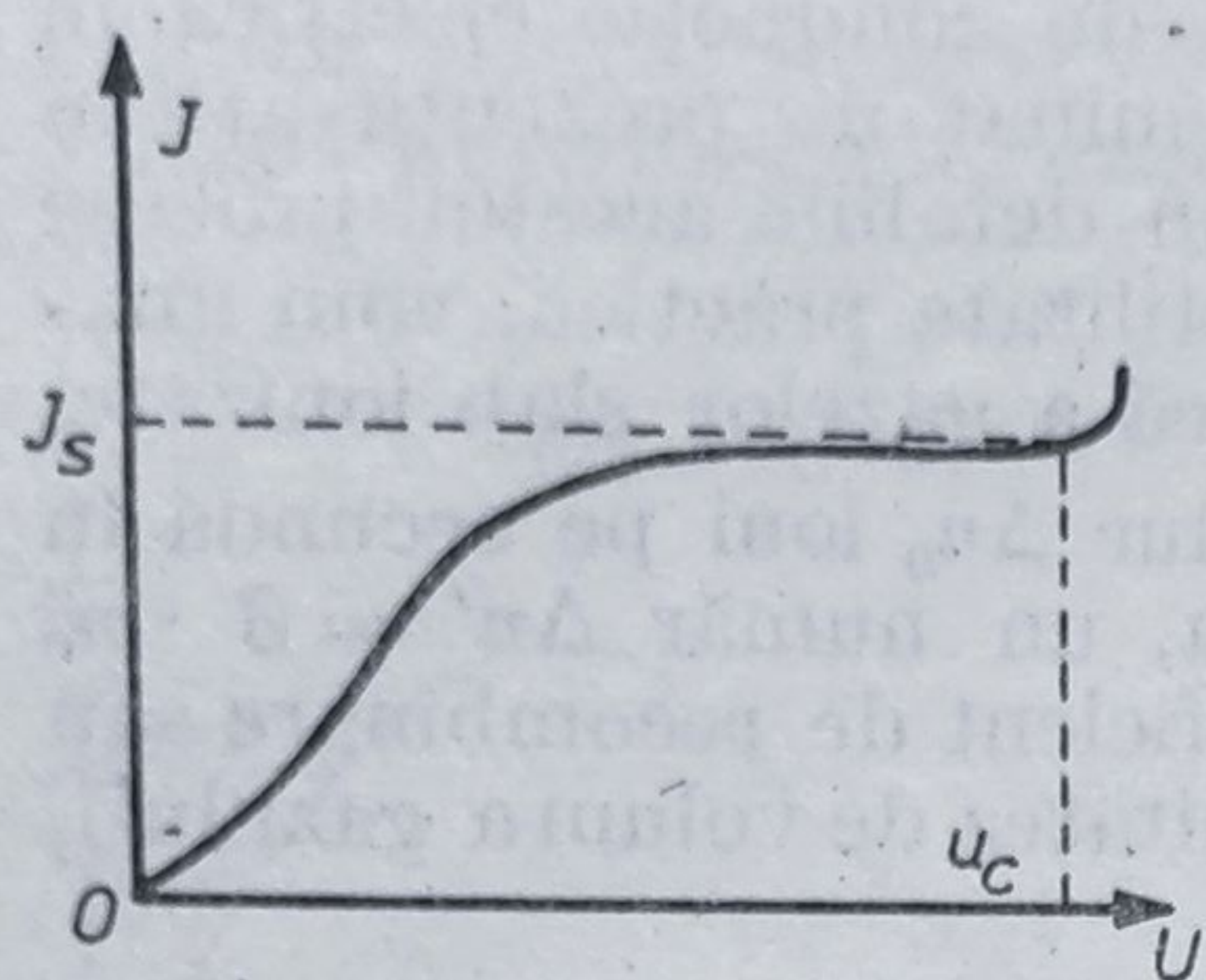


Fig. 6.7.7

c) *Conducția molionică*. Se observă în sisteme coloidale, sisteme formate din două faze, una dintre ele fiind formată din particule fin dispersate în cealaltă. Există soluții coloidale formate din metale (Cu, Ag, Au, Bi, Pt etc.), metaloizi (C, As, S, Te, Se etc.), din compuși ai acestora cum sînt hidroxidul de zinc și de aluminiu, acidul salicilic și acidul stanic etc., în care cele două faze (faza dispersată și mediul de dispersie) pot fi solide, lichide sau gazoase (vezi tabelul de mai jos). În general, faza dispersată este constituită din particule coloidale, cu dimensiuni și forme

geometrice diferite, care își păstrează uneori mult timp stabilitatea în mediul de dispersie, chiar și în situațiile în care densitatea diferă mult de la o fază

Mediul de dispersie	Faza dispersată	Exemple
solid	solid	sticle colorate cu Co, Au, Cu
solid	lichid	minerale cu incluziuni lichide
solid	gaz	minerale cu incluziuni gazoase
lichid	solid	suspensii coloidale
lichid	lichid	emulsii
lichid	gaz	spume
gaz	solid	aerosoli (fum, praf)
gaz	lichid	aerosoli (ceață)

a alta. Acest lucru se datorește structurii complexe a particulei coloidale. În figura 6.7.8 se prezintă schematic particula coloidală de hidroxid de fier ce se obține în clorură ferică. Se remarcă existența unui nucleu central

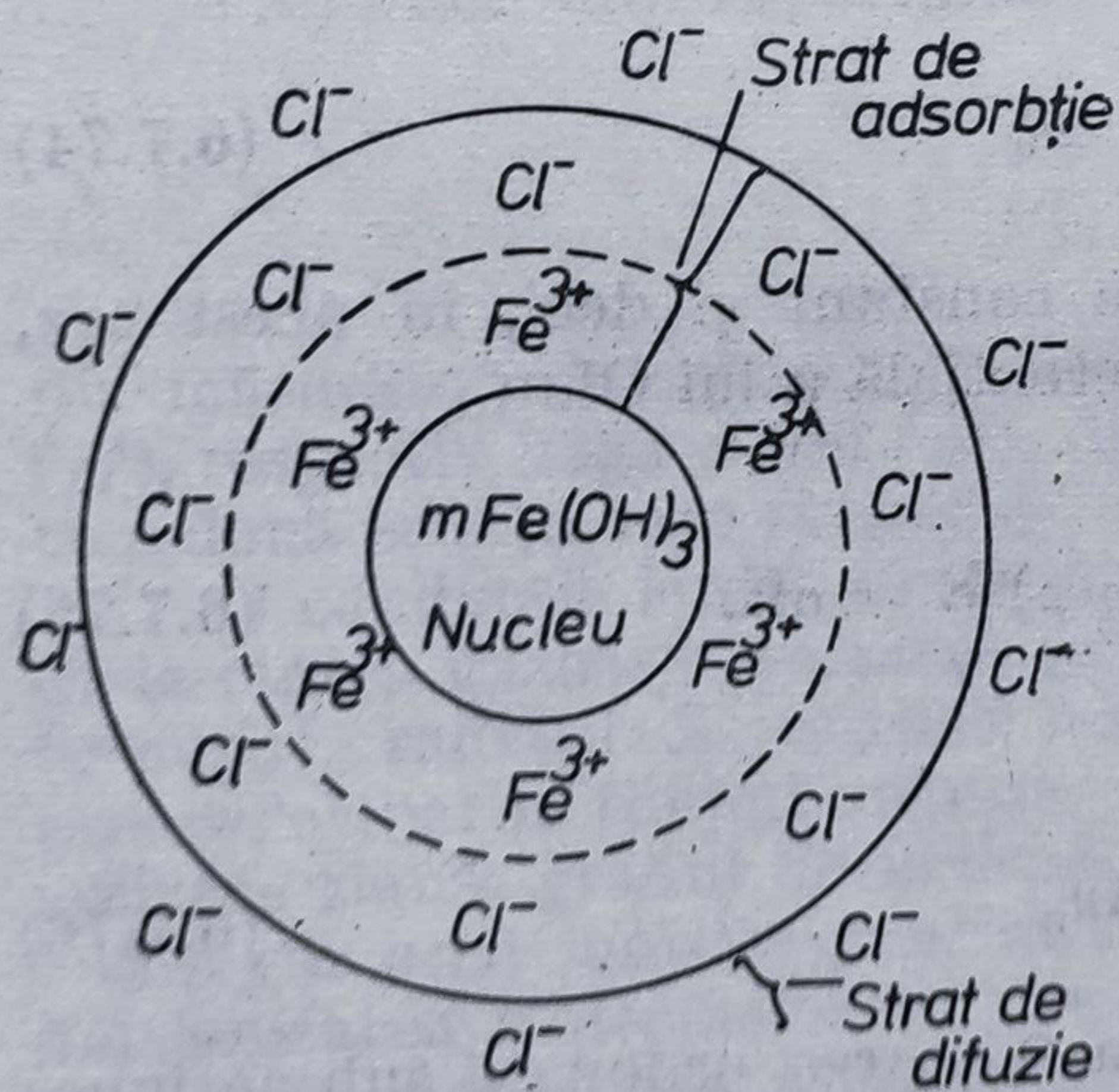


Fig. 6.7.8

neutru în care sînt aglomerate molecule neutre de  $Fe(OH)_3$ , legate între ele prin forțe de tip Van der Waals. În jurul lui ia naștere un strat dipolar electric, constituit din două părți și anume: stratul dublu de adsorbție a ionilor de clor, în care nu este neutralizată în întregime sarcina pozitivă a ionilor de  $Fe^{3+}$  și stratul difuz în care intră ioni de clor slab legați de restul particulei și care realizează neutralizarea ei electrică. Se poate spune deci că sarcina particulei coloidale (a molionului) este în acest caz pozitivă. În alte situații se obțin particule încărcate negativ. Datorită



respingerii electrostatice dintre ele și a mișcării browniene, aceste particule nu se depun (sedimentează) și nici nu se contopesc una cu alta (coagulează).

În prezența unui câmp electric de intensitate constantă, molionii vor fi antrenați într-o mișcare ordonată (spre anod sau catod, funcție de sarcina lor), luând astfel naștere un curent electric. Fenomenul este cunoscut sub numele de *electroforeză* (anaforeză când este vorba de molionii negativi și cataforeză în cazul celor pozitivi) și spre deosebire de *electroliză*, care este însoțită de reacții chimice la electrod, aici intervine doar neutralizarea electrică a particulelor fără formarea unor noi substanțe chimice. Acest fenomen oferă multiple aplicații practice (de exemplu, deshidratarea în câmp electric a materialelor, curățirea suprafețelor metalelor în medii coloidale sub acțiunea câmpului electric etc).

Experiența demonstrează că și în cazul conducției molionice rămâne valabilă legea diferențială a lui Ohm. În cazul emulsiilor, acest fapt poate fi explicat ușor; dacă se ține seama de prezența forțelor de frecare vâscoase care se opun acțiunii forțelor electrice. Întrucât primele sînt forțe de tip Stokes, dependente de viteză, de forma

$$F_f = -6\pi\eta r v \quad (6.7.77)$$

se ajunge la o mișcare staționară a particulelor în câmpul  $E = \text{const.}$  cu viteza

$$v = \frac{qE}{6\pi\eta r} \quad (6.7.78)$$

Pentru densitatea de curent electric  $J$  se obține expresia

$$J = n_0 q v = \sigma E \quad (6.7.79)$$

unde

$$\sigma = \frac{n_0 q^2}{6\pi\eta r} \quad (6.7.80)$$

reprezintă coeficientul de conductivitate molionică. Se remarcă dependența lui  $\sigma$  de mărimea particulelor coloidale ( $r$  fiind raza particulei presupusă de forma sferică) și de temperatura soluției (prin intermediul coeficientului de vîscozitate dinamică  $\eta$ ).

## § 6.8. REGIMUL STAȚIONAR AL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC (MAGNETOSTATICA)

Studiul regimului staționar al câmpului electromagnetic cuprinde și legile fundamentale ale magnetostaticii, respectiv legile fenomenelor magnetice pentru care sînt satisfăcute relațiile (6.7.1). În aceste condiții, din



ecuațiile lui Maxwell (6.2.39) și (6.2.41) se obțin următoarele legi diferențiale ale magnetostaticii

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \nabla \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}. \quad (6.8.1)$$

Prima dintre aceste relații ne arată că în cazul staționar cîmpul magnetic este de fapt un cîmp al interacțiunilor dintre curenții electrici staționari. Altfel spus, cîmpul magnetic apare ca efect al interacțiunii sarcinilor electrice aflate în mișcare relativă. Vom prezenta, în continuare, principalele fenomene și legi ale magnetostaticii, utilizînd în acest scop o metodologie similară celei folosite în studiul cîmpului electrostatic.

### 6.8.1. CÎMPUL MAGNETIC AL CURENȚILOR ÎN VID

Problema directă a magnetostaticii, în cazul curenților în vid, constă în găsirea inducției magnetice  $\mathbf{B}$ , respectiv a intensității  $\mathbf{H}$  a cîmpului considerînd densitatea de curent  $\mathbf{J}$  cunoscută. Această problemă ar reclama deci găsirea soluțiilor ecuațiilor (6.8.1) pentru cazul vidului. Nu vom urma însă această cale, ci vom căuta să aflăm intensitatea  $\mathbf{H}$  prin intermediul potențialului vector  $\mathbf{A}$ , întrucît așa cum s-a arătat în § 6.4, prin intermediul relației (6.4.1) din  $\mathbf{A}$  putem calcula univoc pe  $\mathbf{B}$ .

Am văzut că potențialul vector  $\mathbf{A}$  satisface ecuația Poisson (6.4.14). În cazul magnetostatic însă,  $\mathbf{A}$  satisface condiția  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ , astfel încît ecuația Poisson (6.4.14) se reduce, pentru vid, la forma

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.8.2)$$

Această ecuație este complet analogă, sub aspect matematic, cu ecuația (6.6.7) scrisă pentru potențialul scalar  $\phi$ . Atunci și soluția ecuației (6.8.2) trebuie să fie complet analogă cu soluția ecuației (6.6.7) — soluție care este dată de expresia (6.6.29) în cazul unei distribuții discrete de sarcină electrică și de (6.6.30) în cazul unei distribuții continue. Deci putem scrie că soluția ecuației (6.8.2) pentru o distribuție continuă de curenți este

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathcal{V}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.8.3)$$

Dacă dorim să ne referim la cazul unei distribuții discrete de sarcini punctuale, este necesar să facem cîteva precizări asupra modului cum trebuie interpretate în acest caz condițiile de staționaritate  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  și  $\nabla \mathbf{J} = 0$

(vezi relațiile (6.7.1) și (6.7.2)). Deoarece în cazul sarcinilor punctuale modificarea cantității de sarcină electrică conținută într-un element de volum dat nu are loc continuu, ci prin „salturi” (cîte un „salt” cu ocazia fiecărei intrări sau ieșiri a unei sarcini în volumul respectiv), condiția  $\nabla \mathbf{J} = 0$  este satisfăcută numai în medie, pe un interval de timp  $T$  mult mai mare



decît timpul mediu în care sarcinile se mișcă în volumul respectiv. Vom defini valoarea medie  $\langle f \rangle$  pe intervalul de timp  $T$  a unei funcții oarecare  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , de coordonatele și vitezele sarcinilor prin relația

$$\langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dt. \quad (6.8.4)$$

Această operație de mediere este comutativă cu operația de derivare în raport cu coordonatele spațiale. De aceea, dacă aplicăm operația de mediere (6.8.4) ecuației de continuitate (6.2.28), obținem

$$\frac{1}{T} \int_0^T \nabla \cdot \mathbf{J} dt = \nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{J} dt \right) = \nabla \cdot (\langle \mathbf{J} \rangle) = - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = \frac{\rho(T) - \rho(0)}{T}. \quad (6.8.5)$$

Pentru un sistem de sarcini în mișcare staționară mărimea  $\rho(T) - \rho(0)$  rămîne finită oricît de mare ar fi  $T$ . Atunci, dacă în (6.8.5) luăm pe  $T$  foarte mare (adică în calcule facem pe  $T \rightarrow \infty$ ) obținem, pentru valoarea medie a densității de curent relația

$$\nabla \cdot (\langle \mathbf{J} \rangle) = 0 \quad (6.8.6)$$

Condiția de tipul

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (6.8.7)$$

pe care o satisface în (6.8.5) densitatea volumică de sarcină se numește *condiție de staționaritate*. În consecință, se va numi *mișcare staționară* a sistemului de sarcini electrice acea mișcare în care toate mărimile fizice referitoare la sistem satisfac condiția de staționaritate (6.8.7).

Să revenim acum la problema calculării potențialului vector  $\mathbf{A}$  pentru o distribuție discretă de sarcină. În acest caz, din (6.8.3) prin înlocuirea mărimii continue  $\mathbf{J} d\mathcal{V}' = \rho d\mathcal{V}' = dQ \mathbf{v}$  cu mărimea discretă  $Q_i \mathbf{v}_i$  și a operației de integrare cu operația de însumare și, în plus, ținînd cont că în cazul distribuției discrete de sarcină trebuie să operăm cu valori medii în timp, definite în sensul relației (6.8.4), obținem

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{Q_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}. \quad (6.8.8)$$

Avînd expresia lui  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , putem calcula intensitatea cîmpului magnetic  $\mathbf{H}$ , folosînd relația (6.4.1). Din (6.8.3) și (6.8.8) se obține

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \times \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\mathcal{V}' \quad (6.8.9)$$



respectiv

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \nabla \times \left[ \frac{Q_i \mathbf{v}_i'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|} \right]. \quad (6.8.10)$$

Dacă în aceste relații ținem cont de relația vectorială  $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{a} + \varphi \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$ , de faptul că mărimile  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  și  $Q_i \mathbf{v}_i$  nu conțin variabila  $\mathbf{r}$  și deci nu sînt afectate de operațiile de derivare conținute în  $\nabla$ , precum și de faptul că

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

obținem

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (6.8.11)$$

respectiv

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{Q_i \mathbf{v}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i'|^3}. \quad (6.8.12)$$

Aceste două expresii dau intensitatea cîmpului magnetic pentru un sistem de sarcini aflat în mișcare relativă, cu distribuție continuă respectiv discretă a sarcinilor.

În cazul în care vorbim de mișcarea staționară a unui sistem de sarcini în interiorul unui conductor filiform, evident că  $\mathbf{J}$  este paralel cu elementul de arc  $ds$  în fiecare punct al conductorului și de aceea se poate scrie

$$\mathbf{J} dV = \mathbf{J} S ds = I ds. \quad (6.8.13)$$

Aici  $I$  reprezintă intensitatea curentului în conductor și este o mărime constantă în cazul curentului continuu. Atunci, din (6.8.11) obținem că intensitatea  $\mathbf{H}$  a cîmpului magnetic creat de un conductor filiform prin care circulă un curent continuu de intensitate  $I$  este dată de relația

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.8.14)$$

(integrala luîndu-se pe conturul reprezentat de conductor). Această relație este cunoscută sub denumirea de *legea Biot-Savart-Laplace*. Ea poate fi folosită la calculul intensității  $\mathbf{H}$  a cîmpului magnetic creat de curenții constanți, care circulă prin conductori filiformi de orice formă geometrică, așezați în vid. Să dăm cîteva exemple concrete:

a) Intensitatea cîmpului magnetic pe axa unui curent circular. Fie un curent constant, de intensitate  $I$ , care circulă printr-o spiră circulară de rază  $R$  (fig. 6.8.1). Vom calcula inten-



sitatea  $\mathbf{H}$  într-un punct  $P$  de pe axa spirei, situat la distanța  $z$  de centrul acesteia. Pentru aceasta, vom alege sistemul de referință cu originea  $O$  în centrul spirei și cu axa  $Oz$  orientată în lungul axei spirei. Datorită simetriei problemei, se vede că intensitatea  $\mathbf{H}$  creată de curentul din spirală va fi orientată după axa  $Oz$ , adică  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(0, 0, H_z)$ . Va trebui deci să calculăm, în (6.8.14), componenta  $z$  a vectorului  $d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . De pe figură se vede că avem

$$[d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]_z = ds' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin \theta \quad (6.8.15)$$

unde  $\theta = \arctg(R/z)$ . În plus, se pot scrie imediat relațiile

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}; \quad ds' = R d\varphi \quad (6.8.16)$$

$\varphi$  reprezentînd unghiul polar din planul spirei. Ținînd cont de aceste relații, din (6.8.14) prin integrare după unghiul  $\varphi$ , se obține expresia

$$H_z = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cdot R d\varphi}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{IR}{2(R^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \sin \theta \quad (6.8.17)$$

sau, întrucît  $\sin \theta = R/(R^2 + z^2)^{1/2}$ ,

$$H_z = \frac{IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (6.8.18)$$

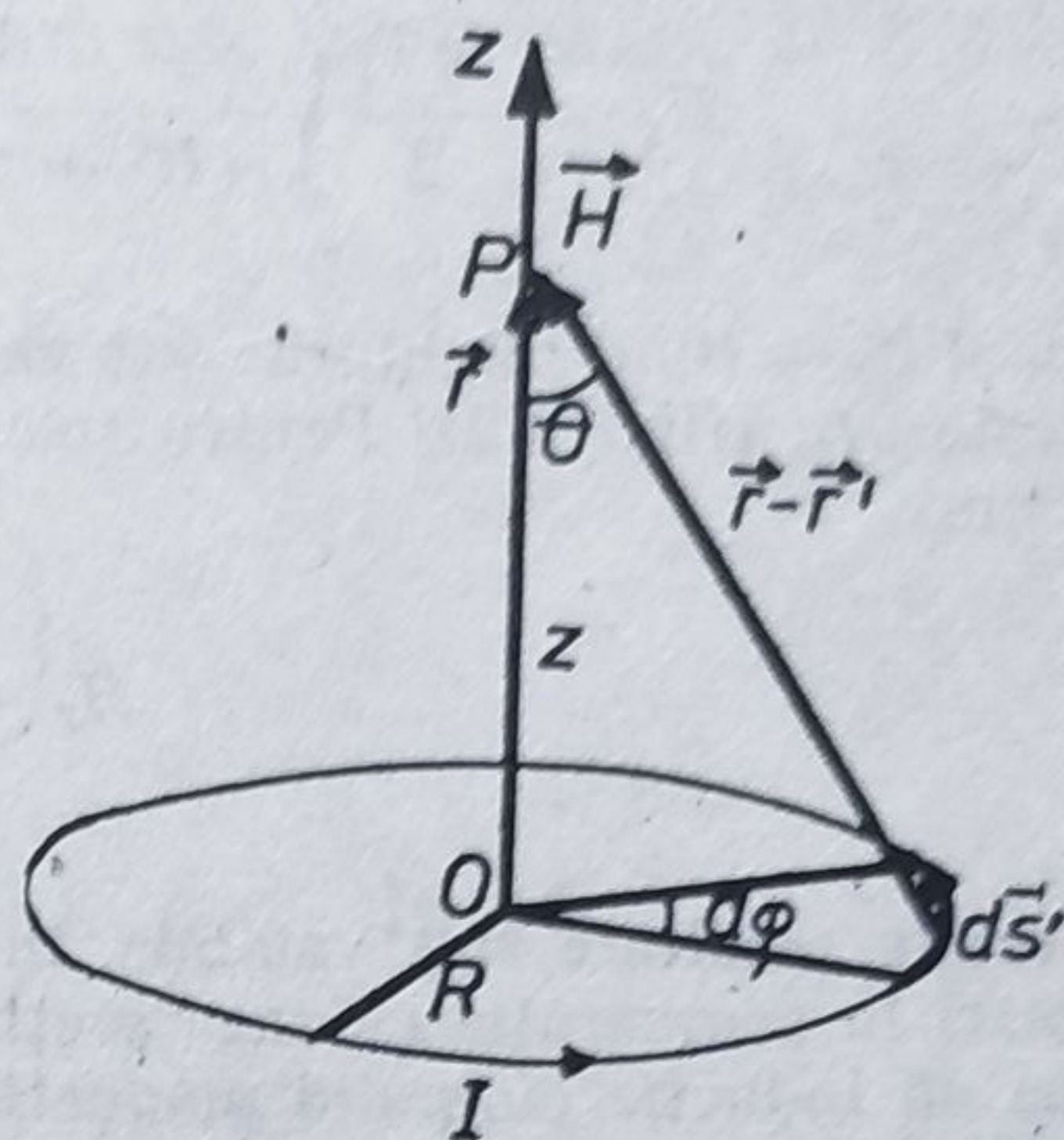


Fig. 6.8.1

Se observă că în punctul  $O$  intensitatea  $H_0$  a cîmpului creat, respectiv inducția magnetică  $B_0$  sînt date de expresiile

$$H_0 = \frac{I}{2R}; \quad B_0 = \mu_0 H_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (6.8.19)$$

rezultate bine cunoscute din cursurile elementare de fizică.

**b) Intensitatea cîmpului magnetic pe axa unei bobine solenoidale.** Fie o bobină cilindrică cu  $n = N/l$  spire pe unitatea de lungime, realizate din conductoare filiforme și fie  $I$  intensitatea curentului continuu ce străbate aceste spire (fig. 6.8.2). Vom alege o secțiune transver-

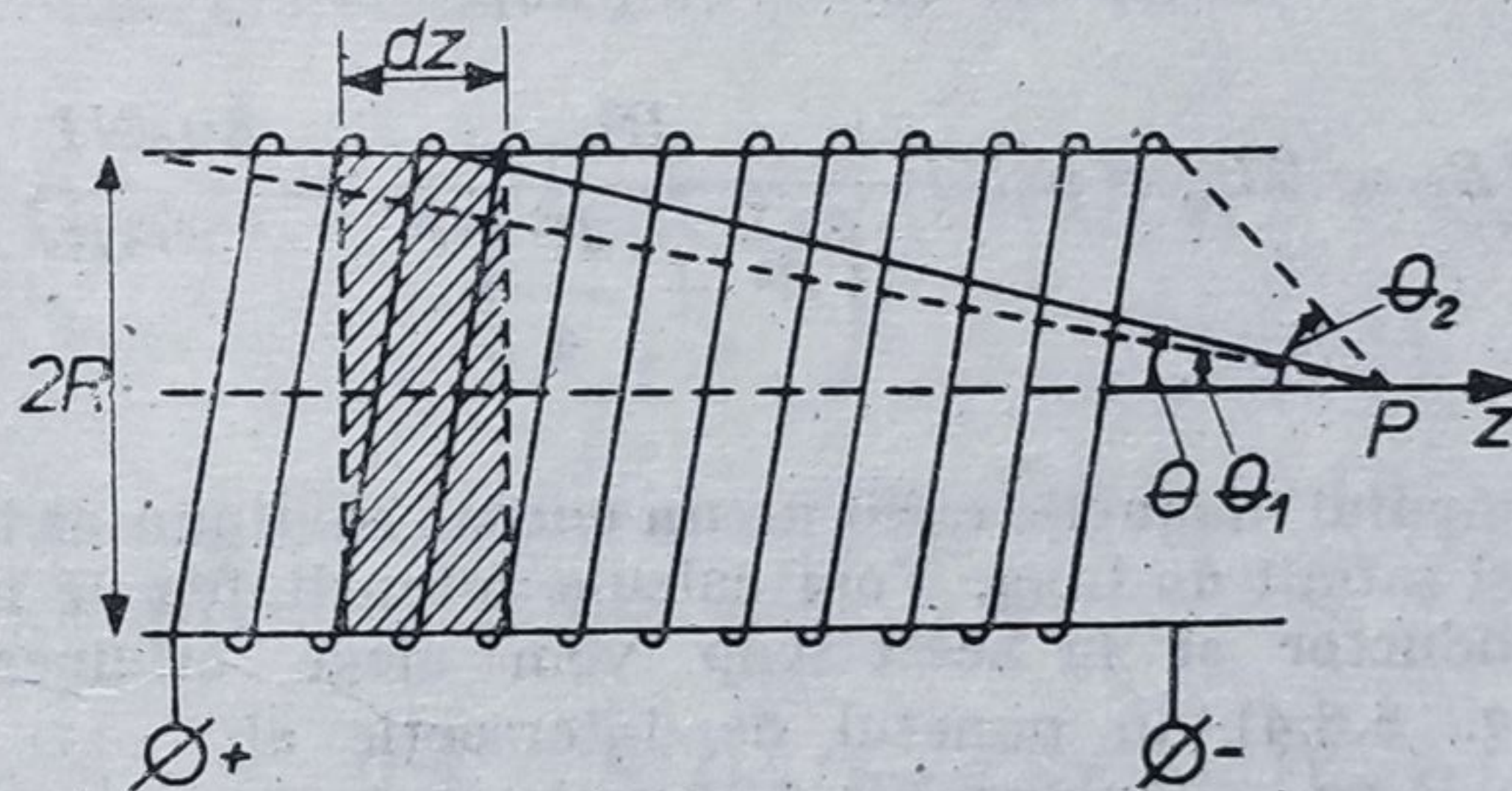


Fig. 6.8.2

sală din bobină, de lungime  $dz$ , care poate fi asemuită cu o spirală circulară prin care ar circula curentul

$$dI = Indz. \quad (6.8.20)$$

Intensitatea  $dH_z$ , pe axa bobinei și la distanța  $z$  de planul secțiunii, a cîmpului magnetic creat de acest curent va fi dată, potrivit relației (6.8.18), de expresia

$$dH_z = \frac{nI}{2} \frac{R^2 dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.8.21)$$



iar intensitatea  $H_z$  a cîmpului creat de întregul solenoid se va obține din (6.8.21) prin integrare în raport cu variabila  $z$ . Pentru o bobină solenoidală de lungime finită  $l$ , cu schimbarea de variabila  $z = R \operatorname{ctg} \theta$ , prin calcule simple rezultă

$$H_z = \frac{nT}{2} \int \frac{R^2 dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cdot d\theta = \frac{nI}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (6.8.22)$$

$\theta_1$  și  $\theta_2$  — fiind unghiurile sub care se văd capetele solenoidului din punctul  $P$  în care se socrutește  $H_z$ , (fig. 6.8.2). Pentru solenoizi infinit de lungi, luînd în (6.8.22)  $\theta_1 = 0$ , și  $\theta_2 = \pi$ , obținem

$$H_z = nI = \frac{NI}{l}; \quad B_z = \mu_0 H_z = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (6.8.23)$$

Aceste rezultate sînt valabile, în prima aproximație și pentru bobinele solenoidale de lungimi mari în comparație cu raza secțiunii lor transversale. Trebuie reținut însă că expresia (6.8.23) ne dă inducția cîmpului magnetic numai pe axa bobinei solenoidale. Se poate arăta că  $B$  nu este constant în planul secțiunii transversale a solenoidului, deci cîmpul magnetic creat de către solenoid nu este omogen [52].

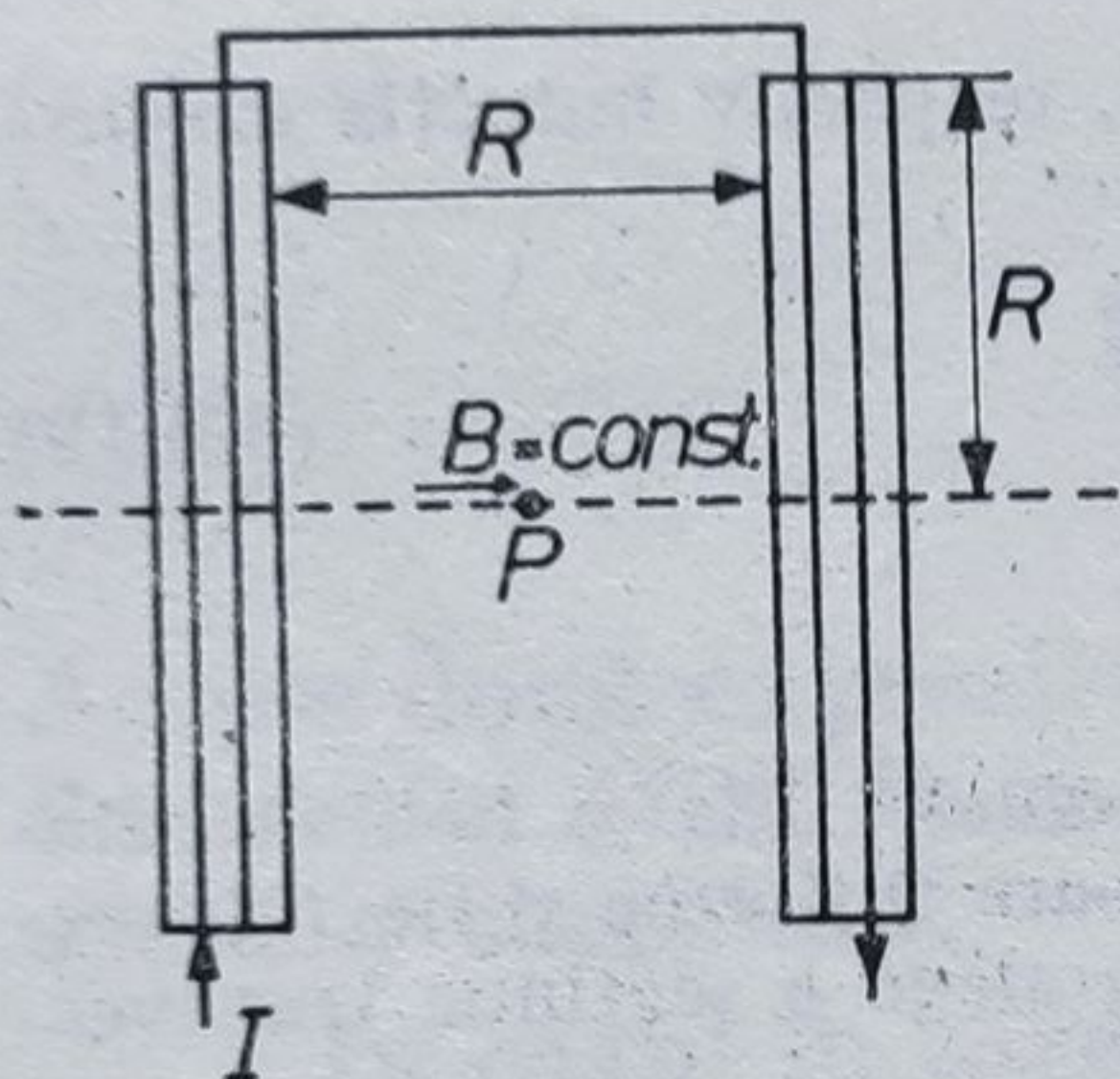


Fig. 6.8.3

Un cîmp magnetic de inducție  $B$  aproape constantă se poate obține cu ajutorul a două bobine circulare identice, coaxiale și așezate la o distanță una de alta egală cu raza lor (fig. 6.8.3). Un astfel de sistem de bobine este cunoscut sub denumirea de bobine Helmholtz. Ele sînt mult folosite în măsurători magnetice de laborator, dacă aceste măsurători nu necesită cîmpuri de intensități foarte mari. (Acestea din urmă pot fi realizate cu bobine Helmholtz supraconductoare). Inducția magnetică a cîmpului creat de către o bobină Helmholtz se obține ușor din rezultatele înregistrate mai sus. Astfel, folosind relația (6.8.18), găsim pentru inducția magnetică în punctul  $P$ , situat pe axa celor două bobine, la jumătatea distanței dintre ele ( $z = R/2$ ), expresia

$$B_P = 2B_z = \mu_0 NI \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{8\mu_0 NI}{5^{3/2} R}. \quad (6.8.24)$$

**c) Intensitatea cîmpului magnetic creat de un curent continuu de intensitate  $I$ , ce străbate un conductor rectiliniu și infinit de lung.** Vom calcula intensitatea  $H$  într-un punct  $P$  situat la distanța  $r$  de conductor și în acest scop vom alege originea sistemului de referință pe conductor (fig. 6.8.4), în punctul de intersecție al perpendicularei duse din  $P$  pe conductor. Fie  $ds$  un element de curent situat la distanța  $r' = s$  de  $O$ . Atunci, observînd că liniile cîmpului  $H$  sînt cercuri concentrice cu centrul în  $O$ , situate într-un plan perpendicular pe conductor, putem scrie

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 \theta ds}{r^2} \quad (6.8.25)$$

sau cu schimbarea de variabila  $s = d \operatorname{tg} \theta$  și deci:  $ds = d \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$$H = 2 \frac{I}{4\pi d} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{I}{2\pi d}. \quad (6.8.26)$$

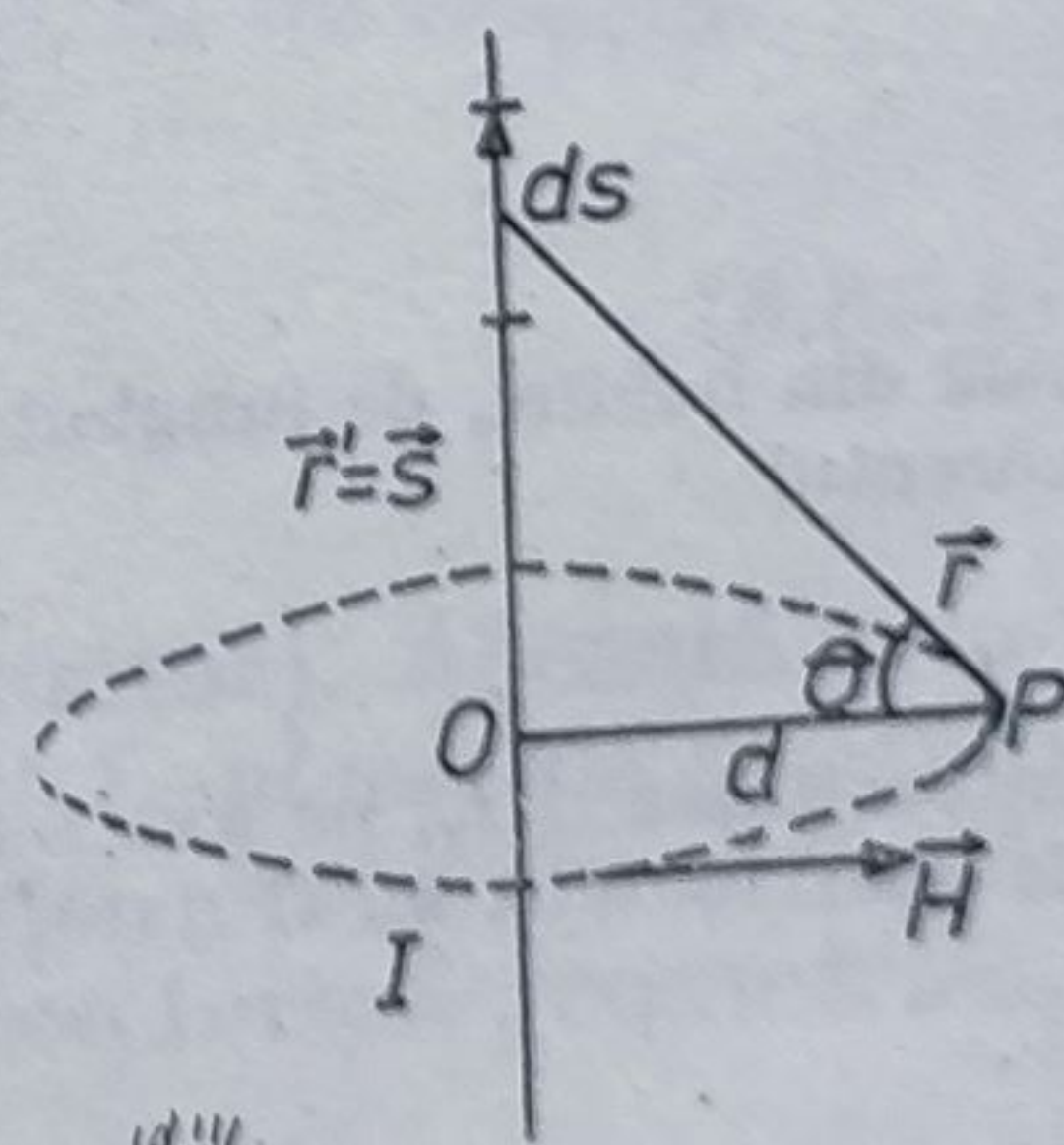


Fig. 6.8.4



Să revenim acum la problema generală a determinării potențialului vector  $\mathbf{A}$ , creat de un sistem de sarcini în mișcare staționară și să calculăm valoarea lui în puncte situate la distanțe mari în comparație cu dimensiunile liniare ale volumului ocupat de sarcini. În aceste cazuri, întrucât

$$|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'_i| \quad (6.8.27)$$

este justificată aproximația (6.6.33) și putem scrie

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i}{r^2} \right). \quad (6.8.28)$$

În această aproximație, potențialul vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , dat de (6.8.8), se va scrie sub forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\langle \sum_i \frac{Q_i \mathbf{v}'_i}{r} \right\rangle + \frac{\mu_0}{4\pi} \left\langle \sum_i \frac{Q_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{v}'_i}{r^3} \right\rangle \quad (6.8.29)$$

valoarea medie intervenind datorită condiției de staționaritate. Primul termen din această relație va fi însă nul, în conformitate cu (6.8.7), pentru că se presupune că mișcarea sarcinilor  $Q_i$  este staționară și deci

$$\left\langle \sum_i Q_i \mathbf{v}'_i \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left( \sum_i Q_i \mathbf{r}'_i \right) \right\rangle = 0. \quad (6.8.30)$$

Al doilea termen din (6.8.29) poate fi transformat, dacă se ține cont tot de (6.8.7) și de relația evidentă

$$0 = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_i Q_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{r}'_i \right\rangle = \left\langle \sum_i Q_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i) \mathbf{v}'_i \right\rangle + \left\langle \sum_i Q_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'_i) \cdot \mathbf{r}'_i \right\rangle. \quad (6.8.31)$$

Atunci avînd în vedere și relația vectorială :  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , din (6.8.29) se obține

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\langle \sum_i Q_i [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'_i) \mathbf{r}'_i - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i) \mathbf{v}'_i] \right\rangle. \quad (6.8.32)$$

Dacă se introduce mărimea

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i Q_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \right\rangle \quad (6.8.33)$$

numită *moment magnetic* al sistemului de sarcini, expresia lui  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  se transcrie în forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{m} \right) \quad (6.8.34)$$



sau în forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{m} \right] \quad (6.8.35)$$

întrucît  $\mathbf{r}/r^3 = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right)$ . Atunci, pentru inducția magnetică  $\mathbf{B}$ , conform cu (6.4.1), obținem

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{m} \right]. \quad (6.8.36)$$

Vom transforma expresia din membrul doi, ținând cont de relația vectorială

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}), \quad (6.8.37)$$

de faptul că  $\mathbf{m}$  nu depinde de  $\mathbf{r}$  și deci nu este afectat de operatorul  $\nabla$  și de relația  $\nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) = \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ . Obținem

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.8.38)$$

Efectuînd în această relație calculele indicate de operatorul  $\nabla$  se obține pentru inducția magnetică  $\mathbf{B}$  expresia

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - r^2 \cdot \mathbf{m}}{r^5}. \quad (6.8.39)$$

Aceasta este inducția magnetică a sistemului de sarcini, în aproximația de dipol magnetic.

Se remarcă faptul că expresia (6.8.39) a inducției magnetice este analogă cu expresia (6.6.44) a cîmpului electric a unui sistem de sarcini în aproximația de dipol electric. Rezultă deci că există o analogie matematică completă între dipolul magnetic și dipolul electric. Bazîndu-ne pe această analogie putem spune că pentru un dipol magnetic plasat într-un cîmp magnetic exterior, energia lui, forța ponderomotoare și momentul cuplului care acționează asupra lui trebuie să aibă expresii matematice similare cu energia, forța ponderomotoare și cuplul pentru un dipol electric plasat într-un cîmp electric exterior. Atunci, prin analogie cu relațiile (6.6.73), (6.6.78) și respectiv (6.6.81), putem scrie că energia, forța ponderomotoare și respectiv momentul cuplului pentru un dipol magnetic plasat într-un cîmp magnetic extern sînt date de expresiile

$$W_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{ext} \quad (6.8.40)$$

$$\mathbf{F}_{pm} = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext} \quad (6.8.41)$$

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}. \quad (6.8.42)$$



Din (6.8.41) se vede că în cazul câmpurilor magnetice omogene (pentru care avem  $\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} = 0$ ,  $\{\alpha\}, \{\beta\} = \{x, y, z\}$ ) forța ponderomotoare ce acționează asupra dipolului magnetic este nulă. Situația aceasta este complet analoagă cu situația dipolului electric în câmp electric omogen.

Este interesant de remarcat că dacă sarcinile din sistem sînt purtate de particule identice, atunci există o legătură simplă între momentul magnetic al sistemului și momentul lui cinetic total. Într-adevăr, dacă se consideră că este vorba de particule identice de masă  $m_0$  și sarcină  $q$ , atunci din (6.8.34) obținem

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_0} \langle \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_0 \mathbf{v}'_i \rangle = \frac{q}{2m_0} \langle \sum_i \mathbf{L}_i \rangle = \frac{q}{2m_0} \mathbf{L} \quad (6.8.43)$$

unde  $\mathbf{p}_i = m_0 \mathbf{v}'_i$  și  $\mathbf{L}_i$  sînt impulsul și momentul cinetic al particulei  $i$ , iar  $\mathbf{L}$  este momentul cinetic total al sistemului de particule. Relația (6.8.43) ne arată că fenomenele de magnetizare sînt însoțite de fenomene cinetice, iar determinarea raportului

$$\gamma = \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} = \frac{q}{2m_0} \quad (6.8.44)$$

numit și *factor giromagnetic* a jucat un rol esențial nu numai în studiul fenomenelor de magnetizare, ci și al particulelor elementare.

O expresie interesantă se obține pentru momentul magnetic  $\mathbf{m}$  în cazul în care particulele se mișcă staționar pe o traiectorie închisă plană. În acest caz

$$\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = 2 \frac{d\mathbf{S}}{dt} \quad (6.8.45)$$

unde  $\mathbf{S}$  este un vector perpendicular pe suprafața delimitată de traiectoria particulei și al cărui modul  $|\mathbf{S}|$  este aria acestei suprafețe, iar intervalul de timp  $T$  pe care se face medierea în sensul relației (6.8.4) poate fi ales egal cu perioada de rotație a particulelor (mișcarea fiind staționară toate particulele au aceeași perioadă de rotație). Atunci, din (6.8.33) și ținînd cont de (6.8.45), obținem

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \frac{1}{T} \int_0^T 2 \frac{d\mathbf{S}}{dt} dt = \frac{\sum Q_i}{T} \mathbf{S} = I \mathbf{S} \quad (6.8.46)$$

unde  $I = Q/T$  este intensitatea curentului generat de mișcarea staționară a sistemului de sarcini.

### 6.8.2. CÂMPUL MAGNETIC ÎN PREZENȚA SUBSTANȚEI

Experiența arată că un câmp magnetic static suferă modificări la introducerea în el a unor corpuri, la fel cum un câmp electrostatic suferă modificări în prezența dielectricilor. Se numesc *substanțe magnetice* acele



substanțe care au proprietatea de a influența câmpul magnetostatic al curenților continui. Procesul pe care astfel de substanțe îl suferă în prezența câmpului magnetostatic se numește *magnetizare*. Se constată că magnetizarea corpurilor poate fi *temporară* (se manifestă atîta timp cît corpul este supus acțiunii câmpului magnetic exterior) și *permanentă* (se manifestă și după dispariția câmpului magnetic exterior).

Studiul proprietăților magnetice ale substanțelor și studiul proceselor de magnetizare se pot face prin analogie cu studiul proprietăților dielectrice și a proceselor de polarizare electrică (vezi § 6.5.4 și § 6.5.5). Astfel, în cadrul unei tratări macroscopice se admite că magnetismul este determinat de prezența în substanțele magnetice a unor sarcini electrice în mișcare staționară, care determină curenți de intensitate constantă. Este vorba de existența unor curenți electrici la nivel molecular, atomic sau chiar subatomic pe care o să-i numim *curenți legați* pentru a păstra analogia cu noțiunea de sarcină legată din cazul substanțelor dielectrice. Acestor curenți legați li se pot atașa momente magnetice  $\mathbf{m}_i$ , în conformitate cu relația (6.8.46). Atunci, procesul de magnetizare va consta în acțiunea de orientare pe direcția câmpului exterior  $\mathbf{H}$  a acestor momente magnetice.

Astăzi se știe că de fapt proprietățile magnetice ale substanțelor își au originea în mișcările orbitale și de spin ale electronilor și nucleonilor, însă folosind „modelul curenților legați” se poate obține o descriere mai simplă (măcar în prima aproximație) a proprietăților magnetice macroscopice ale substanțelor, decît descrierea aceluiași proprietăți pe baza mișcărilor orbitale și de spin ale electronilor și nucleonilor din interiorul atomilor substanței respective. De aceea, în continuare va fi prezentată o descriere a unor proprietăți magnetice macroscopice ale substanțelor bazată pe modelul curenților legați. În primul rînd, se vor obține legile de material ale câmpului magnetostatic, în care scop vom generaliza ecuația (6.2.39) în așa fel încît în această ecuație să fie cuprinși și curenții legați.

Starea de magnetizare a substanțelor la nivel macroscopic este descrisă prin vectorul magnetizare  $\mathbf{M}$  (sau magnetizarea  $\mathbf{M}$ ), definit ca una vectorială a momentelor magnetice  $\mathbf{m}_i$  din unitatea de volum

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i. \quad (6.8.47)$$

În cazul unui corp magnetizat uniform ( $\mathbf{M} = \text{const.}$ ), se vede că magnetizarea joacă rolul de densitate volumică de moment magnetic, pentru că se poate scrie

$$\mathbf{m} = \iiint \mathbf{M} dV. \quad (6.8.48)$$

Prin definiție însă (vezi (6.8.33)), momentul magnetic al corpului va fi determinat de distribuția sarcinilor electrice  $Q_i$ , în mișcarea lor staționară, respectiv de curenții legați de densitate  $\mathbf{J}_{leg} = \rho \mathbf{v}$ . Făcînd în (6.8.33) echivalența  $Q_i \mathbf{v}_i \rightarrow \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{J}_{leg} dV$ , obținem

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{leg}) dV. \quad (6.8.49)$$



Rezultă din (6.8.48) că vectorul magnetizare  $\mathbf{M}$  este determinat de densitatea  $\mathbf{J}_{leg}$  a curenților legați. Pentru a stabili relația dintre aceste două mărimi, se observă că există identitatea

$$\iiint \mathbf{M} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})] d\mathcal{V}. \quad (6.8.50)$$

Într-adevăr, scriind această relație în coordonate carteziene, componenta după axa  $Ox$  a membrului doi are forma

$$\begin{aligned} & \iiint [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})]_x dx dy dz = \\ & \iiint \left[ y \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (6.8.51)$$

Dacă se integrează prin părți și se ține cont de faptul că pe frontiera corpului magnetic toate componentele lui  $\mathbf{M}$  sînt nule, se obține

$$\begin{aligned} & \iiint \left[ y \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \right] dx dy dz = \\ & = - \iiint \left( y \frac{\partial M_x}{\partial y} + z \frac{\partial M_x}{\partial z} \right) dx dy dz = 2 \iiint M_x dx dy dz \end{aligned}$$

Atunci egalînd (6.8.50) cu (6.8.49) se găsește că pentru regimul staționar

$$\mathbf{J}_{leg} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (6.8.52)$$

Vom scrie, folosind acest rezultat, în formă generalizată (pentru a cuprinde și curenții legați) prima ecuație (6.8.1) astfel

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{leg}. \quad (6.8.53)$$

Înlocuind aici pe  $\mathbf{J}$  din (6.8.1) și pe  $\mathbf{J}_{leg}$  din (6.8.52), obținem

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}$$

sau

$$\nabla \times [\mathbf{B} - \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})] = 0. \quad (6.8.54)$$

Această relație este satisfăcută numai dacă

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (6.8.55)$$



Uneori, această relație se mai scrie și sub forma

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{I}. \quad (6.8.56)$$

Aici s-a notat

$$\mathbf{I} = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (6.8.57)$$

așa numita *polarizare magnetică* (sau intensitate de magnetizare). Sub forma (6.8.56), relația care leagă inducția cîmpului magnetic în prezența substanței magnetice, de intensitatea cîmpului exterior  $\mathbf{H}$  (cîmp creat de curenții de conducție) este complet analogă relației (6.6.124), care exprimă legătura între inducția electrică  $\mathbf{D}$  și cîmpul exterior  $\mathbf{E}$  în prezența unor substanțe dielectrice.

Experiența arată că pentru multe medii izotrope din punct de vedere magnetic, situate în cîmpuri magnetice nu prea intense, vectorul  $\mathbf{M}$  este proporțional cu intensitatea cîmpului magnetizant  $\mathbf{H}$ . Pentru astfel de medii se poate scrie

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.8.58)$$

unde mărimea  $\chi_m$ , numită *susceptivitate magnetică*, este o constantă de material care depinde, în general, de temperatură. În cazul substanțelor anizotrope din punct de vedere magnetic, cum sînt de exemplu cristalele cu proprietăți magnetice, magnetizarea  $\mathbf{M}$  depinde atît de intensitatea cîmpului magnetizant cît și de orientările lui  $\mathbf{M}$  și  $\mathbf{H}$  în raport cu axele cristalografice. Atunci, pentru astfel de substanțe, în aproximația liniară, se poate scrie

$$M_\alpha = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta} H_\beta; \quad \{\alpha\}, \{\beta\} = \{x, y, z\} \quad (6.8.59)$$

unde  $(\chi_{\alpha\beta})$  reprezintă tensorul susceptivității magnetice.

Cînd cîmpul magnetizant  $\mathbf{H}$  este mare, comportarea multor substanțe devine neliniară și legătura între  $\mathbf{M}$  și  $\mathbf{H}$  nu mai este dată prin funcții liniare de forma (6.8.58) și (6.8.59), ci prin funcții mai generale, neliniare, de forma

$$\mathbf{M} = f(\mathbf{H}). \quad (6.8.60)$$

Studiul proprietăților magnetice ale substanțelor în astfel de situații formează obiectul electrodinamicii neliniare.

Revenind la mediile cu comportare liniară și izotropă din punct de vedere magnetic, observăm din (6.8.55) și (6.8.58) că putem scrie

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}; \quad (6.8.61)$$

$\mu_r$  se numește *permitivitate magnetică relativă*. Experiența arată că există atît substanțe cu  $\mu_r < 1$ , cît și substanțe cu  $\mu_r > 1$  (respectiv  $\chi_m \geq 0$ ). Substanțele pentru care  $\mu_r \lesssim 1$  ( $\chi_m \simeq -10^{-9} \text{ m}^3/\text{kmol}$ ) se numesc *diamagnetice*. În cîmp magnetic exterior, ele se magnetizează prin inducție (vezi § 6.8.4) în sens invers cîmpului exterior. Substanțele pentru care  $\mu_r \gtrsim 1$  ( $\chi_m \simeq 10^{-7} \div 10^{-9} \text{ m}^3/\text{kmol}$ ) se numesc *paramagnetice*, iar cele pentru



care  $\mu > 1$ , se numesc substanțe cu *ordonare magnetică*. (În această clasă intră substanțele feromagnetice, antiferomagnetice, ferimagnetice și cele cu ordonare elicoidală.) În tabelul de mai jos sînt date valorile lui  $\mu_r$  pentru cîteva substanțe magnetice.

Substanța	Bi	Ag	Al	Pb	Co	Ni	Fe	Permalloy	Supermalloy
$\mu_r$	0,99983	0,99998	1,00002	1,00008	250	600	5000 (max)	$10^5$ (max)	$10^6$ (max)

Experimental au fost stabilite caracteristicile distinctive ale celor trei mari clase de substanțe magnetice. Astfel, la substanțele diamagnetice și paramagnetice susceptivitatea  $\chi_m$  nu depinde de cîmpul magnetizant  $H$ ; de regulă, la paramagnetice susceptivitatea  $\chi_m$  scade cu creșterea temperaturii, în timp ce la diamagnetice  $\chi_m$  nu este influențată de temperatură. În cazul substanțelor cu ordonare magnetică se înregistrează o puternică dependentă a susceptivității magnetice  $\chi_m$  de cîmpului  $H$ , această stare apărînd numai sub o temperatură critică  $T_c$ . De exemplu, legătura între  $M$  și  $H$  la aceste substanțe nu mai este liniară, ci mult mai complicată, reprezentată printr-o curbă de histereză (fig. 6.8.5). Se remarcă de pe figură că la o variație ciclică a cîmpului magnetizant  $H$ , magnetizarea  $M$  se schimbă în așa fel încît în planul  $H - M$ , dependentă lui  $M$  de  $H$  descrie o buclă numită și curbă de histerezis. În cîmpuri de intensități  $H$  ridicate, magnetizarea  $M$  atinge o valoare de saturație  $M_s$ , iar pentru  $H = 0$ , magnetizarea corpului nu se anulează, ci rămîne la o anumită valoare  $M_r$ , numită *magnetizare remanentă*. Magnetizarea corpului se poate anula numai dacă i se aplică acestuia un cîmp magnetic exterior, de sens invers și de o anumită valoare  $H_c$ , numit *cîmp coercitiv*. În sfîrșit, intervine și aici un proces de primă magnetizare, analog celui întîlnit în cazul dielectricilor feroelectrici. Înainte, însă, de a prezenta un studiu clasic de detaliu al proceselor de magnetizare la diverse categorii de substanțe magnetice, vom face cîteva considerațiuni asupra energiei cîmpului magnetostatic și a forțelor ponderomotore ce se pot naște într-un astfel de cîmp.

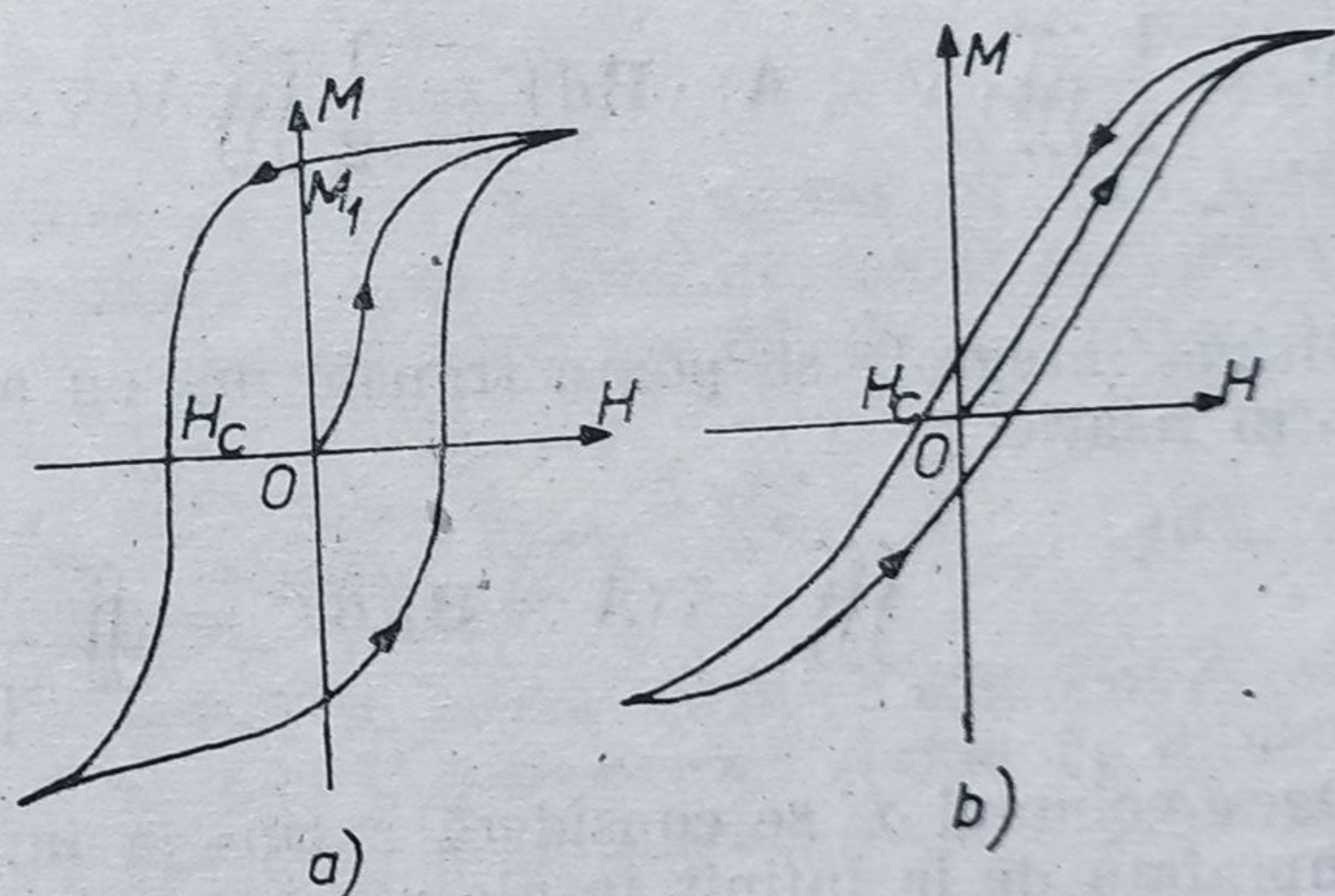


Fig. 6.8.5



### 6.8.3. ENERGIA CÎMPULUI MAGNETOSTATIC ȘI FORȚE PONDEROMOTOARE ÎN CÎMPUL MAGNETOSTATIC

Expresia care ne dă energia unui câmp magnetostatic se poate obține din relația (6.3.16), (care reprezintă energia câmpului electromagnetic), prin particularizarea la cazul câmpului magnetostatic. Se va obține, evident

$$W_B = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V}. \quad (6.8.62)$$

Dacă câmpul magnetostatic are o energie distribuită continuu în spațiu, atunci se va defini o densitate volumetrică de energie, prin expresia

$$w_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (6.8.63)$$

Vom nota că energia  $W_B$  a câmpului magnetostatic este echivalentă cu energia de interacțiune a curenților staționari care îl crează. (Analog s-a demonstrat în § 6.6.1 că energia câmpului electrostatic este echivalentă cu energia de interacțiune a sarcinilor electrice care îl crează.) Într-adevăr ținând cont că  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  și folosind relația vectorială  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})$ , din (6.8.62) obținem

$$W_B = \frac{1}{2} \iiint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{H}) d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \iiint \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathcal{V}. \quad (6.8.64)$$

Ultima integrală se poate transforma cu ajutorul teoremei Gauss, conform relației

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathcal{V} = \iint_{(S)} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.8.65)$$

Dacă volumul  $\mathcal{V}$  se consideră extins la infinit, atunci suprafața  $S$  este suprafața de la infinit în ale cărei puncte  $\mathbf{A} \rightarrow 0$ . Aceasta înseamnă că integrala (6.8.65) se anulează. Atunci, ținând cont că  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , din (6.8.64) se obține

$$W_B = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V} \quad (6.8.66)$$

unde integrarea se face pe tot volumul conductorului prin care circulă curentul  $\mathbf{J}$ . Dacă se consideră că există mai mulți curenți  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots$  aceștia crează câmpuri magnetice proprii caracterizate prin potențialele  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$



Atunci, conform cu (6.8.66), energia curenului  $\mathbf{J}_i$  în câmpul creat de curen-  
tul  $\mathbf{J}_k$  va fi dată de relația

$$W_B = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{J}_i d\mathcal{V}_i \quad (6.8.67)$$

unde integrarea se va face pe volumul conductorului parcurs de curenul  $\mathbf{J}_i$ .  
Din ultima relație se vede că energia totală a sistemului de curenți  
 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots$ , în câmpul lor propriu este dată de relația

$$W_B = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \iiint \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{J}_i d\mathcal{V}_i. \quad (6.8.68)$$

Dar această expresie reprezintă tocmai energia de interacțiune a siste-  
mului de curenți. Faptul că (6.8.68) reprezintă energia de interacțiune a  
sistemului de curenți reiese și din aceea că, după cum s-a menționat mai  
sus, magnetostatica este analoagă electrostaticii: mărimile  $\mathbf{A}$  și  $\mathbf{J}$  din  
magnetostatică corespund mărimilor  $\varphi$  și  $\rho$  din electrostatică. Atunci,  
relația (6.8.68) este analogul magnetostatic al energiei de interacțiune  
(6.6.65) din electrostatică. Echivalența dovedită mai sus, între energia  
de interacțiune a curenților staționari și energia câmpului magnetostatic  
creat de ei, comportă o discuție similară cu echivalența dintre energia de  
interacțiune a unui sistem de sarcini și energia câmpului electrostatic creat  
de ele (vezi § 6.6.1).

Astfel, ținând cont că potențialul  $\mathbf{A}_k$  este creat de curenul  $\mathbf{J}_k$  conform  
cu (6.8.3), putem scrie

$$\mathbf{A}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}_k d\mathcal{V}_k}{r_{ik}} \quad (6.8.69)$$

unde  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  și reprezintă distanța între punctul  $\mathbf{r}_k$ , unde luăm  
elementul de integrare  $d\mathcal{V}_k$  și punctul  $\mathbf{r}_i$ , unde calculăm valoarea potenția-  
lului  $\mathbf{A}_k$ . Atunci, din (6.8.68) se obține pentru energia de interacțiune a  
sistemului de curenți, expresia

$$W_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{V}_i)} d\mathcal{V}_i \iiint_{(\mathcal{V}_k)} d\mathcal{V}_k \frac{\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_k}{r_{ik}}. \quad (6.8.70)$$

În general, calculul concret al energiei de interacțiune cu ajutorul expre-  
siilor (6.8.67) și (6.8.70) este o problemă matematică destul de dificilă.  
În cazul conductoarelor metalice care formează bucle închise, însă, problema  
se simplifică întrucâtva. În acest caz se poate scrie

$$\mathbf{J}_i d\mathcal{V}_i = I_i ds_i \quad (6.8.71)$$

unde  $I_i$  este intensitatea curenului prin conductor, iar  $ds_i$  elementul de  
arc al curbei reprezentate de conductor. Atunci, din (6.8.68) avem

$$\begin{aligned} W_B &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_i \oint_{(\Gamma_i)} \mathbf{A}_k ds_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_i \iint_{(S_i)} \nabla \times \mathbf{A}_k d\mathbf{S}_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_i \iint_{(S_i)} \mathbf{B}_k d\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Phi_{ki} I_i \end{aligned} \quad (6.8.72)$$



unde  $\Phi_{ki}$ , definit de aceste relații, reprezintă fluxul cîmpului magnetic creat de curentul  $I_k$  printr-o suprafață ce se sprijină pe conturul  $(\Gamma_i)$  prin care circulă curentul  $I_i$ . După cum se vede din relația (6.8.72) mărimile  $\Phi_{ki}$  se scriu sub forma

$$\Phi_{ki} = \oint_{(\Gamma_i)} \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (6.8.73)$$

În același timp, ținînd cont de echivalența (6.8.71), relația (6.8.69) poate fi scrisă sub forma

$$\mathbf{A}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} I_k \oint \frac{d\mathbf{s}_k}{r_{ik}} \quad (6.8.74)$$

asa încît fluxurile din (6.8.73) se vor exprima prin relațiile

$$\Phi_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(\Gamma_k)} \oint_{(\Gamma_i)} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{r_{ik}} I_k = L_{ik} I_k. \quad (6.8.75)$$

Mărimile

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(\Gamma_i)} \oint_{(\Gamma_k)} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{r_{ik}} \quad (6.8.76)$$

se numesc *inductanțe*. Aceste mărimi depind numai de forma geometrică a circuitelor și de poziția lor reciprocă.

Ținînd cont de relațiile (6.8.72) și (6.8.75), se vede că energia unui sistem de curenți staționari este dată de expresia

$$W_B = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k. \quad (6.8.77)$$

În particular, pentru un singur conductor străbătut de curentul  $I$ , avem

$$W_B = \frac{1}{2} LI \quad (6.8.78)$$

$L$  fiind *inductanța proprie* a circuitului ( $L = L_{ii}$  se numește „inductanță proprie” a unui circuit, spre deosebire de  $L_{ik}$  — numită „inductanță mutuală”). Pentru cazul unui solenoid de exemplu, avînd  $N$  spire circulare de rază  $R$  și lungimea  $l$ , inductanța proprie va fi dată de relația (vezi și expresia (6.8.23))

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{NB_z \cdot \pi R^2}{I} = \mu_0 \frac{N^2 \cdot \pi R^2}{l}. \quad (6.8.79)$$



Se remarcă faptul că și expresia (6.8.77) a energiei unui sistem de curenți constanți este analogă expresiei (6.6.98), a unui sistem de conductoare încărcate electrostatic.

Revenind la problema energiei câmpului magnetostatic, desigur că se poate vorbi și de energia unui câmp magnetostatic în prezența substanței. După cum s-a văzut în relația (6.8.40), energia unui dipol magnetic într-un câmp magnetic exterior este dată de

$$W_{dip} = - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{ext}. \quad (6.8.80)$$

Aceasta înseamnă că energia unei substanțe magnetice care posedă o magnetizare constantă  $\mathbf{M}$ , într-un câmp magnetic exterior de inducție  $\mathbf{B}_{ext}$ , este dată de relația

$$W_{subst} = - \iiint \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{ext} dV \quad (6.8.81)$$

iar densitatea volumetrică de energie a substanței în câmp magnetic este dată de

$$w_{subst} = - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{ext}. \quad (6.8.82)$$

Dacă substanța este plasată într-un câmp magnetic lent variabil, se va înregistra o variație a densității de energie, care se va exprima sub forma

$$dw_{subst} = - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_{ext} = - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}_{ext}. \quad (6.8.83)$$

Atunci, energia acumulată în unitatea de volum a substanței în cursul modificării câmpului este dată de

$$W_{subst} = \int dw_{subst} = - \mu_0 \int_0^H \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}_{ext}. \quad (6.8.84)$$

În încheierea acestor considerații, să consemnăm câteva expresii ale forțelor ponderomotoare care acționează într-un câmp magnetostatic asupra curenților și substanțelor magnetice.

Forța elementară care acționează asupra curențului  $\mathbf{J}dV$ , din volumul  $dV$ , este o forță de tip Lorentz și se scrie sub forma

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{Q}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{ext}) = \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{ext})dV = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{ext}dV. \quad (6.8.85)$$

De aici rezultă că asupra unui conductor prin care circulă curenț acționează o forță dată de expresia

$$\mathbf{F} = \iiint_{(V)} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}_{ext})dV. \quad (6.8.86)$$



Dacă conductorul este filiform, pentru el sînt valabile relațiile (6.8.13) și rezultă că forța care acționează asupra lui în cîmpul magnetostatic are expresia

$$\mathbf{F} = I \int_{(\Gamma)} d\mathbf{s} \times \mathbf{B}_{ext} \quad (6.8.87)$$

cunoscută și sub denumirea de forța Laplace.

Pentru a obține expresia forței ponderomotoare, ce acționează în cîmp magnetostatic, asupra unei bucăți de substanță magnetică de volum  $V$ , omogenă din punct de vedere magnetic și caracterizată prin magnetizarea  $\mathbf{M}$  ne vom folosi de relația (6.8.41) în care vom înlocui momentul magnetic  $\mathbf{m}$  prin  $\mathbf{M}\mathcal{V}$ . Obținem

$$\mathbf{F} = -\mathcal{V}(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{ext} \quad (6.8.88)$$

unde  $\mathbf{B}_{ext}$  este inducția cîmpului în care este plasată substanța. Dacă considerăm  $\mathbf{M}$  orientat în lungul axei  $Ox$  și  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(B, 0, 0)$ , atunci din relația (6.8.88) rezultă că asupra eșantionului considerat de substanță magnetică acționează, în direcția  $Ox$ , o forță dată de relația :

$$F = -\mathcal{V}M \frac{\partial B}{\partial x} \quad (6.8.89)$$

Ținînd cont că  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$  și  $\mathbf{B}_{ext} = \mu_0 \mathbf{H}$  (în afara probei), din această relație rezultă

$$F_x = -\chi_m H \frac{\partial B}{\partial x} \mathcal{V} = -\chi_m \frac{B_{ext}}{\mu_0} \frac{\partial B_{ext}}{\partial x} \mathcal{V} = -\frac{1}{2} \frac{\chi_m \mathcal{V}}{\mu_0} \frac{\partial B_{ext}^2}{\partial x} \quad (6.8.90)$$

Această relație arată că în cîmpuri magnetice neomogene  $\left(\frac{\partial B}{\partial x} \neq 0\right)$

substanțele diamagnetice ( $\chi_m < 0$ ) sînt acționate în sens invers decît substanțele paramagnetice și feromagnetice (pentru care  $\chi_m > 0$ ). Mai exact, primele sînt expulzate din cîmp, iar celelalte sînt atrase în cîmp.

Pe proprietatea menționată mai sus și în ansamblu, pe formula (6.8.90) se bazează funcționarea unor dispozitive și instalații pentru măsurarea susceptivității magnetice  $\chi_m$ . De exemplu, pentru măsurarea lui  $\chi_m$  la substanțe solide se folosesc balanța Faraday (fig. 6.8.6, a) și balanța de translație (fig. 6.8.6, b). În cazul balanței magnetice echilibrarea se face cu ajutorul unor greutăți marcate de masă  $m$ , adică se realizează egalitatea

$$\frac{1}{2} \frac{\chi_m}{\mu_0} \frac{dB^2}{dx} \mathcal{V} = mg. \quad (6.8.91)$$



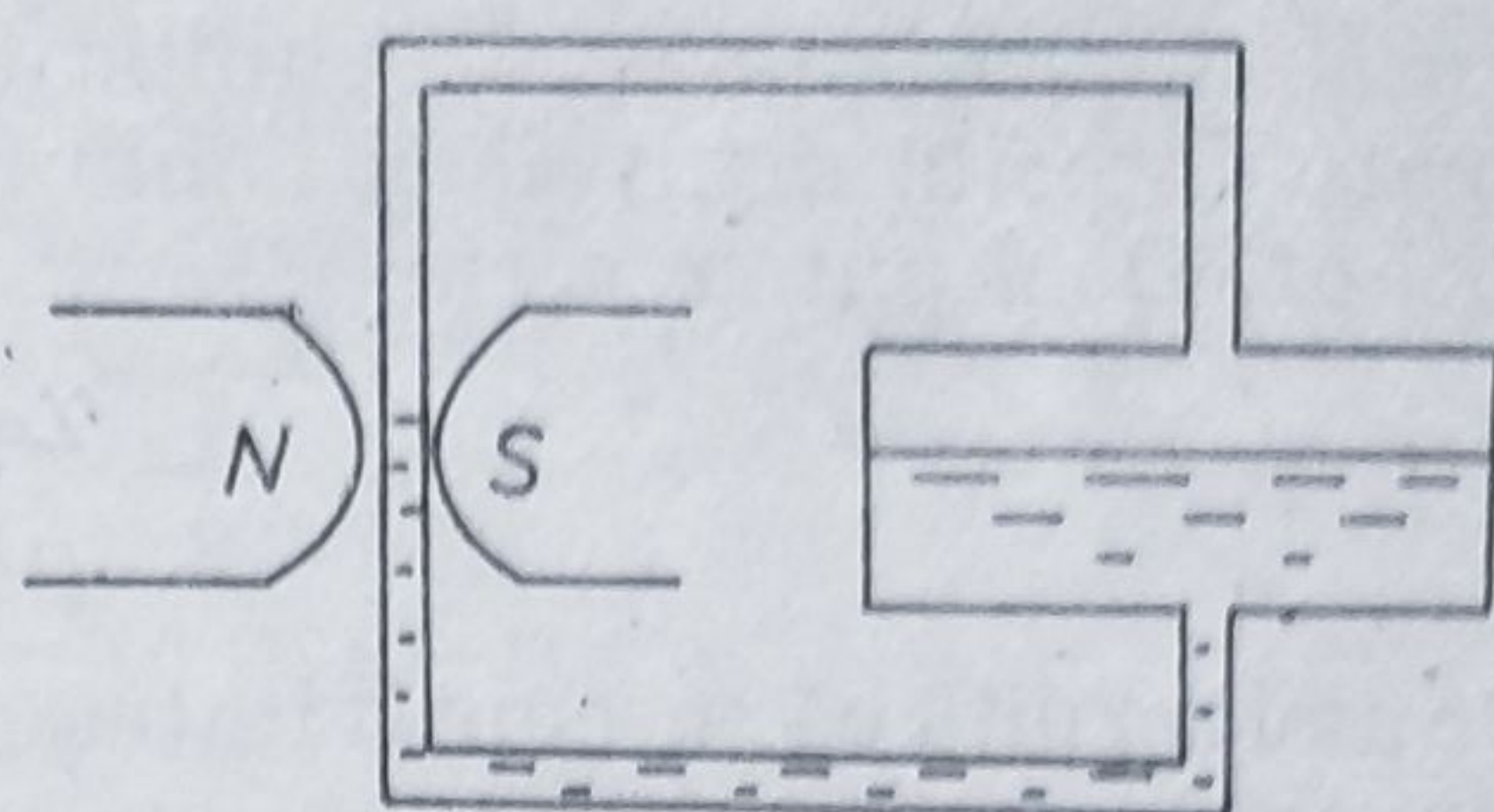
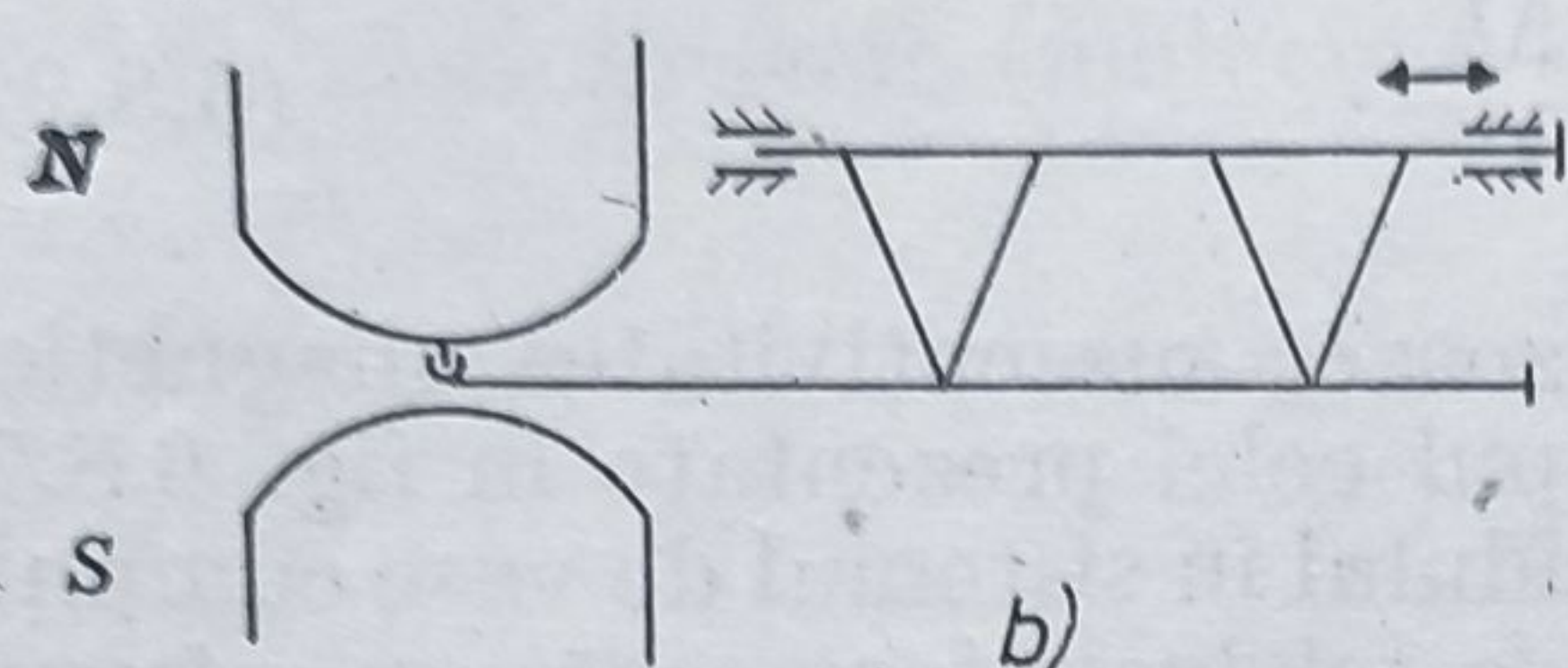
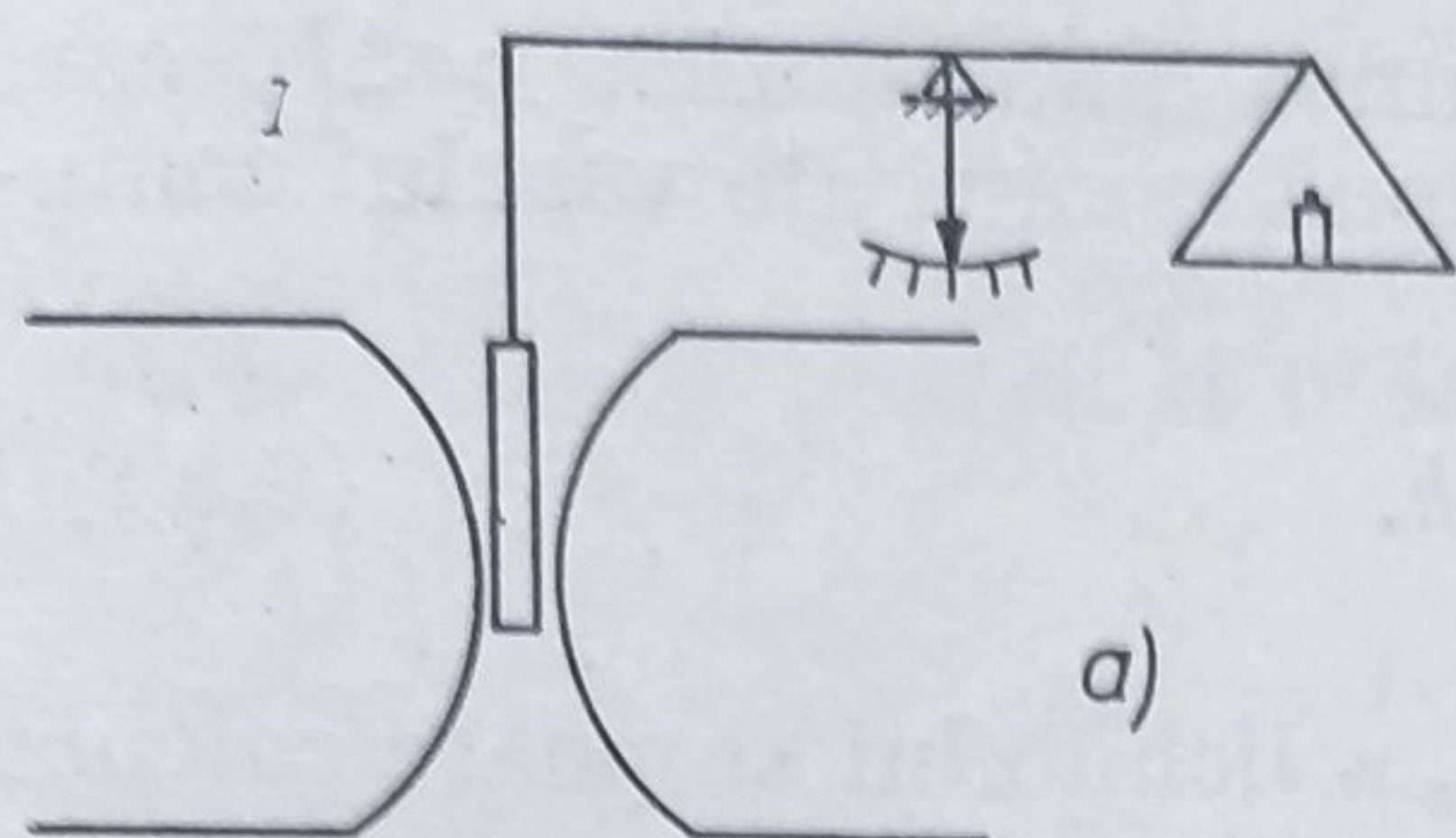


Fig. 6.8.7

Fig. 6.8.6

De regulă, măsurătorile sînt relative, prin comparare cu un eșantion etalon de același volum, pentru care evident este satisfăcută relația

$$\frac{1}{2} \frac{\chi_m^0}{\mu_0} \frac{dB^2}{dx} \mathcal{V} = m_0 g. \quad (6.8.92)$$

Din ultimele două relații rezultă

$$\chi_m = \chi_m^0 \frac{m}{m_0}. \quad (6.8.93)$$

Deci, cunoscînd  $\chi_m^0$  și valorile maselor  $m$  și  $m_0$  folosite la echilibrarea balanței pentru eșantionul necunoscut și pentru cel etalon, se poate determina  $\chi_m$ . După un principiu asemănător se procedează și în cazul balanței de translație, locul echilibrării prin cîntărire fiind luat aici de o echilibrare prin deplasarea pendulului balanței.

În cazul lichidelor, pentru determinarea lui  $\chi_m$  se folosesc vase comunicante, la care una din ramificații este introdusă în cîmpul magnetic (fig. 6.8.7). Din (6.8.91) se vede că forța ce acționează asupra volumului  $d\mathcal{V} = l dS$  este

$$dF = \frac{1}{2} \frac{\chi_m}{\mu_0} l dS \frac{dB^2}{dx}. \quad (6.8.94)$$

Introducînd notația  $\tilde{B}^2 = l \frac{dB^2}{dx}$ , se observă că presiunea determinată de acțiunea cîmpului magnetic este dată de relația

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \frac{\chi_m}{\mu_0} \tilde{B}^2. \quad (6.8.95)$$



Această presiune este echilibrată de presiunea hidrostatică  $\rho g \Delta h$ , care apare datorită denivelării lichidului în cele două ramuri ale vasului comunicant. Deci putem scrie

$$\frac{1}{2} \frac{\chi_m}{\mu_0} \tilde{B}^2 = \rho g \Delta h. \quad (6.8.96)$$

De aici rezultă că susceptivitatea magnetică  $\chi_m$  a lichidului se poate calcula din expresia

$$\chi_m = \frac{2\mu_0 g \rho \Delta h}{\tilde{B}^2}. \quad (6.8.97)$$

În sfârșit, în cazul substanțelor gazoase, susceptivitatea magnetică se poate determina cu o instalație de tipul celei prezentate în fig. 6.8.7, gazul de măsurat aflându-se deasupra lichidului în sistemul de vase comunicante, închise la partea superioară, în așa fel încât formează un circuit închis. Și gazele, la fel ca și lichidele, vor fi supuse în prezența cîmpurilor magnetice neomogene unor presiuni suplimentare de tip magnetic, astfel că de astă dată, dintr-o condiție de echilibru de forma (6.8.96), se obține

$$\frac{\tilde{B}^2}{2\mu_0} (\chi_m^l - \chi_m^g) = (\rho_l - \rho_g) g \Delta h. \quad (6.8.98)$$

Deci, susceptivitatea gazului  $\chi_m^g$  se poate determina, dacă se cunosc densitatea gazului  $\rho_g$ , densitatea lichidului din vas  $\rho_l$ , susceptivitatea magnetică a acestuia  $\chi_m^l$  și se măsoară denivelarea  $\Delta h$ . Atașînd instalațiilor respective anexele necesare pentru variația temperaturii eșantionului magnetic respectiv se pot face studii de variație cu temperatura  $T$  a susceptivității  $\chi_m$  și respectiv a magnetizării  $M$ .

#### 6.8.4. DIAMAGNETISMUL ȘI PARAMAGNETISMUL SUBSTANȚELOR

a) **Diamagnetismul.** Este specific substanțelor ale căror molecule nu posedă momente magnetice proprii. Din această clasă fac parte gazele nobile (He, Ne, Ar, Kr, Xe), aproape toți metaloizii (cu excepția oxigenului și sulfurii), o parte dintre metale (de exemplu Bi, Cu, Au, Hg etc., și toate metalele în stare supraconductoare) și numeroși compuși organici și anorganici. Aceste substanțe se magnetizează prin inducție, pentru că cîmpul magnetic extern  $\mathbf{H}$  crează prin inducție momente magnetice elementare la nivelul fiecărui atom sau moleculă. Într-adevăr, așa cum s-a arătat în § 6.5, în prezența unui cîmp magnetic extern  $\mathbf{H}$  sarcinile electrice aflate într-o mișcare staționară sînt antrenate de către  $\mathbf{H}$  la mișcarea de precesie Larmor suplimentară, care se desfășoară cu viteza unghiulară

$$\omega_L = \frac{q\mu_0 \mathbf{H}}{2m_0} \quad (6.8.99)$$



$q$  fiind sarcina celor  $Z$  electroni ( $q = Ze$ ) ai particulei, iar  $m_0$  masa de repaus a electronului. Dar această mișcare de precesie a sarcinilor poate fi echivalată, potrivit relației (6.8.46), cu momente magnetice, care la nivel de electron și pentru  $\mathbf{H}$  orientat în lungul axei  $Oz$ , sînt date de expresia

$$|\mathbf{m}| = I \langle S_{xy} \rangle = - \frac{e\omega_L}{2\pi} \cdot \pi(x^2 + y^2) \quad (6.8.100)$$

iar la nivel de atom (moleculă) de expresia

$$|\mathbf{m}| = - \frac{Ze^2\mu_0 H}{4m_0} \langle (x^2 + y^2) \rangle. \quad (6.8.101)$$

Presupunînd existența unei distribuții izotrope a electronilor în atom putem scrie

$$\langle (x^2 + y^2) \rangle = 2\langle x^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle$$

$\langle r^2 \rangle$  fiind raza pătratică medie a orbitelor electronice. Dacă în unitatea de volum, substanța diamagnetică posedă  $n_0$  atomi (molecule), atunci

$$\mathbf{M} = n_0 \mathbf{m} = - \frac{Ze^2 n_0 \mu_0 \langle r^2 \rangle}{6m_0} \mathbf{H} \quad (6.8.102)$$

ceea ce înseamnă că

$$\chi_m = - \frac{Ze^2 n_0 \mu_0 \langle r^2 \rangle}{6m_0}. \quad (6.8.103)$$

Acest rezultat este bine verificat de experiență îndeosebi pentru cazul gazelor. Astfel, de exemplu, pentru neon

$$\chi_{exp} = - 7,2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}, \text{ iar } \chi_{teor} = - 8,2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}.$$

La metale, diamagnetismul este în mare măsură determinat de electronii de conducție, care participînd în cîmpul  $\mathbf{H} \neq 0$ , la o mișcare de precesie Larmor, se vor comporta ca electroni diamagnetici.

b) **Paramagnetismul.** Este specific substanțelor ale căror molecule (atomi) posedă momente magnetice proprii de valori diferite de zero și în lipsa cîmpului extern. Din această clasă fac parte o serie de gaze ca: oxigenul, oxidul și bioxidul de azot, bioxidul de clor, metanul etc., numeroase substanțe în fază condensată (solidă și lichidă), cum sînt compușii elementelor din grupa fierului și ai pămînturilor rare, și o serie de metale.



Prima teorie clasică a paramagnetismului a fost creată în anul 1905 de către P. Langevin. Această teorie a fost completată apoi, în anul 1929, de o teorie cuantică riguroasă a paramagnetismului, elaborată de către Van Vleck. Ambele conduc la același rezultat conținut în legea experimentală a lui Curie, potrivit căreia susceptivitatea magnetică a paramagneticilor scade invers proporțional cu creșterea temperaturii

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (6.8.104)$$

În teoria lui Langevin acest rezultat se obține dintr-un calcul statistic al vectorului de magnetizare  $\mathbf{M}$ , analog calculului vectorului de polarizare  $\mathbf{P}$  pentru substanțele care se polarizează prin orientare (vezi § 6.6). Se ia în considerație atât acțiunea câmpului exterior de orientare a momentelor magnetice proprii  $\mathbf{m}_p$ , pe direcția sa, cât și acțiunea perturbatoare dată de agitația termică. Astfel, în condiții de echilibru termic la temperatura  $T$ , din cele  $n_0$  molecule aflate în unitatea de volum a substanței paramagnetice, numărul  $dn$  ale căror momente magnetice  $\mathbf{m}_p$  au orientarea cuprinsă între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$  față de  $\mathbf{H}$  (fig. 6.8.8) este dat de legea de distribuție Boltzmann

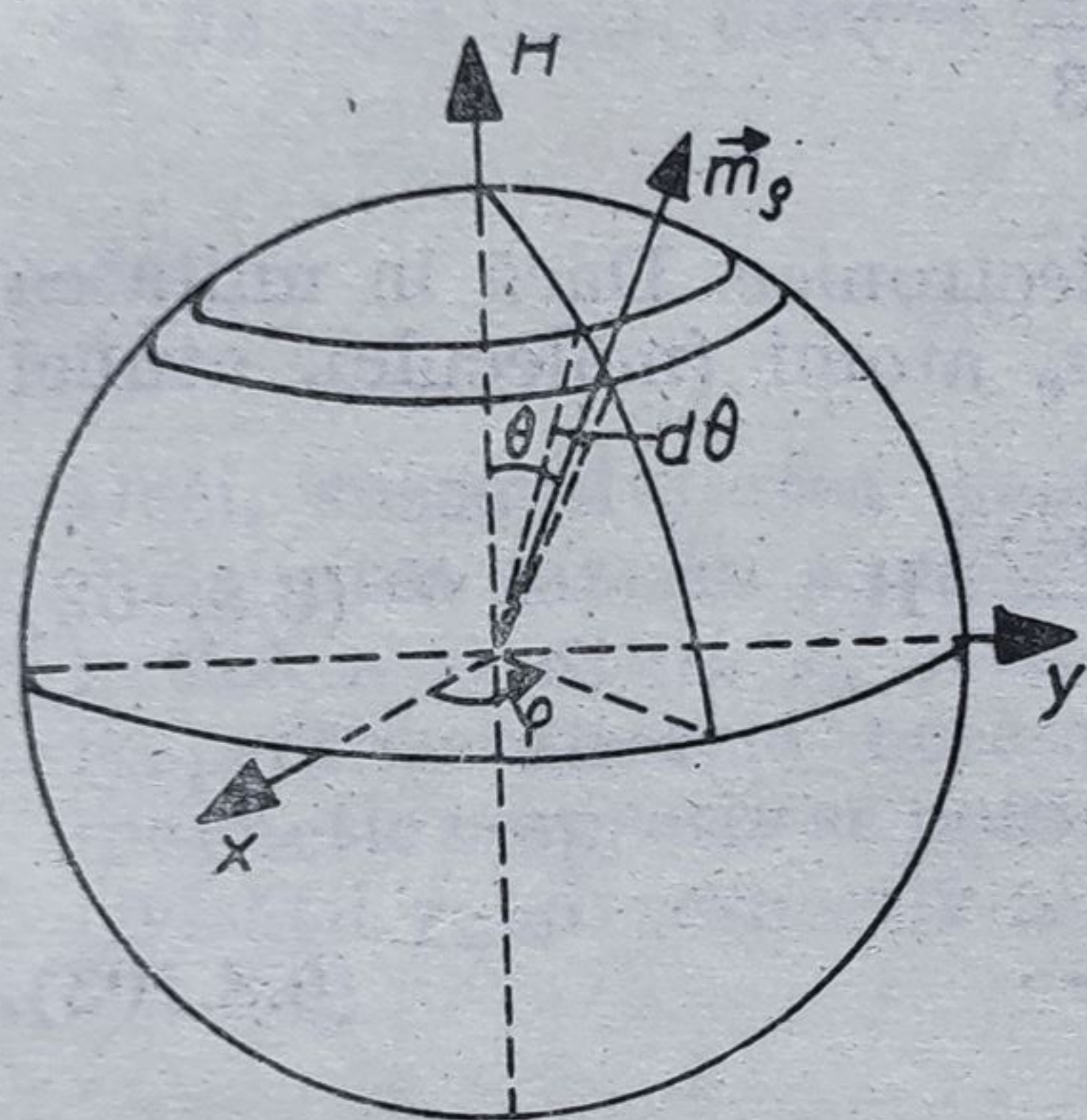


Fig. 6.8.8

$$dn = n_0 \frac{e^{-\frac{W_B}{kT}} \sin \theta d\theta}{\int e^{-\frac{W_B}{kT}} \sin \theta d\theta} \quad (6.8.105)$$

unde, conform relației (6.8.80)

$$W_B = -m_p \mu_0 H \cos \theta. \quad (6.8.106)$$

Socotind pe baza acestei legi suma proiecțiilor momentelor proprii pe direcția lui  $\mathbf{H}$  obținem magnetizarea  $\mathbf{M}$ . Deci

$$M = \int m_p \cos \theta dn = n_0 m_p \frac{\int_0^\pi \exp\left[-\frac{m_p \mu_0 H}{kT} \cos \theta\right] \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left[-\frac{m_p \mu_0 H}{kT} \cos \theta\right] \sin \theta d\theta}$$

și introducînd aici notația

$$a = \frac{m_p \mu_0 H}{kT} \quad (6.8.107)$$

prin calcule simple se ajunge la expresia

$$M = n_0 m_p \left( \text{cth } a - \frac{1}{a} \right) = n_0 m_p L(a) \quad (6.8.108)$$



unde prin  $L(a)$  s-a notat așa numita *funcție a lui Langevin*. Pentru cîmpuri magnetice nu prea intense, cînd  $a \ll 1$ , este valabilă aproximația

$$L(a) \simeq \frac{1}{3} \frac{m_p \mu_0 H}{kT} \quad (6.8.109)$$

și deci

$$\mathbf{M} = \frac{n_0 m_p^2 \mu_0}{3kT} \cdot \mathbf{H}. \quad (6.8.110)$$

Înseamnă că susceptivitatea magnetică  $\chi_m$  pentru paramagnetice, în limitele aproximației menționate mai sus, va fi dată de expresia

$$\chi_m = \frac{n_0 m_p^2 \mu_0}{3kT} = \frac{C}{T} \quad (6.8.111)$$

care este în deplină concordanță cu legea experimentală a lui Curie (6.8.104).

În cazul metalelor, pe lîngă paramagnetismul ionilor din nodurile rețelei cristaline, mai intervine un paramagnetism al electronilor de conducție. Dar studiul acestor procese de magnetizare face apel la teorii cuantice.

#### 6.8.5. SUBSTANȚE CU ORDONARE MAGNETICĂ

a) **Feromagnetismul.** Este o stare de magnetizare specifică, întâlnită la o serie de substanțe sub o anumită temperatură critică  $T_c$ , numită *temperatură Curie*. Din clasa substanțelor feromagnetice fac parte cîteva metale de tranziție în stare solidă ca: Ni, Fe, Co, Gd și aliajele acestora, aliaje ale lor cu alte metale paramagnetice sau diamagnetice, precum și cîteva aliaje din compuși neferomagnetici ca: EuS; MnSb; GdNi<sub>2</sub> etc. La toate aceste substanțe procesul de magnetizare este însoțit de fenomene de histerezis (vezi fig. 6.8.5) și de regulă, ele păstrează o magnetizare remanentă ( $M_r \neq 0$ ) în lipsa cîmpului magnetizant exterior  $H$ . Experimental s-a stabilit că pentru Ni, Fe, Co, la temperaturi joase este valabilă o lege de variație cu temperatura a magnetizării remanente, de forma

$$M_r = M_s \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (6.8.112)$$

în care  $M_s$  reprezintă *magnetizarea de saturație* a eșantionului feromagnetic respectiv.

Plecînd de la aceste fapte experimentale, P. Weiss introduce pentru explicarea feromagnetismului ideea cîmpului molecular, potrivit căreia în



interiorul unei substanțe feromagnetice se creează câmpuri magnetice interioare datorită interacțiunilor dintre momentele magnetice elementare proprii. Aceste câmpuri interioare se suprapun peste câmpul exterior  $\mathbf{H}$  și dau naștere la un câmp magnetic efectiv

$$\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_i. \quad (6.8.193)$$

În teoria lui Weiss se admite că câmpul molecular interior este determinat de magnetizația  $\mathbf{M}$ , în așa fel încât se poate scrie

$$\mathbf{H}_i = \alpha \mathbf{M} \quad (6.8.114)$$

$\alpha$  fiind o constantă ce urmează a fi determinată din datele experimentale. În aceste condiții, formula (6.8.110) trebuie generalizată la forma

$$\mathbf{M} = \frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3kT} (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}) \quad (6.8.115)$$

din care, prin calcule simple, rezultă

$$\mathbf{M} = \frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3kT} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3kT} \alpha} \cdot \mathbf{H} = \frac{\frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3k}}{T - \frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3k} \cdot \alpha} \cdot \mathbf{H} \quad (6.8.116)$$

Atunci, pentru susceptivitatea magnetică  $\chi_m$  se va obține relația

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c} \quad (6.8.117)$$

cunoscută și sub numele de *legea Curie-Weiss*. Ea definește o temperatură Curie prin expresia

$$T_c = \frac{n_0 \mu_0 m_p^2}{3k} \cdot \alpha \quad (6.8.118)$$

Astăzi se știe că legea Curie-Weiss (6.8.117) este bine verificată de datele experimentale în domeniul paramagnetic ( $T > T_c$ ). Tot experimental s-au determinat cu mare exactitate valorile temperaturilor Curie  $T_c$  și ale magnetizărilor spontane  $M_s$  (magnetizarea de saturație extrapolată pentru  $T \rightarrow 0$  K) pentru principalele substanțe feromagnetice (vezi tabelul de mai jos).

Metal	Fe	Co	Ni	Gd
$T_c, \text{K}$	1043	1404	631	298
$M_s, \text{A/m}$	$1,69 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^6$	$0,47 \cdot 10^6$	$5,66 \cdot 10^5$



Pe baza acestor date s-a putut calcula atât coeficientul  $\alpha$  folosind relația (6.8.118), cât și câmpul molecular  $H_i$ , folosind relația (6.8.114). Dar rezultatul obținut din aceste calcule a fost cu totul surprinzător: s-au obținut câmpuri magnetice interne de valori extrem de ridicate ( $H_i \sim 10^{10}$  A/m), care n-au putut fi puse pe seama interacțiunilor de tip dipolar magnetic între momentele magnetice elementare, întrucât aceste interacțiuni pot asigura doar câmpuri de ordinul a  $10^7$  A/m. Mai târziu, Heisenberg pune acest câmp intern pe seama unor interacțiuni specifice cuantice (interacțiunea de schimb dintre spinii electronici; vezi vol. II) și reușește astfel să explice esența proceselor de magnetizare din cazul substanțelor cu ordonare magnetică, dar o serie de aspecte macroscopice ale acestor procese au fost obținute încă în cadrul modelului clasic al lui Weiss.

Esențial în acest model este ipoteza (verificată apoi experimental direct) existenței unei magnetizări spontane  $\mathbf{M}_s$ , care sub acțiunea câmpurilor exterioare și interioare, se orientează pe o anumită direcție în raport cu axele cristalografice. Ambele procese sînt condiționate de realizarea unei stări de energie minimă a feromagnetului respectiv. Pentru a găsi această stare vom analiza, în continuare, contribuțiile pe care le aduc la starea energetică a corpului feromagnetic diversele interacții cu câmpurile magnetice interioare  $\mathbf{H}_i$  și exterioare  $\mathbf{H}$ . Vom admite de asemenea că corpul este magnetizat uniform la saturația  $\mathbf{M}_s$ .

În câmpul exterior  $\mathbf{H}$ , energia unității de volum a unui corp feromagnetic este dată, conform relației (6.8.84), de expresia

$$W_1 = -\mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H}. \quad (6.8.119)$$

Apoi, datorită magnetizării spontane  $\mathbf{M}_s$ , pe suprafața exterioară a corpului feromagnetic apar poli magnetici necompensați, care crează un așa zis *cîmp magnetic de demagnetizare*  $\mathbf{H}_D$ , orientat în sens invers câmpului exterior  $\mathbf{H}$  (analog câmpului de depolarizare întâlnit la corpurile feroelectrice, vezi § 6.6). Și aici, câmpul de demagnetizare  $\mathbf{H}_D$  va depinde de forma geometrică a eșantionului feromagnetic respectiv. Acest câmp poate fi exprimat prin intermediul unor *factori de demagnetizare*  $N_{\alpha\beta}$  printr-o relație de forma

$$H_{D\alpha} = - \sum_{\beta} N_{\alpha\beta} M_{\beta} \quad (6.8.120)$$

În general, factorii de demagnetizare sînt tensori simetrici de ordinul trei

$$(N_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} & N_{xz} \\ N_{yx} & N_{yy} & N_{yz} \\ N_{zx} & N_{zy} & N_{zz} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} \\ \{\alpha, \beta\} = \{x, y, z\} \end{matrix} \quad (6.8.121)$$

a căror sumă a elementelor de pe diagonală matricei (urma tensorului) este unitară

$$N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 1. \quad (6.8.122)$$



Există posibilitatea reducerii la o formă diagonală a matricei (6.8.121) în care caz

$$N_D = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix}. \quad (6.8.123)$$

Această proprietate a tensorului ( $N_{\alpha\beta}$ ) se datorește faptului că se pot alege în corpul feromagnetic respectiv trei direcții în lungul cărora magnetizarea  $M$  să fie uniformă.

Calculule efectuate pentru prima dată de către Obsborn au arătat că pentru un corp feromagnetic de forma elipsoidului de rotație, magnetizat uniform în lungul axei  $Oz$  factorul de demagnetizare  $N$ , este dat de expresiile

$$N_z = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left[ \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{1/2}} \operatorname{arccch} \gamma - 1 \right], \quad \gamma = \frac{c}{a} > 1, \quad a = b \quad (6.8.124)$$

$a, b, c$  fiind semiaxele elipsoidului ( $c \parallel Oz$ ) și respectiv

$$N_z = \frac{1}{1 - \gamma^2} \left[ 1 - \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{1/2}} \right]; \quad \gamma < 1. \quad (6.8.125)$$

Pentru direcții perpendiculare la axa  $Oz$  se găsește

$$N_x = N_y = \frac{1}{2} (1 - N_z). \quad (6.8.126)$$

Atunci, în cazul unei sfere vom avea

$$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3} \quad (6.8.127)$$

iar în cazul unui cilindru infinit lung, magnetizat în lungul axei sale

$$N_x = N_y = \frac{1}{2}, \quad N_z = 0. \quad (6.8.128)$$

În aceste condiții, energia cîmpului de demagnetizare este dată de expresia

$$W_2 = -\mu_0 \mathbf{M}_s \mathbf{H}_D = -\mu_0 N_0 M_s^2. \quad (6.8.129)$$

Faptul că în lipsa cîmpului exterior, magnetizarea spontană  $\mathbf{M}_s$  se orientează întotdeauna pe aceeași direcție față de axele cristalografice (pe o muchie a cubului în cazul Fe cubic, pe diagonală volumică, în cazul



Ni etc.), direcție numită *axă de ușoară magnetizare*, ne arată că în procesul magnetizării intervine o acțiune asupra momentelor magnetice elementare și din partea câmpului local cristalin, care determină un surplus de energie pentru magnetizarea  $M_s$ . Această energie, numită *energie magnetocristalină*, se poate exprima prin intermediul unor coeficienți fenomenologici de anizotropie magnetocristalină ( $K_1, K_2, \dots$ ) și a cosinurilor directori ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) ai vectorului  $M$  în raport cu axele cristalografice ale structurii respective. De exemplu, pentru o structură cubică avem

$$W_3 \simeq K_1[(\alpha_1\alpha_2)^2 + (\alpha_2\alpha_3)^2 + (\alpha_3\alpha_1)^2]. \quad (6.8.130)$$

În sfârșit, prezența unor tensiuni elastice în corpul feromagnetic va determina desigur interacții de tip magnetoelastic. Efectul lor constă în modificări ale dimensiunilor geometrice ale corpului în timpul procesului de magnetizare (pentru că tensiunile elastice create de magnetizare produc și ele noi deformări elastice). Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *magnetostricțiune*. Există o *magnetostricțiune* volumică și una liniară. În aceasta din urmă, intervine o modificare a dimensiunilor liniare ale corpului. De exemplu, dacă procesul de magnetizare este extins pînă la saturația magnetică  $M_s$ , atunci alungirea relativă a corpului

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6.8.131)$$

se va numi *magnetostricțiune de saturație*. Experimental s-au găsit pentru  $\lambda$  valori cuprinse în intervalul ( $\lambda = 10^{-6} \div 10^{-3}$ ), o valoare ridicată ( $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ ) întîlnindu-se la permalloy (aliaj 80% Ni 20% Fe). La ferite (vezi mai departe),  $\lambda$  poate atinge valori de pînă la  $10^{-3}$ .

Desigur că și magnetostricțiunea este un fenomen anizotrop, adică valoarea lui  $\lambda$  va depinde nu numai de valoarea lui  $M$ , ci și de direcția lui  $M$  în raport cu direcția după care se socotește alungirea. Înseamnă că și energia magnetoelastică  $W_4$  va depinde de direcțiile magnetizării  $M$  și ale tensiunii elastice  $T$ . Dacă se notează cu  $\varphi$  unghiul format de  $M$  și  $T$ , atunci se poate arăta că energia magnetoelastică a unității de volum se exprimă prin relația

$$W_4 = \frac{3}{2} \lambda T \sin \varphi. \quad (6.8.132)$$

Deci, starea de magnetizare a unui corp este determinată de valoarea minimă a energiei

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \quad (6.8.133)$$

Este interesant de remarcat că în lipsa câmpului magnetic exterior ( $W_1 = 0$ ), de regulă, corpul feromagnetic nu-și evidențiază proprietățile sale magnetice. Nu este greu să ne dăm seama că acest fapt se datorește prezenței



domeniilor de magnetizare. Aceste domenii apar ca o cerință a realizării condiției de minim energetic pentru corpul feromagnetic respectiv. În adevăr, dacă am admite că întregul corp ar fi magnetizat uniform într-o singură direcție, adică ar conține un singur monodomeniu de magnetizare (fig. 6.8.9, a), atunci întrucât pe fețele lui vor exista poli magnetici necompensați, care vor crea un câmp de demagnetizare  $H_D > 0$ , componenta  $W_2$

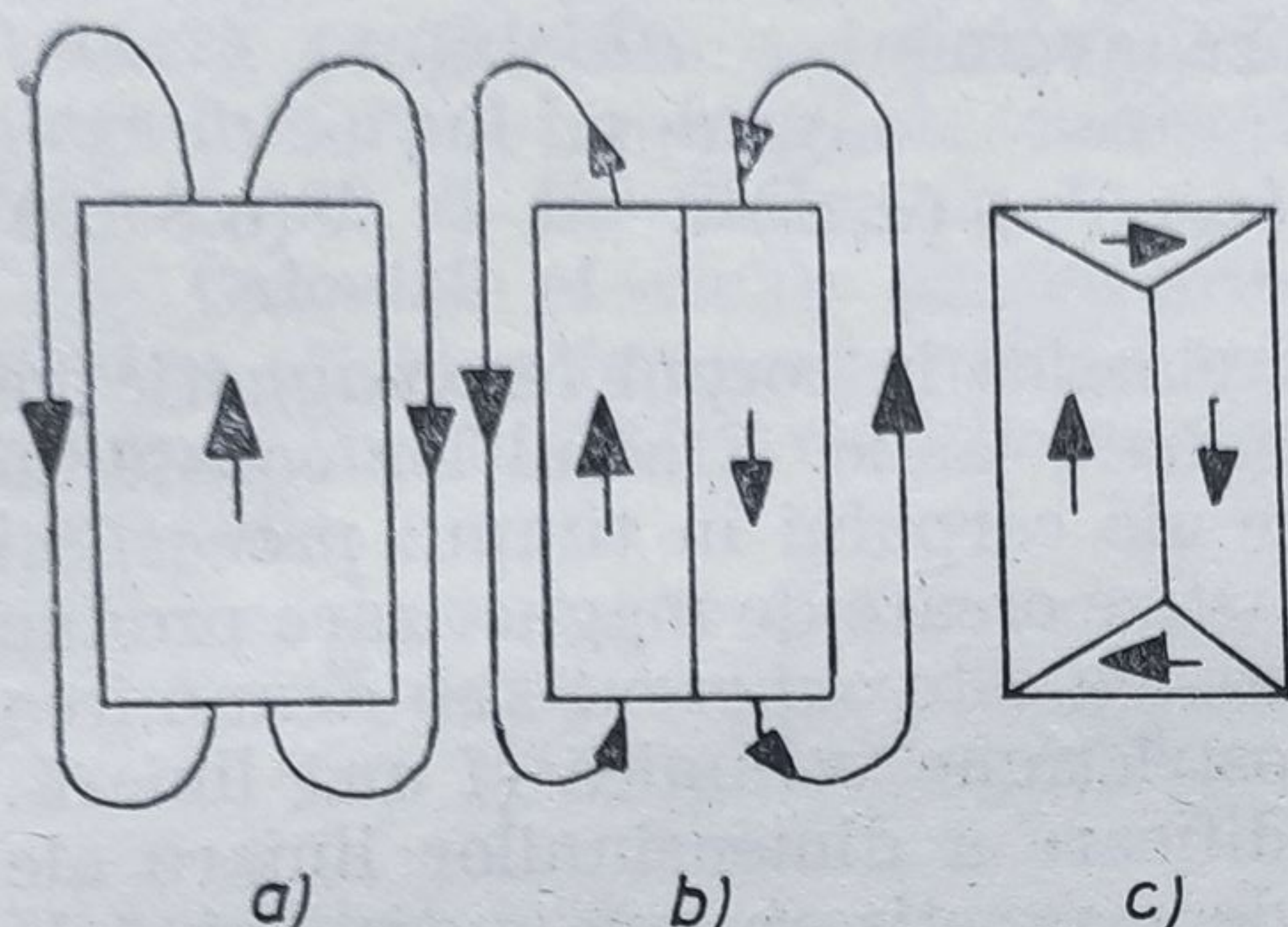


Fig. 6.8.9

a energiei feromagnetului va fi și ea diferită de zero. În prezența a două domenii, despărțite între ele printr-un perete în care magnetizarea suferă o inversare de  $180^\circ$  (acesta se numește perete Bloch) și deci în care magnetizările din domenii vecine sînt inversate (fig. 6.8.9, b), valoarea energiei de demagnetizare este cu mult mai mică decît în cazul monodomenic. Ea se poate chiar anula în prezența unor domenii de închidere (fig. 6.8.9, c). Prezența acestor

domenii de magnetizare și a pereților Bloch este o realitate bine dovedită experimental. Există tehnici de vizualizare a domeniilor de magnetizare (de exemplu, în metoda figurilor lui Bitter, peste suprafața plană a eșantionului feromagnetic se depune o soluție de fier coloidal, iar Fe este reținut pe linia pereților Bloch, în care apar poli magnetici necompensați, orientați perpendicular pe suprafața eșantionului).

Prin urmare, de regulă, în lipsa câmpului magnetic exterior corpul feromagnetic posedă o mulțime de domenii de magnetizare orientate haotic, în așa fel încît  $\mathbf{M} = 0$ . Prezența câmpului exterior  $\mathbf{H}$  determină orientarea acestor domenii pe direcția sa, orientare care se face fie prin deplasarea pereților Bloch în așa fel încît domeniile cu magnetizarea paralelă cu  $\mathbf{H}$  să crească în detrimentul celorlalte, fie prin rotirea magnetizării acestora din urmă pe direcția lui  $\mathbf{H}$ . Ambele procese se produc însă prin depășirea unor „piedici” (puse în cale de prezența defectelor, a impurităților etc.), care determină atît valoarea câmpului coercitiv  $H_c$ , cît și forma curbei de histerezis. Cunoașterea acestor procese și în deosebi a modalităților de influențare dirijată a lor este de cea mai mare însemnătate pentru tehnologia materialelor magnetice, deoarece forma și aria buclei de histerezis (vezi fig. 6.8.5) determină în ultimă instanță utilizarea acestor materiale în diverse aplicații practice. De altfel, se poate arăta ușor că „aria” buclei de histerezis, adică mărimea

$$\mathcal{A} = \oint \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M} \quad (6.8.134)$$

exprimă tocmai energia disipată sub formă de căldură în procesul magnetizării unității sale de volum, în decursul unui ciclu de magnetizare.



Se disting două clase de materiale magnetice și anume :

*Materiale magnetice moi.* Sînt substanțe a căror permeabilitate magnetică relativă are valori ridicate (vezi tabelul de mai jos), dar aria buclei de histerezis este redusă, în așa fel încît aceste materiale se pot folosi pentru realizarea tolelor de transformator și a miezurilor de electromagneți.

Substanța	Compoziția chimică	$M_s, 10^3 \text{ A/m}$	$\mu_r 10^3$ (val. maxim)	$\rho, 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	Pierderi prin histerezis J/kg ciclu
Fe	Fe — pur	17,5	5	10	$4 \cdot 10^{-2}$
Fe — Si	Fe — 2% Si	16	7,5	35	$2 \cdot 10^{-2}$
Fe — Si	Fe — 4% Si	15,5	30	55	$0,5 \cdot 10^{-2}$
Fe — Ni	Fe — 50% Ni	12,7	60	45	$0,3 \cdot 10^{-2}$
Permalloy	Fe — 78% Ni	8,7	100	16	$0,05 \cdot 10^{-2}$
Supermalloy	Fe — 5% Mo — 79% Ni	1	1000	60	$0,01 \cdot 10^{-2}$
Ferită de zinc	$\text{Mn}_{0,5} \text{Zn}_{0,5} \text{Fe}_2\text{O}_4$	3	2,5	$2 \cdot 10_7$	$0,1 \cdot 10^{-2}$

În categoria materialelor folosite pentru realizarea transformatoarelor electrice intră de obicei aliajele Fe—Si, care asigură pierderi mici de energie prin efect Joule și se pot prelucra mecanic și termic ușor. Ca miezuri pentru electromagneți sînt folosite fierul pur sau slab aliat cu carbon, aliajele de fier-nichel și feritele.

*Materiale magnetice dure.* Sînt materiale cu buclă de histereză de arie mare, deci care sînt caracterizate prin cîmpuri coercitive de valori ridicate și prin magnetizări remanente de valori ridicate. Astfel de materiale se folosesc la realizarea magneților permanenți. Din clasa materialelor magnetice dure fac parte oțelurile Alnico (aliaj al Al, Ni, Co, Cu, Fe) și indoxul ( $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$ ). De exemplu, prin răcirea topiturii de Alnico în cîmpuri magnetice se poate ajunge la materiale cu  $H_c = 6 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ .

În ultima vreme au fost realizate materiale magnetice cu proprietăți interesante din pulberi monodomenice sau din straturi subțiri feromagnetice. Pulberile de materiale feromagnetice sînt amestecate cu particule neferomagnetice (particule de Pb de exemplu, care au rolul de a fixa direcția magnetizării în particulele monodomenice) și apoi presate în miezuri de diverse forme. Se obțin astfel magneți cu calități superioare, cum sînt miezurile de ferocart. De remarcat că dacă matricea nemagnetică nu fixează orientările particulelor monodomenice, atunci acestea se vor găsi în permanență sub influența agitației termice, manifestînd o comportare analogă paramagneticilor. Această stare a fost denumită *superparamagnetică*.

În cazul straturilor subțiri feromagnetice se întîlnesc, de asemenea, o serie de proprietăți specifice, care le conferă multiple utilizări practice. Prin tehnici de preparare speciale (evaporarea în vid a metalului sau aliajului și condensarea vaporilor pe suporti solizi mono sau policristalini, depunere electrochimică, pulverizare catodică etc), se pot obține atît straturi feromagnetice subțiri cu valori mari ale cîmpului coercitiv  $H_c$  și cu bucle de histerezis de formă rectangulară (care fac parte din clasa materialelor magnetice dure), cît și straturi feromagnetice subțiri cu proprietăți magnetice analoge materialelor magnetice moi. Primele posedă o axă de ușoară



magnetizare ce poate fi indusă în planul stratului (prin depunere în câmp magnetic constant, prin tratament termic în  $H = \text{const.}$  sau depunere oblică) și de aceea își găsesc o largă utilizare ca elemente de memorie în mașinile electronice de calcul. Celelalte, ca urmare a valorii ridicate a câmpului de demagnetizare pe direcția transversală stratului ( $N_{||} = 0$ ;  $N_{\perp} = 1$ ) se pot magnetiza uniform în planul stratului în așa fel încât să se obțină în întregul strat un singur domeniu de magnetizare. În astfel de straturi au fost puse în evidență domeniile de magnetizare de bandă și, în ultima vreme, domeniile de magnetizare cilindrice, cu perspective de a fi utilizate în înmagazinarea, păstrarea și redarea unei mari cantități de informație sub formă holografică [60].

b) **Substanțe antiferomagnetice.** O clasă importantă de substanțe cu ordonare magnetică, cu multiple utilizări practice, din care fac parte atât metale pure (Mn, Cr etc.), aliaje ale acestora, cât și o serie de compuși anorganici (oxizi, sulfiți, halogenuri etc.), manifestă proprietăți magnetice distincte față de cele feromagnetice. Astfel, și la aceste substanțe se evidențiază o temperatură critică  $T_N$  numită *temperatură Neél*, sub care se realizează o ordonare magnetică, dar aceasta se face în așa fel încât la  $T \rightarrow 0$ , magnetizarea totală este nulă. De asemenea, la temperaturi  $T > T_N$  dependența susceptivității magnetice de temperatură satisface legea lui Curie-Weiss (6.8.117), dar sub temperatura Neél intervin comportări specifice. Teoria antiferomagnetismului a fost creată de L. Neél pe baza ideii de *subrețea magnetică*. Se admite că în cazul antiferomagneticilor se realizează două astfel de subrețele magnetice, care cuprind momente magnetice orientate în sensuri inverse. Ordonarea antiferomagnetică este deci determinată de interacțiunile dintre momentele magnetice, care în subrețelele vecine au sensuri inverse. De aceea, la  $T \rightarrow 0$  K, magnetizarea unui antiferomagnet este nulă. În prezența câmpului exterior  $H \neq 0$ , apare și aici procesul de orientare a momentelor magnetice elementare pe direcția și în sensul lui  $H$ , proces ce poate fi caracterizat printr-o susceptivitate magnetică pozitivă, dependentă de câmp și de temperatură ( $\chi_m = \chi_m(H, T) > 0$ ).

c) **Substanțe ferimagnetice** În această categorie de substanțe intră clasa de substanțe, cunoscute mai de mult în chimie sub denumirea de *ferite* și clasa *granaților*, ambele clase manifestând de asemenea proprietăți magnetice interesante și cu largi posibilități de utilizare practică.

Feritele sînt combinații de tipul  $n_1 (M_e O) \cdot n_2 (Fe_2 O_3)$ , în care  $M_e$  reprezintă un element de tranziție bivalent (Mn, Fe, Ca, Ni, Cu, Zn, Mg etc.). Unul dintre cei mai vechi reprezentanți cunoscuți din această clasă este magnetita ( $Fe_3 O_4$ ). În structura mono sau policristalină, feritele au proprietăți semiconductoare din punct de vedere electric. Clasa granaților a fost descoperită ulterior, iar substanțele din această clasă sînt dielectrice din punct de vedere electric. Aceste substanțe sînt combinații în stare solidă, de forma:  $M_{e3} Fe_5 O_{12}$  în care  $M_e$  reprezintă un ion de metal de tranziție trivalent, iar Fe se găsește în stare bivalentă.

Și în cazul substanțelor ferimagnetice este valabilă teoria subrețelor magnetice a lui Neél, cu deosebirea că aici magnetizările spontane ale celor două subrețele sînt de valori diferite. De aceea, procesele de magnetizare



vor pune în evidență și în acest caz fenomenul de histerezis. Există *ferite moi* și *ferite dure*, cu destinații diferite, fie pentru miezuri de electromagneți și transformatoare electrice (de regulă în curenți de înaltă frecvență), fie pentru realizarea magneților permanenți și a elementelor de memorie (clasa celor cu bucle de histerezis rectangulară). Studiul aprofundat al proprietăților fizice ale acestor substanțe, ca de altfel ale tuturor substanțelor cu ordonare magnetică, necesită nu numai cunoștințe mai vaste privind structura cristalină a solidului, ci și cunoștințe de mecanică cuantică.

## § 6.9. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN REGIM CVASISTAȚIONAR

Regimul cvasistaționar al câmpului electromagnetic reprezintă un caz intermediar între regimul staționar și cel variabil. El cuprinde studiul unui domeniu vast de fenomene electromagnetice de mare importanță practică și anume fenomenele care intervin și sînt determinate de curenții alternativi de joasă și medie frecvență. Condiția de cvasistaționaritate a câmpului se exprimă de obicei funcție de raportul dintre perioada  $T$  de variație a câmpului și timpul de relaxare  $\tau$ , care definește rapiditate dispariției unei perturbații electromagnetice din mediul respectiv.

Astfel, dacă

$$\frac{T}{\tau} \gg 1 \quad (6.9.1)$$

câmpul electromagnetic se găsește în regim cvasistaționar.

Nu este greu să constatăm că din condiția (6.9.1) rezultă posibilitatea neglijării curentului de deplasare  $\mathbf{J}_a$  în comparație cu cel de conducție  $\mathbf{J}$  în toate fenomenele ce aparțin regimului cvasistaționar. În adevăr, pentru un câmp alternativ de pulsație  $\omega$ , aflat în prezența unui dielectric, putem scrie

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i\omega t} \quad (6.9.2)$$

și ținînd cont de (6.2.30), curentul de deplasare va fi dat de expresia

$$\mathbf{J}_a = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{2\pi i}{T} \mathbf{D}_0 e^{i\omega t}. \quad (6.9.3)$$

Or,  $T$  fiind de valori relativ ridicate în comparație cu  $\tau$ , putem admite că

$$\mathbf{J} \gg \mathbf{J}_a \simeq 0 \quad (6.9.4)$$



De aceea, ecuațiile lui Maxwell pentru regimul cvasistationar se reduc la forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}; & \nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \nabla \mathbf{D} &= \rho.\end{aligned}\quad (6.9.5)$$

De asemenea, ecuația de continuitate

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.9.6)$$

cu (6.2.30) se reduce la forma

$$\nabla \mathbf{J} = 0 \quad (6.9.7)$$

relație identică cu (6.7.2), întâlnită în cazul regimului staționar.

#### 6.9.1. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

Utilizarea ecuațiilor (6.9.5) pentru obținerea legilor integrale ale circuitelor de curent alternativ nu ridică probleme deosebit de grele. Să considerăm, pentru exemplificare, mai întâi cazul simplu al unui circuit de

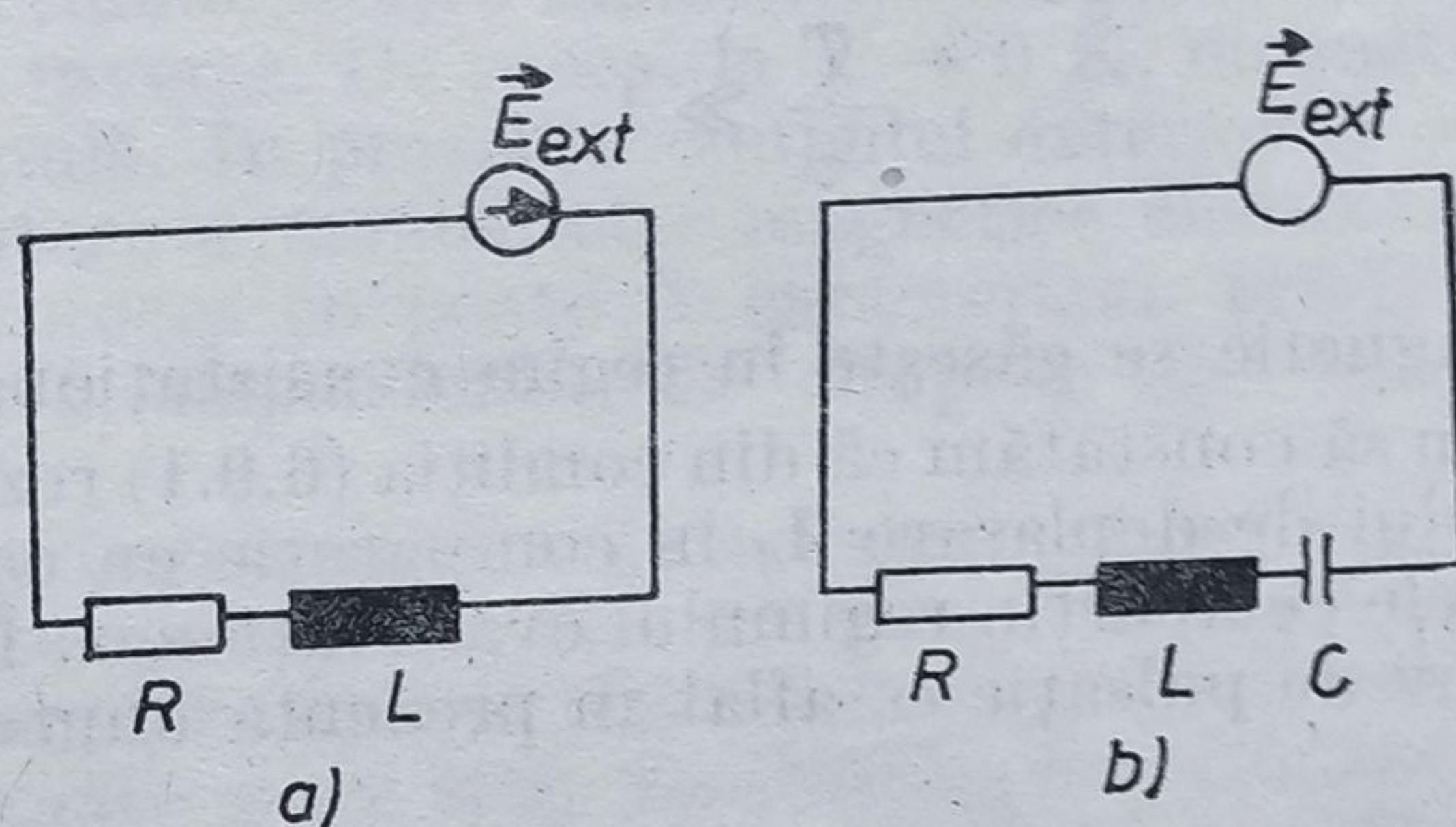


Fig. 6.9.1

curent alternativ închis (fig. 6.9.1), în care sursa de curent electric generează un câmp electric cu variație periodică în timp, de forma

$$\mathbf{E}^{ext} = \mathbf{E}_0^{ext} e^{i\omega t} \quad (6.9.8)$$

$\omega$  fiind pulsația acestuia. Conform legii diferențiale a lui Ohm (6.7.9), integrată pe conturul  $(\Gamma)$  al circuitului, avem

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} ds = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{E} ds + \oint_{(\Gamma)} \mathbf{E}^{ext} ds. \quad (6.9.9)$$



Primul termen din membrul doi al acestei relații poate fi transformat astfel

$$\oint_{(r)} \mathbf{E} ds = \iint_{(s)} (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{S} = - \iint_{(s)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (6.9.10)$$

De asemenea, ținând cont de (6.9.7), putem scrie

$$\oint \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = IR \quad (6.9.10)$$

unde prin  $I$  s-a notat intensitatea curentului din circuit la un anumit moment dat, numită și *intensitate momentană* a curentului. În sfârșit avînd în vedere și faptul că

$$\mathcal{E}(t) = \oint \mathbf{E}^{ext}(t) d\mathbf{s} \quad (6.9.11)$$

reprezintă tensiunea electromotoare (t.e.m.) a sursei de curent, din (6.9.9) rezultă legea

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + IR = \mathcal{E}^{ext}(t). \quad (6.9.12)$$

Pentru circuite simple, cu inductanțe localizate\* și constante în timp, fluxul magnetic  $\Phi$  poate fi exprimat funcție de intensitatea curentului electric  $I$  ce străbate inductanța  $L$  printr-o expresie simplă, de forma (6.8.79) și deci ecuația (6.9.12) se mai poate scrie sub forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}^{ext}(t). \quad (6.9.13)$$

Această egalitate este o ecuație diferențială de ordinul întâi, neomogenă și cu coeficienți constanți, a cărei soluție se poate afla ușor, dacă se cunoaște funcția  $\mathcal{E}^{ext}(t)$ . Astfel, în cazul surselor de curent alternativ, luînd

$$\mathcal{E}^{ext}(t) = E_0 e^{i\omega t} \text{ și } I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (6.9.14)$$

( $\varphi$  reprezintă defazajul între curent și tensiune) și introducînd aceste expresii în (6.9.13) obținem

$$(i\omega L + R) I_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi} \quad (6.9.15)$$

---

\* Întrucît lungimea de undă  $\lambda_0 = cT = 6000 \text{ m}$  este pentru curentul de 50 Hz cu mult mai mare decît lungimea circuitelor obișnuite, constantele electrice  $L, R, C$  pot fi considerate localizate în circuit.



Mărimea

$$\underline{Z} = R + i\omega L \quad (6.9.16)$$

reprezintă *impedanța* (complexă) a circuitului. Partea reală a acestei mărimi (modulul) este *impedanța reală*  $Z$

$$\text{Re}\underline{Z} = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (6.9.17)$$

Pentru defazajul  $\varphi$ , se obține expresia

$$\varphi = \text{arctg} \frac{X_L}{R} \quad (6.9.18)$$

unde prin

$$X_L = L\omega \quad (6.9.19)$$

s-a notat *reactanța inductivă*. Prin urmare, valoarea momentană a curentului  $i$  ce străbate circuitul este dată de expresia

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.9.20)$$

și ea exprimă legea lui Ohm în curent alternativ.

Pentru circuite de curent alternativ cu inductanțe  $L$  localizate și capacități  $C$  localizate (fig. 6.9.1, b) ecuația (6.9.9) trebuie completată cu un termen care să țină seama de câmpul electric  $E^c$  din condensator. Deci această ecuație pentru un circuit cu rezistor, bobină și condensator are forma

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} ds = \oint_{(\Gamma)} \mathbf{E} ds + \oint_{(\Gamma)} \mathbf{E}^c ds + \oint \mathbf{E}^{ext} ds. \quad (6.9.21)$$

Dar pe baza teoremei fluxului electric (6.6.5), pentru un condensator plan cu armături de arie  $S$ , distanțate cu  $d$  una de alta, putem scrie

$$\iint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \varepsilon E^c S = Q; \quad E^c = \frac{Q}{\varepsilon S} \quad (6.9.22)$$

respectiv

$$\oint \mathbf{E}^c ds = \frac{Qd}{\varepsilon S} = \frac{1}{C} \int I dt. \quad (6.9.23)$$

Atunci, ecuația diferențială care va descrie curentul alternativ într-un circuit cu  $R$ ,  $L$  și  $C$  va avea forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}^{ext}(t). \quad (6.9.24)$$



Căutăm și în acest caz o soluție de forma (6.9.14). Prin calcule similare celor efectuate în cazul circuitului de curent alternativ cu rezistor și bobină se găsește expresia

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.9.25)$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (6.9.26)$$

Aici s-a notat prin  $X_C$  reactanța capacitivă

$$X_C = \frac{1}{C\omega}. \quad (6.9.27)$$

Desigur, aceste rezultate sînt bine cunoscute din cursurile elementare de fizică, dar tehnica de calcul folosită aici pentru obținerea lor face parte din tratarea generală a fenomenelor electromagnetice variabile lent în timp. Extinderea acestei tehnici la situații mai complexe (rețele electrice de curent alternativ, oscilații electromagnetice etc.) nu prezintă dificultăți. Ele ies, însă, din cadrul acestui volum) fiind expuse pe larg în tratatele de electrotehnică.

Privite din punct de vedere energetic, circuitele de curent alternativ pot fi descrise prin intermediul noțiunilor de putere activă  $P_a$ , putere reactivă  $P_r$  și putere aparentă  $P$ , definite prin relațiile

$$P_a = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi; \quad P_r = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi; \quad P = U_{ef} I_{ef} \quad (6.9.28)$$

în care  $U_{ef}$  și  $I_{ef}$  reprezintă valorile efective ale mărimilor respective  $\left( U_{ef} = \frac{\sqrt{1}}{2} U_0; I_{ef} = \frac{\sqrt{1}}{2} I_0 \right)$ . Puterea activă  $P_a$  reprezintă pentru un circuit cu rezistor, căldura Joule disipată în acesta, în unitate de timp. De notat că în reactanțe ideale (inductive sau capacitive), căldura Joule disipată este egală cu zero, pentru că în aceste elemente  $\varphi = \pm \pi/2$ .

### 6.9.2. CĂLDURA DISIPATĂ ÎN PROCESE DE POLARIZARE ELECTRICĂ ȘI MAGNETICĂ A SUBSTANTELOR

În § 6.3 s-a arătat că la interacția cîmpului electromagnetic cu substanța se degajă căldură în toate regimurile acestuia, afară de cel static. Este vorba atît de o căldură Joule disipată pe curenți de conducție, cît și de căldura ce se degajă în procesele de polarizare electrică și magnetică a substanțelor.

În aceste procese de polarizare electrică și magnetică intervin mecanisme deosebit de interesante care fac ca energia disipată sub formă de căldură să crească cu frecvența cîmpului electromagnetic respectiv. Majori-



patea dintre ele prezintă și interes practic, deoarece intervin în procesele care le determină curenții alternativi de frecvență joasă utilizați în electronică și electrotehnică. De aceea, prezentăm succint această problemă a pierderilor de energie sub formă de căldură în procesele de polarizare electrică și magnetică în cadrul aproximației regimului cvasivariabil

a) **Pierderi în dielectrice.** La introducerea substanțelor dielectrice între armăturile unui condensator alimentat în curent alternativ se constată că substanța respectivă se încălzește. Acest efect pare surprinzător, dacă ținem seama de faptul că curentul alternativ n-ar trebui să dezvolte o putere activă într-o reactanță ideală  $X_c$ , așa cum s-a văzut mai sus (formula (6.9.28)). Pentru a obține o descriere clasică a pierderilor de energie sub formă de căldură în dielectrice vom folosi legile diferențiale clasice care exprimă energia disipată de un câmp electromagnetic într-o substanță dielectrică. Astfel, pentru un mediu dielectric omogen polarizat electric, în locul expresiei (6.9.28) pentru puterea activă  $P_a$  vom scrie o relație locală pentru puterea disipată de forma (6.3.13), adică

$$P_{dis} = \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{E} \quad (6.9.29)$$

în care, fiind vorba de substanțe dielectrice, se poate neglija curentul de conducție  $\mathbf{J}$  în comparație cu cel de deplasare

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \simeq \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.9.30)$$

deci

$$P_{dis} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.9.31)$$

Pentru un câmp electric polarizant alternativ, de pulsație  $\omega$  ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ ), vectorul  $\mathbf{J}_a = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\epsilon\omega\mathbf{E}$  este perpendicular pe  $\mathbf{E}$  și, prin urmare, puterea disipată  $P_{dis}$ , dată de (6.9.31) va fi nulă numai dacă vectorii  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{D}$  (respectiv  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{P}$ ) sînt coliniari și variază în fază. Înseamnă că aceste condiții nu sînt îndeplinite pentru substanțele dielectrice reale. Într-adevăr, procesele de orientare a dipolilor electrici elementari pe direcția câmpului electric polarizant, în cazul dielectricilor polari și inducerea unor astfel de dipoli în dielectricei nepolari nu se produc instantaneu, ci într-un anumit interval de timp  $\tau$  — de la aplicarea câmpului, numit timp de relaxare. Timpul de relaxare poate fi condiționat de fluctuațiile termice și de interacțiunile dipolului cu câmpul cristalin local în dielectricei polari sau de rapiditatea cu care se stabilește noua configurație de echilibru a sarcinilor legate în dielectricei nepolari. Toate aceste procese fac ca vectorii  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{D}$  (respectiv  $\mathbf{P}$ ) să nu fie coliniari, iar variațiile lor în timp să nu se facă în fază.

Din această cauză, în cazul condensatorului prezentat în fig. 6.9.1, b curentul  $I$  nu va fi defazat față de tensiunea  $U$  exact cu  $90^\circ$  (cum este



de exemplu componenta reactivă  $I_r$ ; vezi fig. 6.9.2), ci cu un unghi  $\varphi \lesssim 90^\circ$ . Diferența

$$\delta = 90^\circ - \varphi \quad (6.9.32)$$

a primit numele de *unghi de pierdere*, pentru că de valoarea lui depinde energia disipată sub formă de căldură în dielectricul respectiv.

Notînd cu  $I_a$  componenta în fază cu  $U$  a lui  $I$  (curentul activ) se vede că se poate scrie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a}{I_r}. \quad (6.9.33)$$

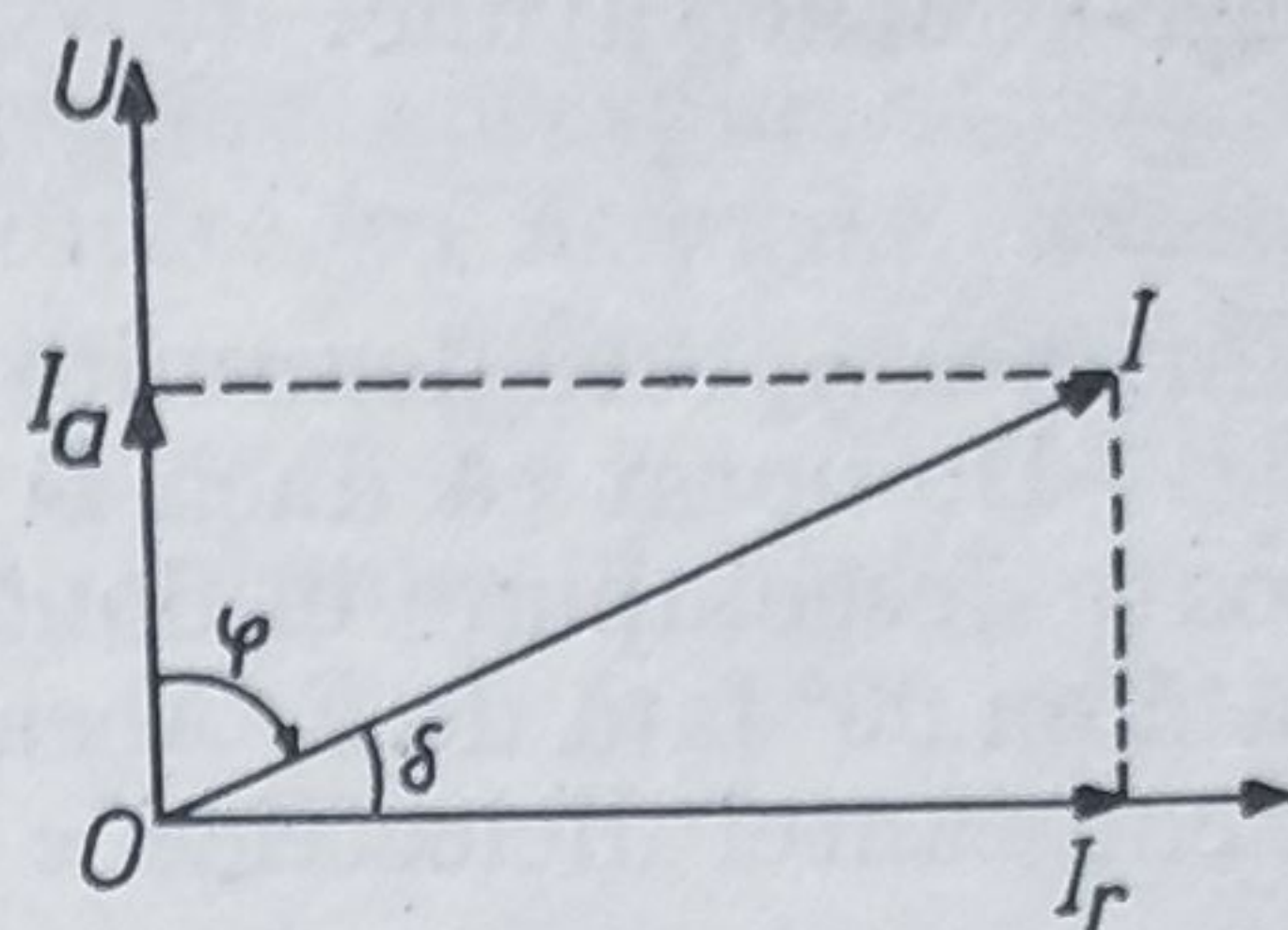


Fig. 6.9.2

Atunci, puterea activă disipată sub formă de căldură în condensator, va fi dată de expresia

$$P_{dis} = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi = U_{ef} I_a = U_{ef} I_r \operatorname{tg} \delta \quad (6.9.34)$$

unde

$$I_r = \frac{U}{X_c} = U \omega C. \quad (6.9.35)$$

Mărimea

$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \operatorname{tg} \varphi \quad (6.9.36)$$

se numește *factor de calitate* al dielectricului. Pentru un dielectric omogen și izotrop, care umple complet volumul cuprins între armăturile unui condensator plan, de arie  $S$ , distanțate cu  $d$  între ele, relația (6.9.34) devine

$$P_{dis} = U_{ef}^2 \omega C \cdot \operatorname{tg} \delta = 2\pi U_{ef}^2 \nu \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \operatorname{tg} \delta. \quad (6.9.37)$$

Această relație ne arată că puterea disipată în dielectric crește proporțional cu frecvența  $\nu$  a tensiunii electrice aplicate.

Formulei (6.9.37) i se poate da ușor o formă locală, luînd ca element de volum un cub cu muchia  $dl$ , pentru care se pot face următoarele echivalări:  $S \rightarrow (dl)^2$ ;  $d \rightarrow dl$ ;  $U \rightarrow Edl$ . Se obține

$$p_{dis} = \frac{dP_{dis}}{dV} = E^2 \omega \epsilon_0 \epsilon_r \operatorname{tg} \delta. \quad (6.9.38)$$

Se remarcă faptul că această lege este analogă relației (6.7.30), care exprimă căldura Joule disipată de către curentul de conducție în volumul ( $V$ ) al conductorului și în timpul  $t$ , ceea ce ne permite să introducem notația

$$\sigma_a = \omega \epsilon \operatorname{tg} \delta. \quad (6.9.39)$$



Într-adevăr, atunci

$$P_{dis} = \sigma_a E^2 \quad (6.9.40)$$

Mărimea  $\sigma_a$  este denumită *coeficient de conductivitate activă* a dielectricului.

De notat că dacă  $\mathbf{D}$  nu variază în fază cu  $\mathbf{E}$ , atunci acest vector se poate descompune în două componente, una în fază cu  $\mathbf{E}$  și cealaltă defazată cu  $90^\circ$  față de  $\mathbf{E}$ . Această descompunere se obține prin simpla înlocuire a constantei dielectrice  $\epsilon$  cu o mărime complexă  $\underline{\epsilon}$ , de forma

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_{real} - i\epsilon_{imag} \quad (6.9.41)$$

în care caz relația

$$\mathbf{D} = \underline{\epsilon} \mathbf{E} \quad (6.9.42)$$

devine o relație complexă. Pentru un câmp electric alternativ  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$  va rezulta că și curentul de deplasare se poate descompune în doi termeni de forma

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \epsilon_{real} - i\epsilon_{imag} \right) \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \right] = i\omega \epsilon_{real} \mathbf{E} + \omega \epsilon_{imag} \mathbf{E} \quad (6.9.43)$$

dintre care termenul real  $\mathbf{J}_{d_{real}} = \omega \epsilon_{imag} \mathbf{E}$  este în fază cu  $\mathbf{E}$ . De aceea, putem scrie

$$P_{dis} = \mathbf{J}_{d_{real}} \cdot \mathbf{E} = \omega \epsilon_{imag} \cdot E^2. \quad (6.9.44)$$

Și în această tratare se poate defini unghiul de pierdere  $\delta$ , prin relația

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon_{imag}}{\epsilon_{real}}. \quad (6.9.45)$$

Deci

$$P_{dis} = \omega E^2 \epsilon_{real} \operatorname{tg} \delta. \quad (6.9.46)$$

b) **Pierderi prin magnetizare.** Desigur că și aceste pierderi își au originea în fenomene analoge celor prezentate mai sus (doar că ele sînt de natură magnetică), iar în studiul lor s-ar putea păstra analogia cu cazul dielectricilor. Totuși, experiența arată că procesele de relaxare magnetică în substanțe paramagnetice și diamagnetice sînt însoțite de pierderi neînsemnate de energie sub formă de căldură\*. În substanțele cu ordonare magnetică, s-a văzut că energia disipată sub formă de căldură pe ciclu de magnetizare este dată de aria buclei de histereză, trasată în coordonatele  $M-H$  (vezi fig. 6.8.5).

Dar, pe lângă pierderile prezentate mai sus, în cazul substanțelor cu ordonare magnetică introduse în câmpuri variabile în timp, mai intervin și alte procese care determină pierderi însemnate de energie sub formă de căldură, mai ales în cazul metalelor. Este vorba în primul rînd de pierderile pe curenții de inducție ( $P_{dis} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ), generați de însuși câmpul magnetic

\* Acestea se realizează doar în fenomenele de rezonanță magnetică de spin [72].



variabil în timp. Acești curenți, numiți și *turbionari*, cresc în intensitate odată cu frecvența câmpului și determină o creștere corespunzătoare a căldurii disipate în probă, cu efecte de cele mai multe ori nedorite. Există câteva posibilități de diminuare a acestui proces: a) divizarea corpului metalic în componente subțiri izolate (tole); b) alierea Fe cu Al sau Si, pentru creșterea rezistivității lui electrice  $\rho$ ; c) folosirea feritelor.

## § 6.10. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN REGIM VARIABIL. UNDE ELECTROMAGNETICE

Câmpul electromagnetic se găsește în regim variabil dacă componentele sale variază în timp, iar din interacțiunea lui cu substanța rezultă căldură. În § 6.3 s-a arătat că un câmp electromagnetic variabil în timp se propagă sub formă de unde electromagnetice. Într-adevăr, din primele două perechi de ecuații Maxwell (6.2.37)–(6.2.40) scrise pentru vid, în lipsa sarcinilor  $\rho = 0$  și a curenților ( $\mathbf{J} = 0$ ),

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0\end{aligned}\quad (6.10.1)$$

se obține

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}).$$

Folosind în membrul întâi relația vectorială  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  și înlocuind pe  $\nabla \times \mathbf{H}$  cu expresia dată de a treia ecuație (6.10.1) după calcule simple rezultă ecuația

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.10.2)$$

sau cu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (6.10.3)$$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.10.4)$$



O ecuație analogă se va obține și pentru  $\mathbf{H}$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.10.5)$$

Ambele aceste ecuații (6.10.4) și (6.10.5) au structura matematică a ecuației diferențiale a undelor (2.5.13), ceea ce înseamnă că câmpul electromagnetic descris de aceste ecuații se va propaga din aproape în aproape sub formă de unde electromagnetice.

Pentru a afla valorile lui  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  care satisfac aceste ecuații, respectiv pentru a putea desprinde câteva proprietăți ale acestor unde (inclusiv a caracteristicilor care descriu procesul de generare a lor de către sarcinile electrice aflate în mișcare) este avantajos să se folosească tot metoda potențialelor electrodinamice. În regim variabil și pentru vid, potențialele vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  și scalar  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  trebuie să satisfacă ecuații Poisson de tipul

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (6.10.6)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

cu condiția suplimentară Lorentz

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (6.10.7)$$

Se remarcă faptul că în lipsa sarcinilor electrice și a curenților de conducție ( $\rho = 0$ ;  $\mathbf{J} = 0$ ) ecuațiile (6.10.6) se reduc la forma ecuației diferențiale a undelor

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.10.8)$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

#### 6.10.1 CÂMPUL ELECTROMAGNETIC CREAT DE SARCINI ELECTRICE ÎN MIȘCARE. POTENȚIALELE RETARDATE

Experiența demonstrează că o sarcină electrică aflată în mișcare generează un câmp electromagnetic, care va fi variabil în timp, dacă mișcarea sarcinii nu este rectilinie și uniformă. Înseamnă că acest câmp se va propaga din locul în care a fost generat sub formă de unde electromagnetice.



Se știe că dacă sarcinile electrice generatoare de câmp se consideră de formă punctuală, atunci câmpul electromagnetic prezintă discontinuități pe sarcinile respective (de exemplu,  $\mathbf{E} \rightarrow \infty$ , când  $r \rightarrow 0$ ; vezi (6.6.10)). De aceea, calculele se vor putea face numai pentru un domeniu din care s-a exclus porțiunea din imediata apropiere a sarcinii. De altfel, aproximația de sarcină punctiformă rămâne valabilă numai pentru distanțe mari față de sarcină a locului în care calculăm câmpul, în comparație cu dimensiunile geometrice ale acesteia.

Dacă sarcina electrică se găsește într-un mediu omogen și izotrop, atunci în aproximația menționată mai sus componentele câmpului electromagnetic ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ) se vor putea obține din rezolvarea ecuațiilor (6.10.8). Introducând notația

$$F_\alpha (F_\alpha = A_x, A_y, A_z, \varphi) \quad (6.10.9)$$

și ținând cont de simetria sferică a problemei, ecuațiile (6.10.8) se reduc la forma

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial t^2} = 0. \quad (6.10.10)$$

În § 2.5 s-a arătat că soluția unei astfel de ecuații, care reprezintă un proces ondulatoriu ce se propagă în lungul lui  $r$  este compusă din doi termeni de forma

$$F_\alpha = \frac{f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{r}. \quad (6.10.11)$$

Primul termen  $\frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)$  descrie o *undă progresivă* ce se propagă în sensul pozitiv al direcției  $\mathbf{r}$ , iar al doilea termen  $\frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)$  o *undă regresivă* care se propagă în sens invers lui  $\mathbf{r}$ .

Este ușor de verificat că cele două funcții  $f_1/r$  și  $f_2/r$  sînt soluții liniar independente ale ecuației (6.10.10), ceea ce înseamnă că pentru descrierea fenomenului respectiv (propagarea câmpului) este suficient să folosim numai una dintre aceste soluții. Va fi aleasă, firește, soluția care prezintă o semnificație certă în fizica clasică, respectiv aceea care la limita ( $r \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ) se anulează. Se poate constata ușor că acestei cerințe îi satisface numai soluția

$$F_\alpha = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right) \quad (6.10.12)$$

care descrie unda progresivă (cealaltă soluție are argumentul nedeterminat la limita  $r \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ).



De aceea, vom lua

$$A_{x,y,z} \sim \frac{1}{r} f\left(t - \frac{|r|}{c}\right); \quad \varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{|r|}{c}\right). \quad (6.10.13)$$

Forma concretă a acestor expresii rezultă din faptul că în aproximația statică, respectiv staționară erau valabile relațiile

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'}{r}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\mathcal{V}'. \quad (6.10.14)$$

Înseamnă că pentru un sistem de sarcini localizat în  $\mathbf{r}$ , potențialele electrodinamice ale câmpului creat în punctul  $\mathbf{R}$  (fig. 6.10.1) sînt date de expresiile

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d\mathcal{V} \quad (6.10.15)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d\mathcal{V}. \quad (6.10.16)$$

Aceste expresii sînt analoge celor din cazul static (6.10.14), dar ele ne spun că potențialele din punctul  $\mathbf{R}$ , la momentul  $t$  sînt determinate de distribuțiile sarcinilor electrice  $\rho$  și ale curenților  $\mathbf{J}$ , existente în punctul  $\mathbf{r}$ , la momentul anterior  $t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}$ . Din aceas-

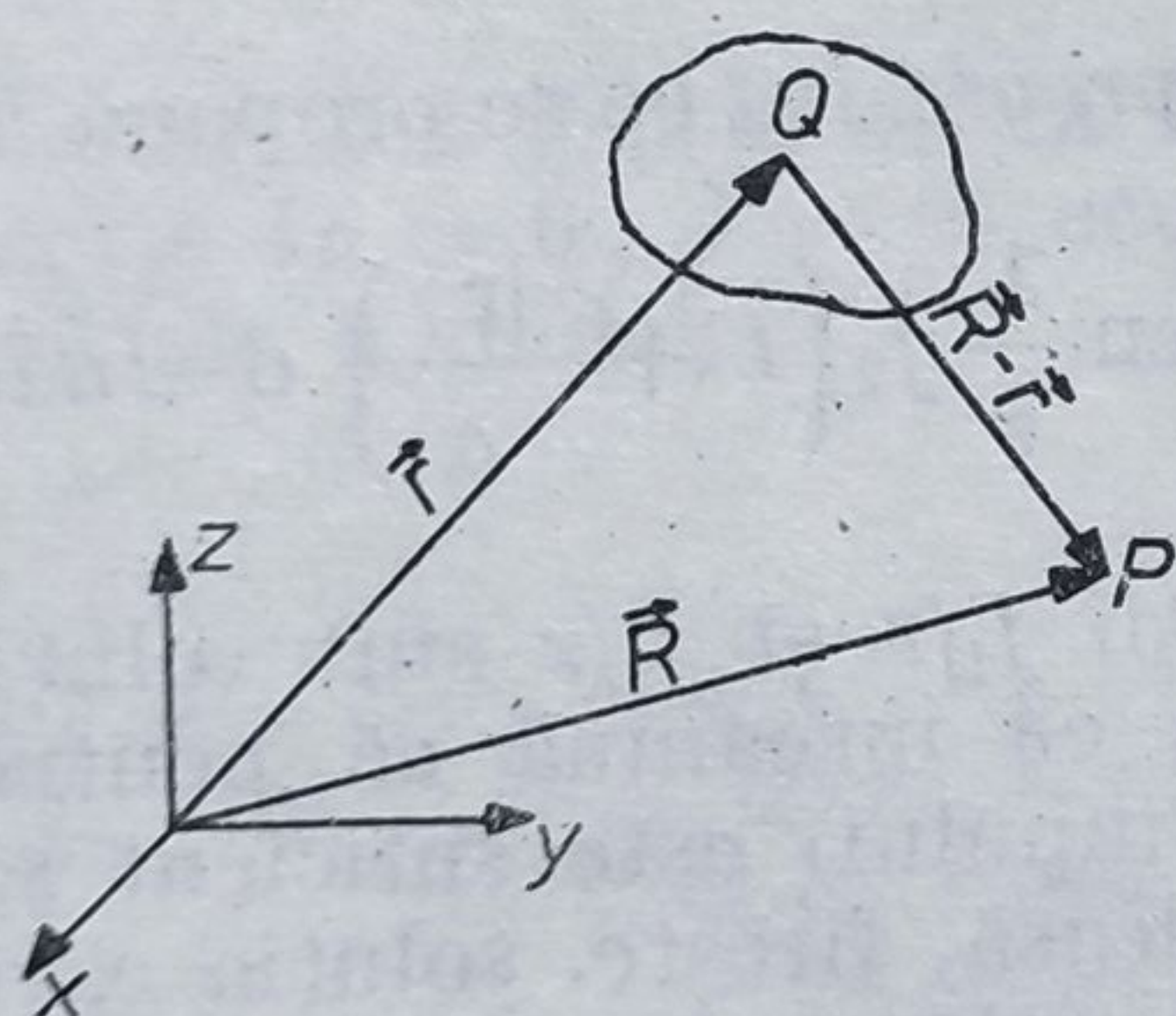


Fig. 6.10.1

tă cauză, potențialele electrodinamice de forma (6.10.15) și (6.10.16) au fost numite *potențiale retardate*. Ele exprimă în mod nemijlocit faptul că câmpul electromagnetic se propagă cu o viteză finită.

#### 6.10.2 OSCILATORUL ELECTRIC IN APROXIMAȚIA DE DIPOL. EMISIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

Pentru a putea desprinde cîteva dintre caracteristicile procesului de emisie a undelor electromagnetice de către sarcinile electrice aflate în mișcare vom particulariza rezultatele (6.10.15) și (6.10.16) pentru cazul cînd punctul în care dorim să calculăm câmpul se găsește la distanță mare față de sistemul de sarcini care îl generează. Vom admite deci că  $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}|$ , în care caz se poate face aproximația

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \simeq |\mathbf{R}| = R. \quad (6.10.17)$$



Avînd în vedere că  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , pentru un sistem de sarcini  $Q_i$ , aflate în mișcare cu vitezele  $\mathbf{v}_i$ , expresia (6.10.16) se va reduce la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left( \sum_i Q_i \mathbf{v}_i \right)_{\tau=t-\frac{R}{c}} \quad (6.10.18)$$

sau

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{d}{dt} (\Sigma Q_i \mathbf{r}_i)_{\tau} \quad (6.10.19)$$

Utilizînd aici relația (6.6.38) care definește momentul electric dipolar al sistemului de sarcini electrice, avem

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{d\mathbf{p}(\tau)}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}(\tau) \quad (6.10.20)$$

în care

$$\tau = t - \frac{|\mathbf{R}|}{c} \quad (6.10.21)$$

marchează timpul retardat.

Prin urmare, potențialul  $\mathbf{A}$  este determinat, în aproximația precizată mai sus, de viteza de variație a momentului dipolar electric  $\mathbf{p}$ . Această aproximație este cunoscută în teoria radiației sub denumirea de „aproximația de dipol”.

Potențialul scalar poate fi aflat, fie prin particularizarea ecuației (6.10.15) pentru cazul aproximației de dipol, fie mai simplu, prin folosirea condiției de etalonare Lorentz (6.10.7). Din condiția Lorentz se obține\*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \nabla \mathbf{A} = -c^2 \nabla \left[ \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(\tau)}{4\pi R} \right] = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \ddot{\mathbf{p}}(\tau) \cdot \mathbf{e} \quad (6.10.22)$$

în care  $\mathbf{e} = \mathbf{R}/R$  este versorul direcției  $\mathbf{R}$ .

Pe baza acestor rezultate putem calcula componentele  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  ale câmpului electromagnetic generat de dipol, respectiv ale undei electromagnetice care se propagă în lungul direcției  $\mathbf{R}$ . Folosind relațiile (6.4.1) și (6.4.4) avem

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\dot{\mathbf{p}}(\tau)}{R} \right) = \frac{1}{4\pi R} \nabla \times \dot{\mathbf{p}}(\tau) = \\ &= \frac{1}{4\pi R c} (\ddot{\mathbf{p}}(\tau) \times \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (6.10.23)$$

\* În calculele ce urmează s-au neglijat termenii mici în  $1/R^2$ .



pentru că  $\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(\tau) = \frac{1}{c} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e})$  și

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi R} \ddot{\mathbf{p}}(\tau) - \frac{\mu_0 c}{4\pi R} \nabla \ddot{\mathbf{p}}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi R} [\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{p}})]. \quad (6.10.24)$$

Se remarcă faptul că între cei doi vectori de câmp  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  există relațiile

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\mathbf{e} \times \mathbf{H}) \quad (6.10.25)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{e}) \quad (6.10.26)$$

care se obțin din (6.10.23) și (6.10.24), avînd în vedere că  $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$ . Prin urmare, vectorii  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{e}$  formează un triedru local drept respectiv

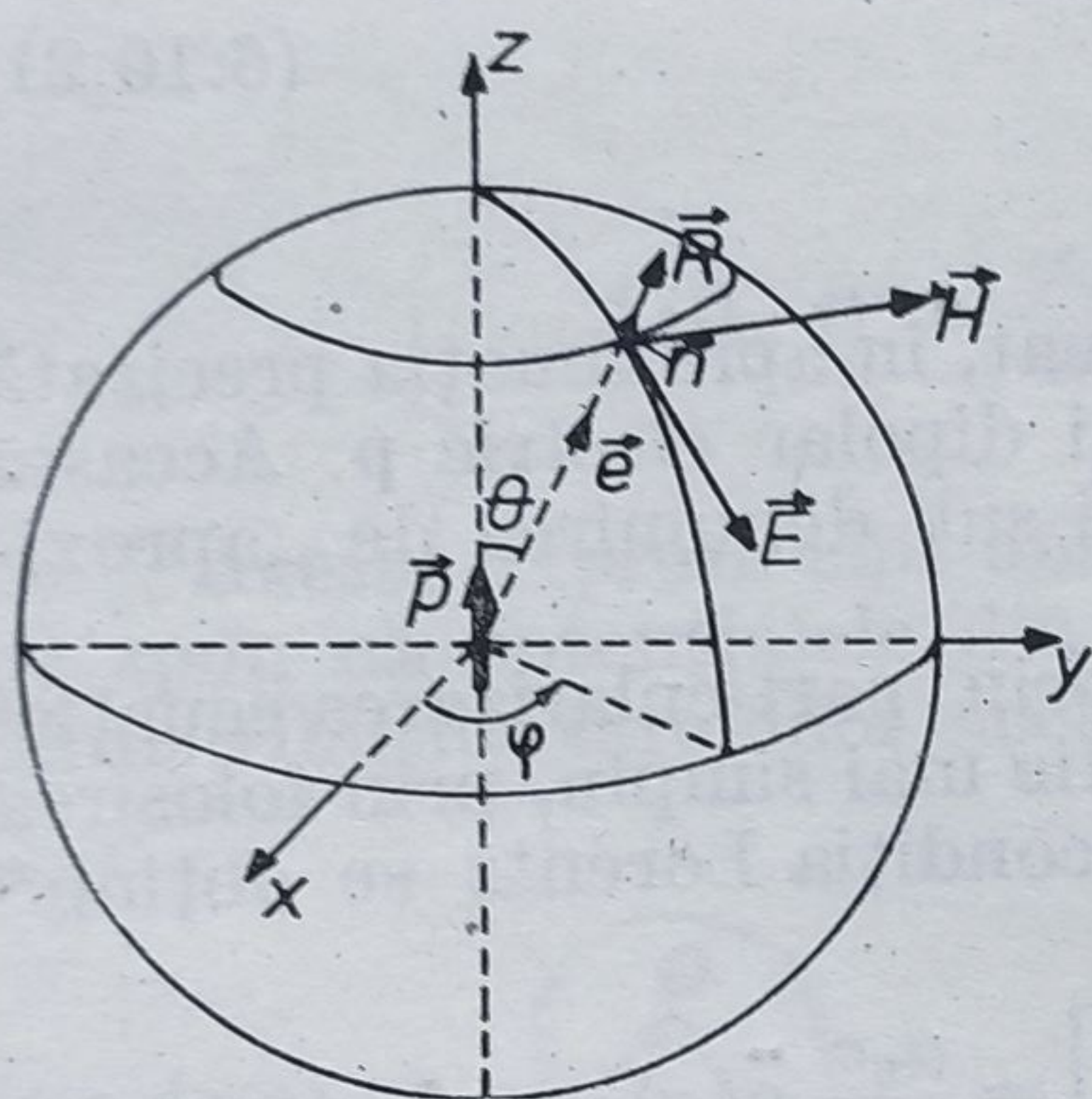


Fig. 6.10.2

unda electromagnetică este o undă transversală pentru că  $\mathbf{E}$  (orientat tangent la cercul meridian ce trece prin punctul de observație  $P$ ) și  $\mathbf{H}$  (orientat tangent la cercul paralel ce trece prin  $P$ ; vezi fig. 6.10.2) vibrează perpendicular pe direcția  $\mathbf{e}$ . Această direcție reprezintă tocmai direcția de propagare a undei, deoarece  $\mathbf{e}$  este în același timp și versorul vectorului Poynting  $\mathbf{S}_P$ . Într-adevăr

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_P = \mathbf{E} \times \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [(\mathbf{e} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H^2 \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (6.10.27)$$

Dacă dipolul  $\mathbf{p}$  este orientat în lungul axei  $Oz$ , care face unghiul  $\theta$  cu direcția de propagare  $\mathbf{e}$  și luăm în considerare expresia (6.10.23), obținem

$$\mathbf{S}_P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c R^2} \ddot{p}(\tau)^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \mathbf{e}. \quad (6.10.28)$$

Avînd în vedere legea conservării energiei și faptul că dipolul electric oscilant radiază în vid, se constată că toată energia emisă de dipol în unitatea de timp se va regăsi sub formă de energie radiantă care străbate suprafața închisă ( $S$ ) ce înconjoară dipolul. Deci, putem scrie

$$\frac{dW}{dt} = \oint\oint_{(S)} \mathbf{S}_P \cdot d\mathbf{S} \quad (6.10.29)$$



Alegînd suprafața ( $S$ ) de formă sferică și de rază  $R$  suficient de mare (con-  
diție cerută și de aproximația de dipol) și folosind coordonatele sferice  $R$ ,  
 $\theta$  și  $\varphi$ , avem

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 \ddot{p}(\tau)^2}{16\pi^2 c R^2} \cdot R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}. \quad (6.10.30)$$

Pe baza acestui rezultat se pot stabili următoarele concluzii:

— o sarcină electrică emite energie radiantă numai atunci cînd se  
mișcă neuniform ( $\ddot{p} = Q\ddot{r} \neq 0$ ).

— intensitatea radiației electromagnetice este maximă pe direcția  
transversală dipolului ( $\theta = 90^\circ$ ) și nulă pe direcția acestuia ( $\theta = 0^\circ$ ).  
Cu alte cuvinte, dipolul oscilant nu radiază în lungul direcției sale.

Aceste concluzii sînt bine verificate de datele experimentale la nivel  
macroscopic. De exemplu, antenele de emisie a undelor electromagnetice  
în gama radioelectrică ( $\nu = 10^4 \div 10^8$  Hz) sînt de fapt dipoli electrici osci-  
lanți, care radiază energie potrivit legilor stabilite mai sus. Dar încercarea  
de a extinde aceste rezultate la studiul unor fenomene atomice și subato-  
mice s-a soldat cu un eșec total. Astfel, dacă se admite că electronii atomici,  
aflați în mișcarea lor orbitală în jurul nucleului emit radiații electromagne-  
tice (în spectrul vizibil) în conformitate cu predicția electrodinamicii cla-  
sice, atunci ca urmare a pierderii de energie, ei ar trebui să se apropie  
treptat de nucleu și să „cadă” în cele din urmă pe acesta. Ar trebui deci, ca  
radiația emisă să aibă un spectru continuu de frecvență, iar atomii să posede  
o stabilitate limitată în timp. Nici una dintre aceste concluzii nu este  
în concordanță cu faptele experimentale și mai ales „catastrofa” stabili-  
tății atomice a arătat în mod pregnant că teoriile clasice ale electromagne-  
tismului au un domeniu limitat de valabilitate.

### 6.10.3. UNDE ELECTROMAGNETICE MONOCROMATICE

Vom expune în acest paragraf una dintre problemele cele mai simple  
ale teoriei undelor electromagnetice și anume cea referitoare la undele  
monocromatice. Denumirea este luată din optică (vezi § 7.1), unde se  
numesc monocromatice, radiațiile luminoase de aceeași culoare.

Pentru a înțelege semnificația fizică a acestor unde și modul lor de  
descriere, să presupunem că dipolul electric oscilant, considerat în para-  
graful anterior, oscilează armonic, respectiv că frecvența lui este constantă  
( $\nu = \text{const.}$ ). Atunci valoarea momentului său dipolar va fi o funcție armo-  
nică de timp, de forma \*

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.10.31)$$

\* Scrierea exponențială din (6.10.31) este echivalentă cu scrierea trigonometrică a func-  
ției  $p(t) = Q \cdot x(t) = Q \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  din cazul oscilatorului armonic elastic (vezi § 1.7)  
pentru că  $\text{Re} p(t) = p_0 \cos \omega t$ .



În acest caz, și câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  ale unde electromagnetice generată de dipol vor fi funcții armonice de timp, pentru că din (6.10.23), de exemplu, rezultă

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{4\pi cR} \omega^2(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_0) e^{-i\omega t} = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.10.32)$$

în care s-a introdus notația.

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\omega^2(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_0)}{4\pi cR} \quad (6.10.32)$$

care joacă rol de amplitudine în variația armonică în timp a lui  $\mathbf{H}(t)$ . În mod analog se obține

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.10.33)$$

Vom admite, în continuare, că unda electromagnetică se propagă într-un mediu dielectric omogen și izotrop, lipsit de sarcini libere ( $\rho = 0$ ) și de curenți de conducție ( $\mathbf{J} = 0$ ). În acest caz, ecuațiile lui Maxwell (6.2.37) și (6.2.39) se reduc la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (6.10.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}. \quad (6.10.35)$$

Pentru a elimina din prima ecuație funcția  $\mathbf{H}$ , o înmulțim la stînga vectorial cu operatorul  $\nabla$  și ținem cont de faptul că  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Găsim

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}$$

sau

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -i^2\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}$$

Deci

$$\Delta \mathbf{E} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = 0. \quad (6.10.36)$$

În mod analog, pentru  $\mathbf{H}$  se obține ecuația

$$\Delta \mathbf{H} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} = 0. \quad (6.10.37)$$

Așa cum se va arăta în continuare, dacă intervine o absorbție sau o dispersie a unde în mediul de propagare, atunci constantele de material  $\varepsilon$  și  $\mu$  depind de pulsația  $\omega$ . Vom neglija pentru moment aceste dependente și vom introduce notația

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon. \quad (6.10.38)$$



Se vede că dacă ținem seama de relația (6.10.3), avem

$$\mu_e = \frac{1}{v^2} = \frac{n^2}{c^2} \quad (6.10.39)$$

$n$  fiind *indicele de refracție* absolut (în raport cu vidul) al mediului respectiv. Deci

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n^2 \left( \frac{2\pi}{Tc} \right)^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2}$$

respectiv

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n = k_0 n \quad (6.10.40)$$

unde mărimea

$$\lambda = cT \quad (6.10.41)$$

reprezintă lungimea de undă a undei electromagnetice respective. Prin analogie cu (2.6.4), vom numi mărimea  $k$  definită prin (6.10.40), *număr de undă*. Semnificația lui fizică se obține ușor, dacă se caută soluțiile ecuațiilor (6.10.36) și (6.10.37) scrise, prin intermediul lui  $k$ , sub forma

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0; \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6.10.42)$$

adică funcțiile  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  și  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . În acest scop trebuie alese cazuri particulare de simetrie ale problemei studiate. Vom expune succint două astfel de cazuri particulare.

**Unde plane.** Admitem că unda se propagă în lungul axei  $Ox$ , caz în care ecuațiile (6.10.42) se reduc la forma ecuației diferențiale a oscilatorului armonic (vezi § 1.7.1)

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} + k_x^2 E_x = 0; \quad \frac{d^2 H_x}{dx^2} + k_x^2 H_x = 0, \quad (6.10.43)$$

Soluțiile acestor ecuații sînt

$$E_x = E_0 e^{-i(k_x x + \varphi_E)}; \quad H_x = H_0 e^{-i(k_x x + \varphi_H)} \quad (6.10.44)$$

sau, ținînd cont și de (6.10.33),

$$E_x(x, t) = E_0 e^{-i(\omega t - k_x x - \varphi_E)}. \quad (6.10.45)$$

Soluții corespunzătoare se obțin și dacă unda se propagă în lungul axelor  $Oy$  sau  $Oz$ , ceea ce înseamnă că pentru o direcție de propagare oarecare, se poate introduce vectorul

$$\mathbf{k} = i k_x + j k_y + k k_z \quad (6.10.46)$$



numit *vector de undă* (sau vector de propagare). Unda plană ce se propagă în lungul direcției  $\mathbf{k}$  (fig. 6.10.3) va fi descrisă de o funcție de forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_E)} \quad (6.10.47)$$

$\varphi_E$  reprezentând faza inițială a undei.

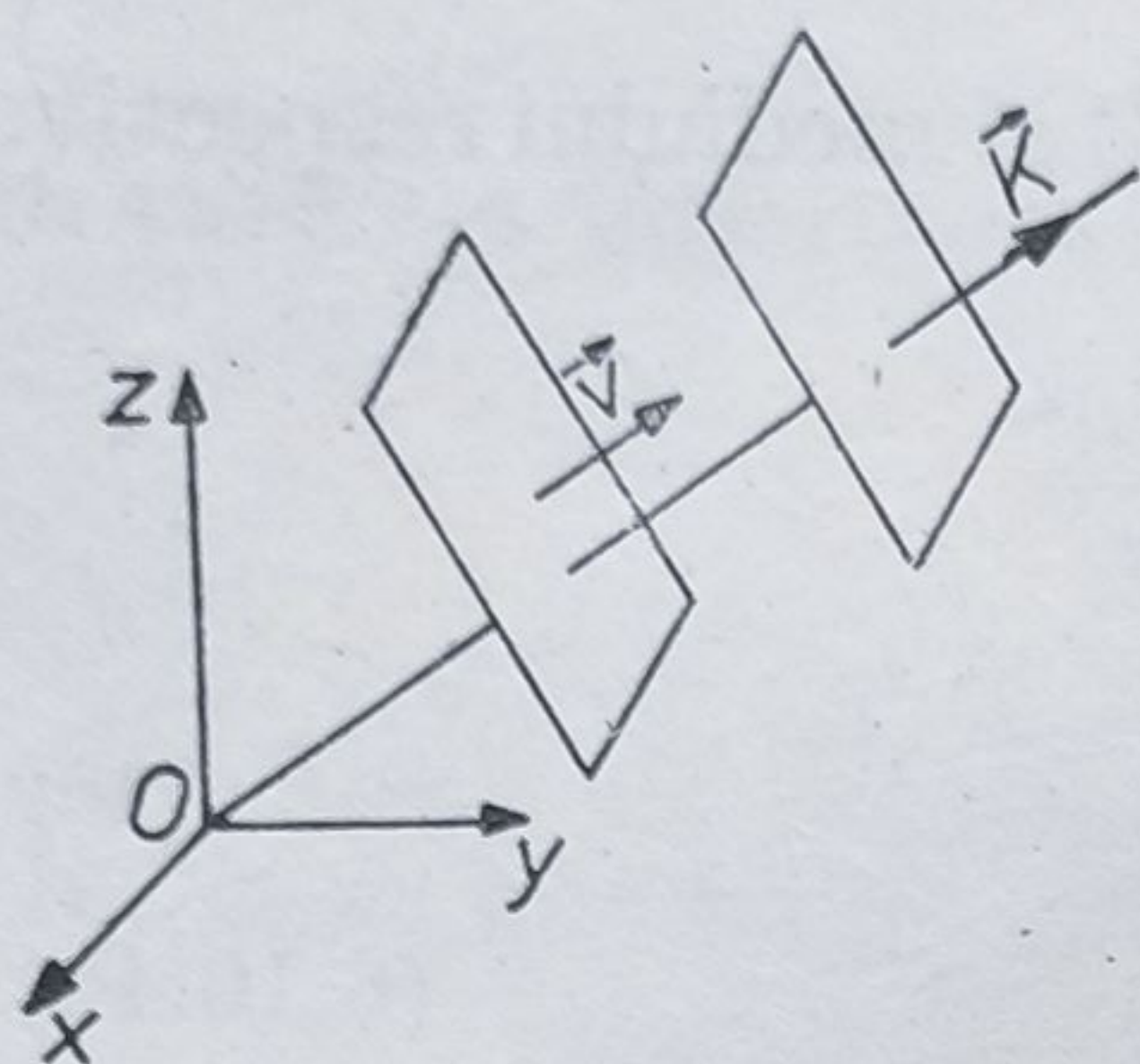


Fig. 6.10.3

Se observă din (6.10.47) că locul geometric al punctelor în care, la un moment dat  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  este constant este definit de condiția

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E = \text{const.}, \quad t = \text{const.}$$

sau

$$xk_x + yk_y + zk_z = \text{const.} \quad (6.10.48)$$

Această ecuație definește un plan normal la  $\mathbf{k}$  (fig. 6.10.3), numit plan de fază constantă sau *suprafața de undă*. Prin urmare, în cazul

undelor plane, suprafețele de undă sînt plane paralele între ele. Aceste plane se deplasează cu viteza

$$v_f = \frac{x}{t} = \frac{k}{\omega} \quad (6.10.49)$$

numită *viteză de fază*. De notat, deci, că în cazul undelor monocromatice intervin variații periodice ale cîmpului electromagnetic, în timp (cu pulsația temporală  $\omega$ ) și variații periodice spațiale (cu pulsația spațială  $k$ ).

**Unde sferice.** Dacă cîmpul electromagnetic al undelor prezintă o simetrie sferică, atunci ecuațiile (6.10.42) se reduc la ecuații de forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dE}{dr} \right) + k^2 E = 0. \quad (6.10.50)$$

Soluția unei astfel de ecuații se obține în mod similar cu cel folosit în § 2.5 și este de forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_E)}.$$

Ținînd cont și de dependența de timp (6.10.33), obținem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_E)}. \quad (6.10.51)$$

Se vede că în acest caz suprafețele de undă sînt sfere concentrice, din care cauză undele se numesc sferice. De notat că în cazul undelor sferice, amplitudinea undei scade invers proporțional cu distanța față de sursă.



#### § 6.10.4. UNDE ELECTROMAGNETICE NEMOCNOCROMATICE. NOȚIUNEA DE RAZĂ A UNDEI

În practică se întâlnesc destul de rar unde monocromatice, pentru că acestea presupun emisii continue de radiații (de aceeași pulsație  $\omega$ ) și lipsa dispersiei (în cazul când pe aceeași direcție s-ar propaga mai multe unde monocromatice de frecvențe diferite — cazul undelor luminoase — iar mediul este dispersiv, intervine fenomenul de dispersie vezi § 7.5). De regulă, procesul de emisie este fragmentat, transmițându-se de fapt semnale electromagnetice de forme (ca amplitudine) și lungimi diferite. Dar s-a constatat că această „segmentare” determină modificări serioase în ceea ce privește propagarea undei, pentru că segmentarea în „grupuri de unde” presupune existența mai multor unde de frecvențe apropiate care determină forma și lungimea semnalului respectiv.

Într-adevăr, admitînd că toate undele care determină grupul de unde au pulsațiile cuprinse în intervalul  $\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ , interval situat în jurul valorii  $\omega_0$ , atunci, suprapunînd numai undele de pulsații extreme, se obține

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \left[ e^{-i[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x]} + e^{-i[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)x]} \right] = \\ &= 2\mathbf{E}_0 \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x) e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}. \end{aligned} \quad (6.10.52)$$

Această ecuație descrie o undă de forma reprezentată în fig. 6.10.4, numită *undă de grup*. Se vede că amplitudinea unei astfel de unde  $2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k \cdot x)$  se propagă cu viteza

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_0}; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_0} \quad (6.10.53)$$

numită *viteză de grup*, diferită de *viteză de fază*  $v_f$ , definită de (6.10.49). Într-adevăr, ținînd seama de (6.10.49), putem scrie

$$\omega = v_f k_0 = \frac{c}{n} k_0$$

și deci

$$v_g = \frac{d}{dk_0} \left( \frac{c}{n} k_0 \right) = c \left( \frac{1}{n} - \frac{k_0}{n^2} \frac{dn}{dk_0} \right)$$

care cu  $k_0 = 2\pi/\lambda$  și  $n = c/v = c/v_f$ , devine

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (6.10.54)$$

Această relație este tocmai *legea de dispersie a lui Rayleigh*.



Dacă vrem să luăm în calcul contribuția tuturor undelor monocromatice care determină forma și lungimea unui grup de undă, atunci în locul relației (6.10.52) trebuie să considerăm expresia

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{-i[\omega t - k(\omega) \cdot x]} d\omega \quad (6.10.55)$$

unde  $k(\omega)$  exprimă dependența de frecvență a vectorului de propagare. Putem lua această dependență de forma

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \dots \quad (6.10.56)$$

și în această dezvoltare în serie Taylor să ne oprim la primii doi termeni (următorii fiind cu atât mai mici cu cât dependența lui  $k$  de  $\omega$  este mai slabă — dispersie slabă). Introducând (6.10.56) în (6.10.55) și efectuând calculele, se găsește expresia

$$\mathbf{E}(x, t) = 2\mathbf{E}_0 \frac{\sin \left\{ \left[ t - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \frac{\Delta\omega}{2} \right\}}{\left[ t - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \Delta\omega} e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}. \quad (6.10.57)$$

Se vede că amplitudinea semnalului (grupului) electromagnetic este, în acest caz, o funcție de  $x$  și  $t$ , de forma

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{E}_0 \frac{\sin \left\{ \left[ t - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \frac{\Delta\omega}{2} \right\}}{\left[ t - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \frac{\Delta\omega}{2}} = \mathbf{E}_0 \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (6.10.58)$$

El se deplasează în lungul axei  $x$  și în acest caz cu viteza de grup  $v_g$ . În figura 6.10.4 este dată reprezentarea grafică a dependenței amplitudinii  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi)$ .

Trecerea prin punctul  $x = \text{const.}$  a unui astfel de semnal (considerat deocamdată ca fiind format din maximul său principal cuprins în intervalul  $\Delta\xi = \pi$ ) durează un interval de timp  $\Delta t$ , astfel încît

$$\Delta\xi = \frac{\Delta\omega}{2} \cdot \Delta t = \pi$$



sau dacă se iau în considerație și celelalte maxime secundare

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi. \quad (6.10.59)$$

Această inegalitate condiționează lărgimea în frecvență a semnalului  $\Delta\omega$  de intervalul de timp  $\Delta t$  necesar detecției sale. De exemplu, dacă este vorba de semnale radio și luăm pentru  $\Delta t$  limita de audibilitate a urechii omului ( $\Delta t \sim 5 \cdot 10^{-5}$  s), atunci din (6.10.59) rezultă că  $\Delta\omega \sim 4\pi \cdot 10^4$  Hz. Avînd în vedere că  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , ne dăm seama de ce în transmisiile radio frecvența undei purtătoare trebuie să fie mult mai mare decît a semnalelor (sonore) transmise.

Inegalitatea (6.10.59) poate fi transpusă ușor la altă pereche de mărimi și anume la  $k$  și  $x$ . Astfel, considrînd  $t = \text{const}$ , din (6.10.58), folosind aceleași considerații ca mai sus, rezultă

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi. \quad (6.10.60)$$

Această relație ne dă informații asupra localizării spațiale a semnalului electromagnetic respectiv. De exemplu, dacă semnalul se propagă în lungul axei  $Ox$  și ne interesează care este lărgimea lui transversală  $d$ , la distanța  $D$  de sursă, atunci punînd  $\Delta x = d$  și  $\Delta k = 2k_y$  (vezi fig. 6.10.5) avem

$$\frac{d}{2D} = \frac{k_y}{k}, \Rightarrow k_y = k \frac{d}{2D} = \frac{\pi d}{\lambda D}$$

deci

$$2k_y d > 2\pi; \Rightarrow d \geq \sqrt{D\lambda}. \quad (6.10.61)$$

Pe baza acestei relații găsim că lărgimea unui fascicul electromagnetic cu  $\lambda = 1$  m este, la distanța  $D = 100$  km, de 320 m. De acest rezultat trebuie să ținem seama atunci cînd vrem să transmitem dirijat semnale electromagnetice. De aceea în sistemele radar, de exemplu, se folosesc unde din gama microundelor ( $\lambda = 10^{-3} - 10^{-2}$  m), care își păstrează, mult mai bine directivitatea.

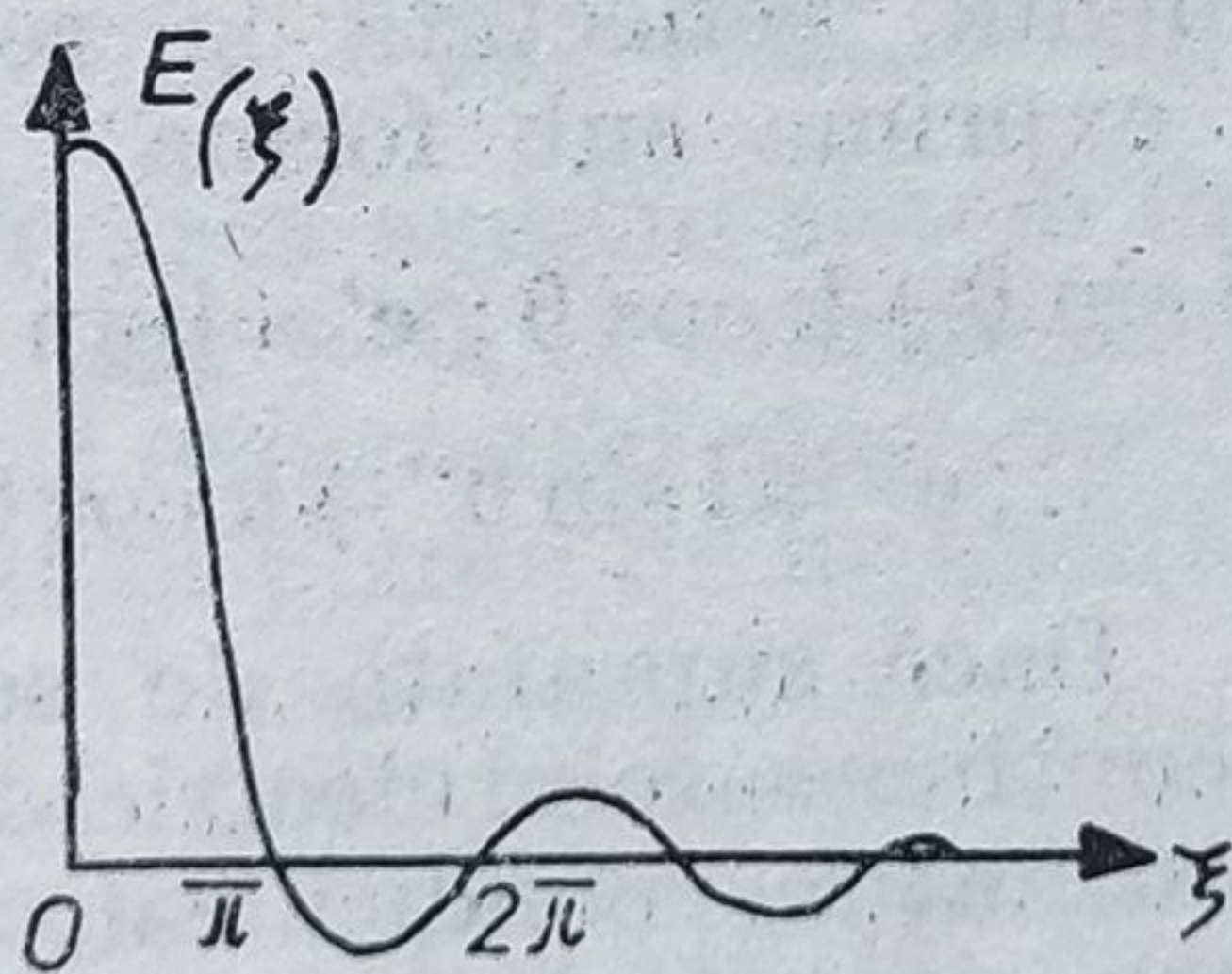


Fig. 6.10.4

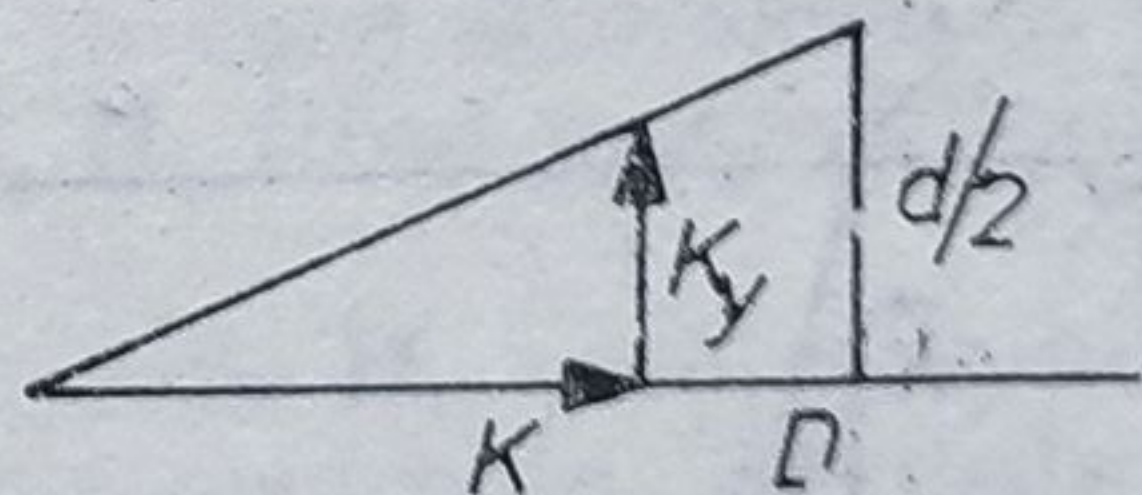


Fig. 6.10.5

Considerațiile făcute mai sus ne arată că se poate folosi noțiunea de fascicul plan paralel numai în acele cazuri în care  $d \gg \lambda$ , respectiv  $\Delta k \ll k$ . De exemplu, în cazul undelor luminoase ( $\lambda = 4 \cdot 10^{-5} \div 7,5 \cdot 10^{-5}$  m),



dacă  $d \sim 10^{-3}$ , înseamnă că la trecerea unor astfel de fascicule prin orificii cu dimensiuni de ordinul lui  $10^{-3}$  m se mai păstrează plan-paralelismul fasciculului (se poate vorbi de *rază*, în sensul în care optica definește conceptul de *rază de lumină*). La  $d < 10^{-4}$  m acest plan-paralelism dispăre datorită fenomenelor de difracție.

O semnificație mai profundă a relațiilor (6.10.59) și (6.10.60) va fi dezvăluită de teoriile cuantice.

### 6.10.5. FENOMENE PRODUSE DE UNDELE ELECTROMAGNETICE

Există mai multe tipuri de fenomene pe care le produc undele (inclusiv cele electromagnetice), unele dintre ele fiind specific ondulatorii, în sensul că prezența lor demonstrează cu certitudine existența în acel caz a unui proces ondulatoriu. Din această ultimă categorie de fenomene fac parte fenomenele de interferență, difracție, dispersie, polarizare și efectul Doppler. Mai pot interveni însă și fenomene de reflexie, refracție, absorbție și difuzie, care se întâlnesc și în cazul fasciculelor de particule.

Desigur că se poate elabora o teorie unitară a acestor fenomene care să fie valabilă pentru orice tip de undă, dar pentru că intervin particularități în ceea ce privește dispozitivele experimentale necesare pentru producerea acestor fenomene, respectiv a utilizării practice a acestora, vom expune în continuare doar câteva dintre aceste fenomene, restul rămânând pentru a fi expuse în capitolul de optică ondulatorie.

#### a) Reflexia și refracția undelor electromagnetice. Formulele lui Fresnel.

Fie două medii dielectrice omogene și izotrope, separate între ele printr-o suprafață plană  $\Sigma$  (situată în planul  $xOy$ ), în care o undă electromagnetică plană se propagă cu vitezele  $v_1$  (în primul mediu) și  $v_2$  (în al doilea). Notăm cu  $\theta$  unghiul de incidență pe care îl face o rază incidentă cu normala  $N$  la planul de separație în punctul de incidență și cu  $\theta'$ , respectiv  $\theta''$  unghiurile de reflexie și de refracție. Se observă

de pe figura 6.10.6 că versorii  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  și  $\mathbf{e}''$  ai direcțiilor de propagare ale razelor incidentă, reflectată și refractată, se pot exprima sub forma

$$\mathbf{e} = i \sin \theta + k \cos \theta; \quad \mathbf{e}' = i \sin \theta' - k \cos \theta';$$

$$\mathbf{e}'' = i \sin \theta'' + k \cos \theta''. \quad (6.10.62)$$

Dacă suprafața de separație ( $\Sigma$ ) nu conține sarcini electrice libere ( $\sigma = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ), atunci condițiile de continuitate pentru câmpul electromagnetic (6.2.45) și (6.2.46) cer ca componentele tangențiale ale vectorilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  la suprafața de separație să fie egale între ele, adică

$$\mathbf{E}_t + \mathbf{E}'_t = \mathbf{E}''_t; \quad \mathbf{H}_t + \mathbf{H}'_t = \mathbf{H}''_t. \quad (6.10.63)$$

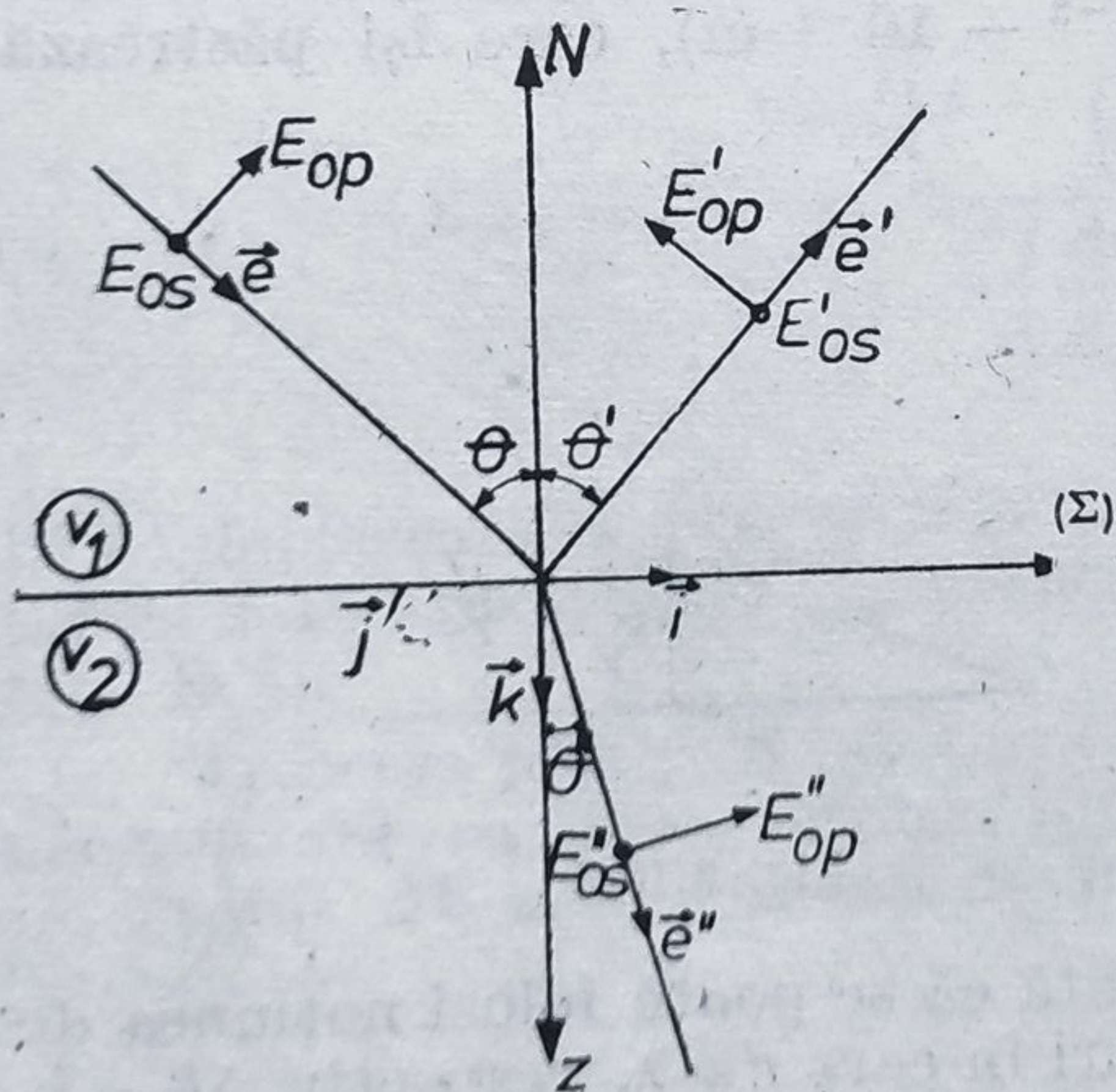


Fig. 6.10.6



Tinând cont de faptul că intensitatea câmpului electric  $\mathbf{E}$  este, pentru o undă plană, dată de expresia (6.10.47) și făcând în această expresie înlocuirea:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = k(x \sin \theta + z \cos \theta)$ , prima identitate din (6.10.63) se va transcrie sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0t} e^{-i[\omega t - k(x \sin \theta + z \cos \theta)]} + \mathbf{E}'_{0t} e^{-i[\omega' t - k'(x \sin \theta' + z \cos \theta') - \varphi_r]} &\equiv \\ &\equiv \mathbf{E}''_{0t} e^{-i[\omega'' t - k''(x \sin \theta'' + z \cos \theta'') - \varphi_t]} \end{aligned} \quad (6.10.64)$$

Această identitate trebuie să fie satisfăcută pentru orice punct din planul ( $xOy$ ) și la orice moment ( $t$ ), condiție îndeplinită numai dacă

$$\omega = \omega' = \omega''; \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta'' \quad (6.10.65)$$

Dar, potrivit relației (6.10.40) avem

$$k = k' = \frac{2\pi}{\lambda} n_1; \quad k'' = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \quad (6.10.66)$$

$n_1$  și  $n_2$  fiind indicii de refracție absoluți ai celor două medii. Rezultă deci că prin reflexie și refracție frecvența undei nu se modifică, iar unghiurile de reflexie și refracție sînt legate de cel de incidență prin relațiile

$$\theta = \theta'; \quad n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''. \quad (6.10.67)$$

Pentru ca și fazele inițiale ale undei reflectate  $\varphi_r$ , respectiv refractate  $\varphi_t$  să satisfacă condiția la limită (6.10.64) trebuie ca  $e^{i\varphi_r} = e^{i\varphi_t} = 1$ , din care rezultă

$$\varphi_t = 0; \quad \varphi_r = \begin{cases} 0 \\ \pm \pi \end{cases} \quad (6.10.68)$$

În aceste condiții, ecuațiile de continuitate (6.10.62) se reduc la ecuații de continuitate pentru amplitudinile celor două câmpuri, de forma

$$\mathbf{E}_{0t} + \mathbf{E}'_{0t} \equiv \mathbf{E}''_{0t}; \quad \mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}'_{0t} \equiv \mathbf{H}''_{0t}. \quad (6.10.69)$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații vectoriale, vom ține seama de faptul că  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ , și vom distinge următoarele două cazuri particulare:

— *cazul transversal magnetic (T.M.)* în care admitem că vectorul  $\mathbf{E}_0$  este conținut în planul de incidență ( $\mathbf{e}, \mathbf{N}$ ),  $\mathbf{H}_0$  fiind perpendicular pe acest plan și

— *cazul transversal electric (T.E)*, în care  $\mathbf{H}_0$  este conținut în planul de incidență, iar  $\mathbf{E}_0$  este perpendicular pe acest plan. Se vede că în cazul transversal magnetic condițiile (6.10.69) se reduc la ecuațiile

$$H_{0s} + H'_{0s} = H''_{0s}; \quad E_{0p} \cos \theta - E'_{0p} \cos \theta' = E''_{0p} \cos \theta'' \quad (6.10.70)$$

iar în cazul transversal electric, la ecuațiile

$$E_{0s} + E'_{0s} = E''_{0s}; \quad H_{0p} \cos \theta - H'_{0p} \cos \theta' = H''_{0p} \cos \theta'' \quad (6.10.71)$$



indicele  $s$  specificînd componente perpendiculare pe planul de incidență, iar  $p$ -componente paralele cu acest plan.

Dar, potrivit relației (6.10.26), putem scrie:  $H_{0s} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{0p} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_0}} E_{0p} = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} E_{0p} = \frac{1}{\mu_0} \frac{c}{v} E_{0p} = \frac{n}{\mu_0} E_{0p}$  și respectiv  $H_{0s} = \frac{n}{\mu_0} E_{0s}$ , așa încît ecuațiile (6.10.70) și (6.10.71) devin

$$n_1(E_{0p} + E'_{0p}) = n_2 E''_{0p}; (E_{0p} - E'_{0p}) \cos \theta = E''_{0p} \cos \theta'' \quad (6.10.72)$$

$$E_{0s} + E'_{0s} = E''_{0s}; n_1(E_{0s} - E'_{0s}) \cos \theta = n_2 E''_{0s} \cos \theta''.$$

Din primele două rezultă, prin calcule simple

$$E'_{0p} = E_{0p} \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')}; E''_{0p} = E_{0p} \frac{2 \cos \theta \cdot \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \quad (6.10.73)$$

iar din ultimele două

$$E'_{0s} = -E_{0s} \frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}; E''_{0s} = E_{0s} \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (6.10.74)$$

Aici s-a ținut seama și de legea refracției (6.10.67).

Expresiile (6.10.73) și (6.10.74) sînt cunoscute sub denumirea de *relații (formule) ale lui Fresnel* și ele pot fi generalizate și pentru cazul mediilor absorbante [10]. Pentru cazul particular, al incidenței normale ( $\theta = 0$ ), aceste relații se reduc la forma

$$E'_{0p} = E_{0p} \frac{n - 1}{n + 1}; E'_{0s} = -E_{0s} \frac{n - 1}{n + 1}; E''_{0p} = E_{0p} \frac{2n}{n + 1}; E''_{0s} = E_{0s} \frac{2n}{n + 1} \quad (6.10.75)$$

unde

$$n = \frac{n_2}{n_1} \quad (6.10.76)$$

reprezintă *indicele de refracție relativ* al mediului doi în raport cu primul mediu. De notat că  $E$  este mereu în fază cu  $E'$  ( $\varphi_t = 0$ , vezi (6.10.68)), iar  $E'$  poate fi în fază sau în opoziție de fază cu  $E$ , după cum  $n > 1$  sau  $n < 1$ .

Pentru a caracteriza o suprafață de separație dintre două medii, din punct de vedere al reflexiei, respectiv al transmisiei undelor electromagnetice, se folosesc *coeficienții de reflexie*  $r$  și de transmisie  $\tau$ , definiți prin expresiile

$$r = \frac{|I'|}{|I|} = \frac{E_{0s}'^2 + E_{0p}'^2}{E_{0s}^2 + E_{0p}^2} = \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2; \tau = \frac{|I''|}{|I|} = \frac{E_{0s}''^2 + E_{0p}''^2}{E_{0s}^2 + E_{0p}^2} = \frac{4n^2}{(n + 1)^2} \quad (6.10.77)$$



Se constată ușor că

$$r + \tau = 1 \quad (6.10.78)$$

relație valabilă numai pentru suprafețe de separație neabsorbante. Ea exprimă de fapt conservarea energiei în aceste procese.

b) **Polarizarea undelor electromagnetice.** Este interesant de observat că formulele lui Fresnel (6.10.74) pun în evidență o asimetrie axială la razele reflectate și refractate. De exemplu, din prima relație (6.10.73) rezultă că pentru cazul când  $\theta + \theta' = \pi/2$ , respectiv cu (6.10.67), pentru un unghiul de incidență care satisface condiția

$$\operatorname{tg} \theta_B = n \quad (6.10.79)$$

componenta  $E'_{0p}$  a undei se anulează și deci raza reflectată va conține numai oscilații perpendiculare pe planul de incidență. O astfel de rază se numește *plan-polarizată*, spre deosebire de raza incidentă — numită *naturală* — care poate în principiu să conțină vibrații în toate direcțiile conținute într-un plan perpendicular pe  $e$ . Unghiul de incidență  $\theta_B$  determinat de condiția (6.10.79), este cunoscut sub numele de „unghi Brewster”, iar *legea lui Brewster* (6.10.79) este bine verificată de experiență (vezi polarizarea razelor de lumină § 7.7).

Astăzi se cunosc stări de polarizare mult mai complexe decât polarizarea plană, acestea putînd apărea și ca un efect al procesului de propagare al undei prin mediul respectiv. De exemplu, dacă mediul este dispersiv sau este anizotrop, cele două oscilații ale vectorului  $E$ , care se fac în planul de incidență ( $E_{0p}$ ), respectiv perpendicular pe acest plan ( $E_{0s}$ ), se propagă de regulă cu viteze diferite. Între ele se va crea o diferență de fază  $\varphi$ , și prin interferarea lor, va rezulta o undă în care extremitatea vectorului  $E$  va descrie o curbă exprimată prin ecuația

$$\frac{E_p^2}{E_{0p}^2} + \frac{E_s^2}{E_{0s}^2} + 2 \frac{E_p E_s}{E_{0p} E_{0s}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (6.10.80)$$

Se vede că funcție de valorile lui  $\varphi$ , rezultă o rază polarizată plan (pentru  $\varphi = n\pi$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) sau *polarizată eliptic* (pentru  $\varphi = (2n + 1/2)\pi$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ; vezi fig. 6.10.7). În acest ultim caz, dacă și  $E_{0p} = E_{0s}$ , raza va fi *polarizată circular* (dextrogir, dacă  $E_0$  se rotește în sens orar față de un observator ce privește în sensul de propagare al razei și levogir în caz contrar).

c) **Absorbția undelor electromagnetice.** Este determinată de procesele de transfer către substanța din câmp a energiei undei electromagnetice respective. De regulă, energia transferată se regăsește în substanță sub formă de căldură, ceea ce înseamnă că fenomenul este condiționat de

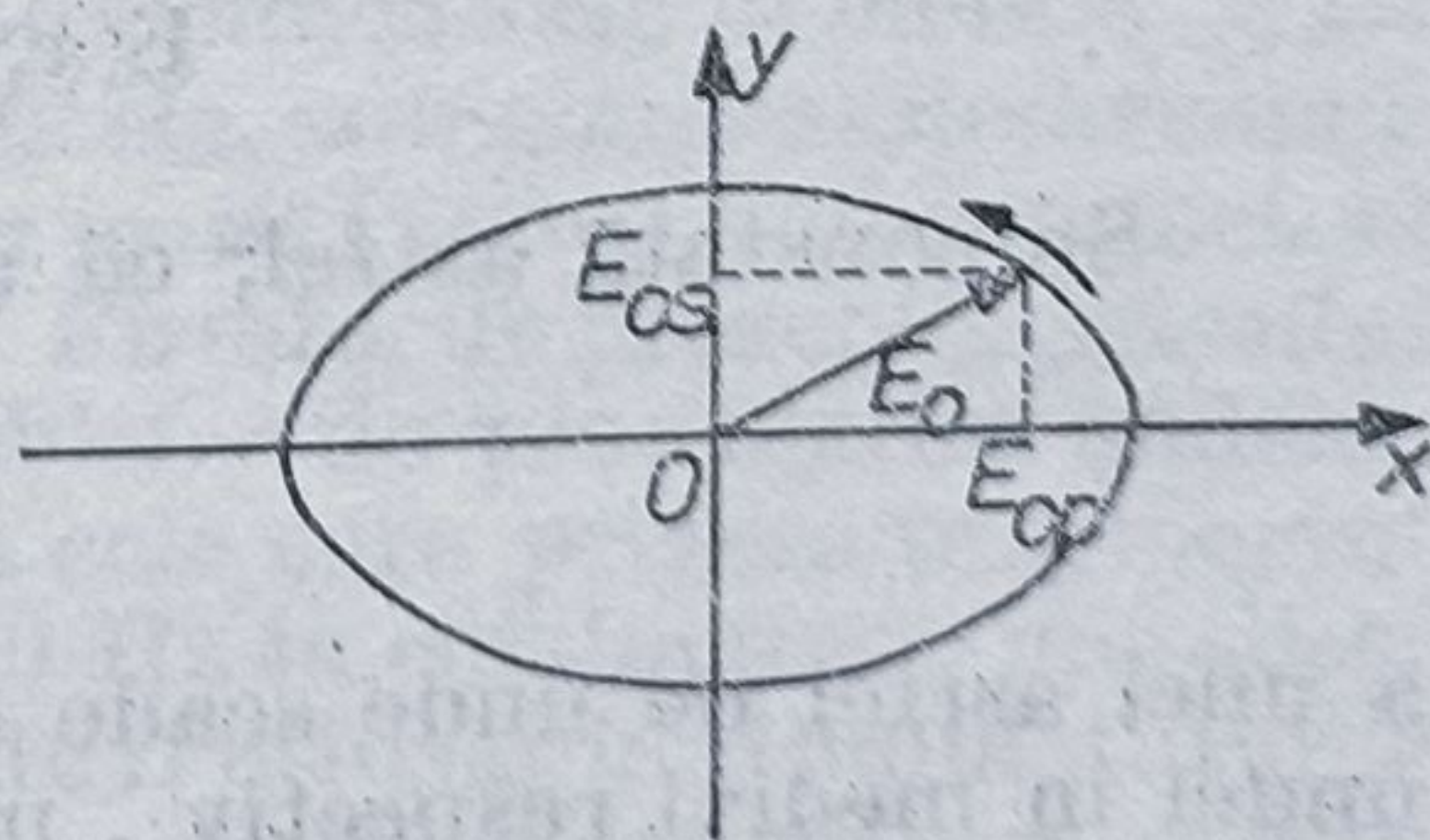


Fig. 6.10.7



prezența sarcinilor libere în mediu considerat. De aceea, vom expune câteva considerații introductive asupra fenomenului de absorbție a undelor electromagnetice în metale. Vom pleca de la ecuațiile lui Maxwell (6.2.37) și (6.2.39) în care nu vom mai neglija curentul de conducție  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Deci

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.10.81)$$

Eliminînd între aceste două ecuații, pe  $\mathbf{H}$  cu procedeul folosit în (6.10.2), se obține o ecuație de forma

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (6.10.82)$$

Pentru unde monocromatice plane, luînd  $\mathbf{E}(x, t) = E(x) e^{-i\omega t}$  printr-un calcul simplu se găsește ecuația

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{v^2} - i\mu \sigma \omega \right) \mathbf{E} = 0 \quad (6.10.83)$$

Notăm prin  $k$  mărimea complexă

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - i\mu \sigma \omega} = k_1 - ik_2. \quad (6.10.84)$$

Atunci, ecuația (6.10.83) ia forma

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + \underline{k}^2 \mathbf{E} = 0. \quad (6.10.85)$$

Această ecuație are ca soluție expresia

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{\underline{k}x} = \mathbf{E}_0 e^{-k_2 x} e^{ik_1 x}. \quad (6.10.86)$$

Deci cîmpul electric  $\mathbf{E}(x, t)$  al undei este dat de expresia

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{-k_2 x} e^{-i(\omega t - k_1 x)}. \quad (6.10.87)$$

Se constată astfel, că amplitudinea

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{-k_2 x} \quad (6.10.88)$$

a unei astfel de unde scade exponențial cu distanța  $x$  de pătrundere a undei în mediul respectiv, mărimea  $k_2$  jucînd rolul de coeficient de atenuare. Determinarea lui  $k_2$  se poate face, folosind relația (6.10.84). Ridi-



cînd această expresie la pătrat și identificînd părțile reale și imaginare din cei doi membrii, se obține sistemul de ecuații

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r; \quad 2k_1 k_2 = \mu \sigma \omega = \frac{\mu_r \sigma \omega}{c^2 \varepsilon_0} \quad (6.10.89)$$

ale cărui soluții sînt

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu_r}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + \varepsilon_r \right\}}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu_r}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} - \varepsilon_r \right\}} \quad (6.10.90)$$

Pentru medii metalice, în cazul particular cînd este satisfăcută condiția

$$\sigma / \varepsilon_0 \omega \gg \varepsilon_r \quad (6.10.91)$$

respectiv cînd curenții de deplasare se pot neglija în comparație cu cei de conducție  $\left( |\mathbf{J}| \gg |\mathbf{J}_d| = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| = \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega E \right)$ , deci  $\sigma E \gg \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega E$ , din care rezultă (6.10.91)), făcînd aproximațiile

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu_r}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon_r^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} - \varepsilon_r \right\}} \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu_r \sigma}{2 \varepsilon_0 \omega}} = \sqrt{\frac{\mu_r \sigma \omega}{2}} \quad (6.10.92)$$

obținem

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu_r \sigma \omega}{2}} x} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (6.10.93)$$

unde

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (6.10.94)$$

reprezintă distanța la care amplitudinea undei se reduce de  $e$  ori.

Rezultă că pătrunderea undei în mediul metalic respectiv va fi condiționată atît de frecvența undei  $\omega$ , cît și de coeficientul de conductibilitate electrică  $\sigma$  a mediului respectiv. Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *efect skin* (sau efect pelicular),  $\delta$  numindu-se *adîncime skin*. Pentru unde cu frecvență  $\nu = 50 \text{ Hz}$  se constată că adîncimea skin în metale ( $\sigma = 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ) este  $\delta \approx 1 \text{ cm}$ . La frecvențe de  $10^5 \text{ Hz}$ , adîncimea skin se reduce la valori de ordinul a  $3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ , iar pentru  $\sigma \rightarrow \infty$  (vom numi conductori metalici ideali astfel de medii ipotetice)  $\delta \rightarrow 0$ . Firește, de prezența efectului skin trebuie să se țină seama nu numai în probleme de propagare a undelor electromagnetice prin medii metalice, ci și în cele care privesc transportul energiei electrice prin curenți alternativi de  $50 \text{ Hz}$  în conductoare metalice. În același timp, modelul prezentat mai sus poate fi utilizat în studiul tuturor fenomenelor de absorbție ale undelor electromagnetice în diverse medii.



d) **Efectul Doppler.** În § 3.3 a fost prezentat efectul Doppler acustic, subliniindu-se că el apare ca rezultat al relativității mișcării sursei de unde, în raport cu detectorul de unde. Vom expune aici teoria relativistă a efectului Doppler pentru undele electromagnetice. Ea se obține din cerința ca faza unei unde să rămână invariantă față de transformările Lorentz (3.7.4). Astfel, pentru o undă plană de forma

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kx)} \quad (6.10.95)$$

și pentru cazul particular când cele două sisteme de referință ( $Oxyz$  al sursei de undă și  $O'x'y'z'$  al detectorului de unde) se deplasează cu axele  $Ox$ , respectiv  $O'x'$  paralele între ele cu viteza  $v$ , vom impune cerința ca

$$e^{-i(\omega' t' - k' x')} \equiv e^{-i(\omega t - kx)} \quad (6.10.96)$$

unde

$$x = \gamma \cdot (x' + vt'); \quad t = \gamma \cdot \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right); \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.10.97)$$

Se constată că putem scrie

$$e^{-i(\omega t - kx)} = e^{-i\left[(\gamma\omega - \gamma kv)t' - \left(k\gamma - \frac{\gamma\omega v}{c^2}\right)x'\right]} \equiv e^{-i(\omega' t' - k' x')} \quad (6.10.98)$$

și deci

$$\omega' = \gamma(\omega - kv) = \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.10.99)$$

unde s-a ținut cont de relația  $c = k/\omega$ .

Prin urmare, frecvența recepționată  $\nu'$  este legată de frecvența proprie  $\nu$ , prin relația

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.10.100)$$

Această relație reprezintă legea efectului Doppler longitudinal. Pentru  $v \ll c$ , ea trece în legea efectului Doppler clasic. În adevăr, luând aproximativ  $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1$ , avem  $\nu' = \nu(1 - v/c)$ , relație identică cu (3.3.11)

pentru  $\theta = 0$ . De notat că în cazul undelor electromagnetice se poate distinge și un *efect Doppler transversal*, care apare atunci când unda electromagnetică se propagă transversal față de direcția de deplasare a detectorului. În acest caz vom impune condiția de invarianță față de transformările Lorentz, fazei

$$e^{-i(\omega t - ky)} \equiv e^{-i(\omega' t' - k' y')}. \quad (6.10.101)$$

Cu transformările Lorentz (6.10.97), avem

$$e^{-i\left[\omega\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) - ky'\right]} \equiv e^{-i\left[\omega\gamma t' + \frac{\omega\gamma v}{c^2}x' - ky'\right]}.$$



Se vede că

$$\omega' = \gamma\omega; \nu' = \gamma\nu = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.10.102)$$

De notat că această lege este relativistă, în sensul că pentru  $v \ll c$  efectul Doppler transversal nu apare ( $\nu' \simeq \nu$ ). Acest efect a putut fi pus în evidență în cazul radiațiilor luminoase, fiind cunoscut sub denumirea de *aberație stelară*. Încă în anul 1727, Bradley descoperă fenomenul de deplasare aparentă a stelelor pe bolta cerească, pe orbite închise (fig. 6.10.8), văzute de pe Pământ sub unghiul  $\alpha = 40,9'$ . El pune pe seama mișcării de revoluție a Pământului acest fenomen și pe baza acestei ipoteze determină viteza în vid a luminii (obține valoarea  $c = 303\,000$  km/s), dar fenomenul este de fapt un efect Doppler transversal.

Astăzi cele două efecte și-au găsit multiple și interesante aplicații. De exemplu, pe baza efectului Doppler longitudinal s-a putut interpreta fenomenul de „deplasare spre roșu” a radiațiilor luminoase ce provin de la aștrii îndepărtați. În conformitate cu această interpretare deplasarea spre roșu este o dovadă a îndepărtării aștrilor și în felul acesta s-a creat celebra teorie a „expansiunii universului”.

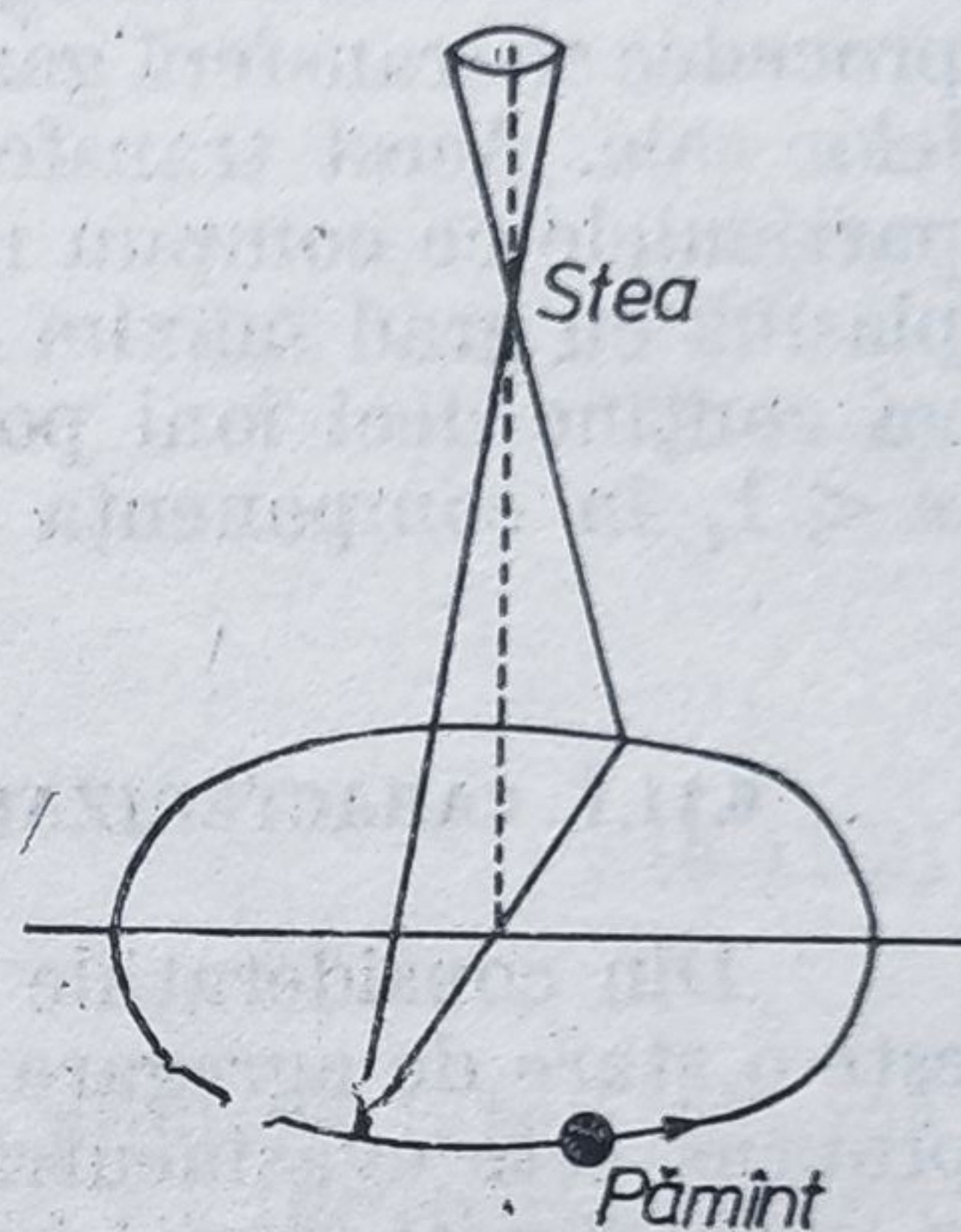


Fig. 6.10.8

## § 6.11. PLASMA ȘI FENOMENE ELECTROMAGNETICE ÎN PLASMĂ

Experimental se constată că gazele care conțin un anumit număr de purtători liberi de sarcină electrică (ioni și electroni liberi) se comportă în mod specific în câmpuri electromagnetice. Se știe de fapt că toate gazele în condiții fizice normale conțin sarcini electrice libere, pentru că o fracțiune  $x$  din moleculele lor sînt ionizate. De exemplu, în aerul atmosferic, aflat la  $p_0 = 1$  atm și  $T_0 = 300$  K, există aproximativ  $10^8$  ioni/m<sup>3</sup>. Totuși, conductivitatea electrică  $\sigma$  a aerului în aceste condiții are o valoare extrem de mică în comparație cu conductivitatea electrică a ionosferei (strat atmosferic existent la altitudinea de  $120 \div 400$  km), în care gradul de ionizare este doar cu două ordine de mărime mai ridicat (în ionosferă există în jur de  $10^{10}$  ioni/m<sup>3</sup>). Explicația acestui fapt constă în aceea că în ionosferă purtătorii de sarcină electrică negativă sînt aproape în totalitate electronii liberi.

Astăzi se știe că peste 99 % din substanța cunoscută din univers se prezintă sub forma unui amestec fluid de particule încărcate cu sarcină electrică pozitivă (nuclee, ioni) și negativă (electroni), al cărui grad de



ionizare se apropie de valoarea maximă  $x = 1$ . Avînd în vedere proprietățile specifice — distincte de ale altor medii fluide constituite din particule neutre din punct de vedere electric — ca și comportarea lor deosebită în cîmpuri electromagnetice. Langmuir denumeste un astfel de amestec *plasmă* și o consideră ca pe o nouă stare de agregare a materiei.

În condiții terestre obișnuite, plasma este practic inexistentă, dar au fost concepute și realizate o serie de procedee de generare a ei pe cale artificială, prin transformarea unui gaz obișnuit în plasmă. Astfel de procedee sînt : încălzirea unui gaz la temperaturi ridicate și ionizarea moleculelor sale pe cale termică (plasma fierbinte) ; ionizarea unui gaz rarefiat prin intermediul unei descărcări electrice și iradierea gazelor cu particule nucleare de mare energie sau cu fotoni de radiație laser. În toate aceste procedee se transferă gazului din exterior energia necesară ionizării moleculelor sale. Acest transfer se face, de regulă, prin ciocniri neelastice între particulele ce compun respectivul sistem, putîndu-se ajunge în final la o plasmă cu grad maxim de ionizare ( $x \lesssim 1$ ). Într-o astfel de stare plasma va conține deci ioni pozitivi, electroni liberi și fotoni de radiație. La  $x < 1$ , în componența plasmăi vor intra și molecule (atomi) neutre.

#### 6.11.1. CARACTERIZAREA GENERALĂ A UNEI PLASME. TIPURI DE PLASMĂ

Din considerațiile făcute mai sus se desprinde concluzia că plasma este o stare de agregare a materiei, în care aceasta nu are volum și formă proprie, este cvasineutră din punct de vedere electric, dar constituenții ei microscopici (ionii și electronii) interacționează și prin forțe de natură electrică. O astfel de stare poate fi studiată atît la nivel macroscopic, cît și la nivel microscopic, cele două metode de studiu completîndu-se reciproc. În ambele metode de studiu un rol esențial îl au prezența celor două componente principale din plasmă — ionii și electronii liberi. Presupunînd în continuare că este vorba de ioni monovalenți, constatăm că între aceste două componente există mari diferențe privind proprietățile lor inerțiale ( $M_{ion} \gg m_0$ ,  $m_0$  — masa de repaus a electronului). De această diferență trebuie să se țină seama în toate studiile asupra plasmăi. De exemplu, pentru o plasmă aflată în stare de echilibru termodinamic, în general se înregistrează o diferență mare între temperatura de echilibru  $T_i$  a ionilor și temperatura  $T_e$  a electronilor din plasmă. Acest lucru se datorește „contactului termic” foarte slab între cele două componente din plasmă. Se știe că la ciocnirea electron-ion, electronul transferă numai  $2(m_0/M_i)E_e$  din energia sa cinetică  $E_e$  ionilor din plasmă. De exemplu, pentru o plasmă cu ioni de Hg, numai  $6 \cdot 10^{-6}$  din energia electronului se transferă ionului de Hg, ceea ce face ca în general temperatura  $T_e$  să fie mult mai mare decît  $T_i$ .

Un alt aspect caracteristic plasmăi îl reprezintă prezența interacțiunilor de tip electric între constituenții ei microscopici. Este vorba de interacțiuni de tip coulombian, cu raza lungă de acțiune, care crează cîmpuri electrice interioare. În general, interacțiunile electrice din plasmă ar trebui să se compenseze reciproc (atrakția cu respingerea), dar intervin diverse



tipuri de perturbații care pe porțiuni mai restrânse sau mai mari din plasmă pot distruge cvasineutralitatea ei electrică. Aceste perturbații sînt sursa cîmpurilor electrice interioare din plasmă.

Vom analiza un caz simplu de perturbație plană în care un anumit număr  $n$  de particule din unitatea de volum, încărcate cu sarcini de un anumit semn sînt separate, pe distanța  $y$ , de particulele de semn contrar. Admițînd că toate particulele poartă sarcina elementară  $e$  ( $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$  C), cîmpul electric creat va fi dat de ecuația Poisson  $\nabla E = ne/\epsilon_0$ . În aproximația plană, această ecuație se va putea scrie sub forma

$$(\nabla E)_y = \frac{dE}{dy} \simeq \frac{E}{y}$$

și găsim

$$E = \frac{ne}{\epsilon_0} y \quad (6.11.1)$$

respectiv, pentru potențialul electric  $\varphi$

$$\varphi = Ey = \frac{ne}{\epsilon_0} y^2. \quad (6.11.2)$$

Atunci, pentru o perturbație în care  $y = 1$  mm, produsă într-o plasmă de hidrogen aflată la  $P = 1$  torr, care conține  $n = 7 \cdot 10^{16}$  particule/m<sup>3</sup>, cîmpul electric creat are valoarea  $E = 10^{10}$  V/m (respectiv  $\varphi = 10^9$  V). La valori așa de mari corespund pentru sistemul de sarcini din perturbație, energii potențiale  $ne\varphi$  foarte mari, ceea ce înseamnă că de fapt, în plasmă pot interveni doar perturbații de dimensiuni mici. De notat că sub o anumită dimensiune  $y = r_D$ , aceste perturbații apar chiar foarte frecvent, fiind determinate de agitațiile termice din plasmă. Această dimensiune caracteristică  $r_D$  se numește *rază Debye*. Impunînd condiția ca energia corespunzătoare unei astfel de perturbații să fie de ordinul de mărime al energiei de agitație termică, adică

$$e\varphi = \frac{ne^2}{\epsilon_0} r_D^2 = kT \quad (k - \text{constanta lui Boltzmann}) \quad (6.11.3)$$

deci

$$r_D = \left( \frac{\epsilon_0 k T}{ne^2} \right)^{1/2}. \quad (6.11.4)$$

Se constată că, funcție de valorile razei Debye, se pot distinge diverse tipuri de plasmă\*. Astfel, plasma se numește *ideală* (și are o comportare

\* De fapt, un gaz ionizat poate fi considerat plasmă numai dacă  $r_D$  este mic în comparație cu dimensiunile geometrice ale incintei în care acesta se găsește.



termodinamică similară cu a gazelor ideale) atunci când este îndeplinită condiția

$$e\varphi \ll kT. \quad (6.11.5)$$

Presupunând perturbații de formă sferică, în care distanța  $r$  dintre particule variază invers proporțional cu densitatea volumică a numărului de particule ( $r \sim n^{-1/3}$ ) și admitînd că  $\varphi(r) \sim 1/r = n^{1/3}$ , cu (6.11.4), condiția (6.11.5) se mai poate scrie sub forma

$$r_D^3 \cdot n \gg 1. \quad (6.11.6)$$

Odată cu creșterea numărului de particule  $n$ , această condiție nu va mai fi satisfăcută, iar comportarea termodinamică a plasmei se îndepărtează de a unui gaz ideal. Se poate distinge o *plasmă* cu comportare *hidrodinamică* (asemănătoare comportării lichidelor) și chiar o *metalizare* a plasmei (plasma din structurile cristaline metalice sau semiconductoare). Peste o anumită valoare a lui  $n$ , între particule încep să apară interacțiuni de natură cuantică (interacțiunile de schimb), plasma devenind o *plasmă cuantică* (fig. 6.11.1).

Schimbări în comportarea plasmei apar o dată cu creșterea temperaturii  $T$ . Pentru plasmă foarte fierbînți (cum sînt cele întîlnite în cazul reacțiilor nucleare) intervin efecte relativiste și se vorbește de o *plasmă relativistă*. Firește, fiecare tip de plasmă presupune un studiu teoretic (și practic) adecvat.

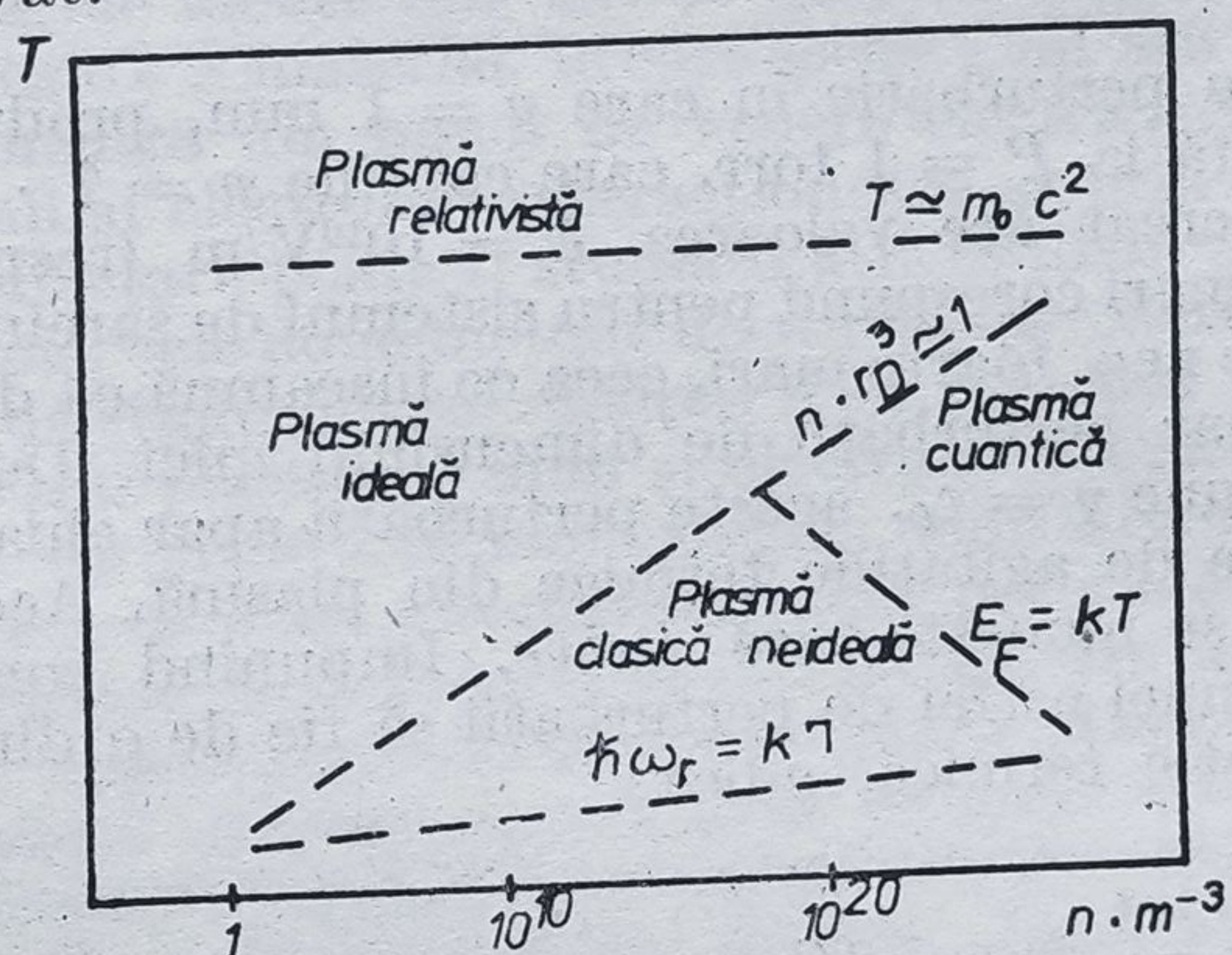


Fig. 6.11.1

Un parametru caracteristic plasmei este *gradul ei de ionizare*  $x$ , care exprimă raportul dintre numărul de ioni și cel de molecule neutre, existente în plasmă în condiții de echilibru termic. Gradul de ionizare  $x$  se determină din studiul proceselor care au loc la nivel microscopic și care modifică starea de ionizare a plasmei. Astfel, pentru o ionizare termică, în condiții de echilibru, vor interveni un număr egal de procese de ionizare și de recombinare (cu formare de particule neutre), în așa fel încît

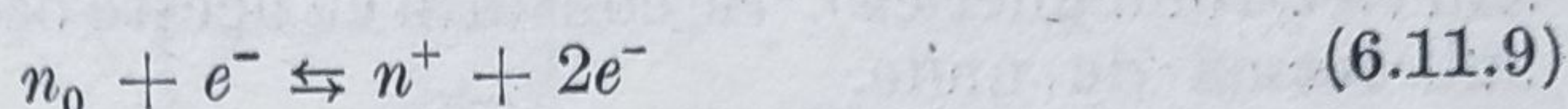
$$\left( \frac{dn}{dt} \right)_{\text{ioniz}} = \left( \frac{dn}{dt} \right)_{\text{recomb}} \quad (6.11.7)$$



Dacă notăm cu  $n_0$  numărul inițial de molecule neutre, din unitatea de volum, atunci la temperatura de echilibru  $T$  în plasma vor exista  $n^- = xn_0$  electroni liberi,  $n^+ = xn_0$  ioni pozitivi și  $n^0 = (1 - x)n_0$  molecule neutre, care vor determina o presiune cinetică

$$p(T) = (n^- + n^+ + n^0)kT = (1 + x)n_0kT \quad (6.11.8)$$

Pentru un proces particular, în care ionizarea este produsă prin ciocniri cu electronii, conform schemei



vitezele de ionizare și de recombinare sînt determinate, potrivit legii acțiunii maselor, de concentrația participanților la mecanism și deci putem scrie

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{ioniz} = g_1(T) x(1-x)n_0^2; \left(\frac{dn}{dt}\right)_{recomb} = g_2(T) x^3n_0^3. \quad (6.11.10)$$

Din (6.11.7) rezultă

$$n_0 \frac{x^2}{1-x} = \frac{g_1(T)}{g_2(T)} = G(T) \quad (6.11.11)$$

sau ținînd cont de (6.11.8)

$$\frac{x^2}{1-x^2} p(T) = F(T). \quad (6.11.12)$$

Se vede că între cele două funcții de temperatură există relația  $F(T) = kTG(T)$ . Din considerente cuantice, pentru funcția  $G(T)$  se obține expresia

$$G(T) = \left(\frac{2\pi m_0 kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{W_i}{kT}} = g(T) e^{-\frac{W_i}{kT}} \quad (6.11.13)$$

unde  $g(T)$  reprezintă așa numita densitate de stări cuantice, iar  $W_i$  energia de ionizare a moleculelor din plasmă. Atunci, cu această expresie, (6.11.12) devine

$$\frac{x^2}{1-x^2} p(T) = \left(\frac{2\pi m_0}{h^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\frac{W_i}{kT}}. \quad (6.11.14)$$



Creșterea gradului de ionizare cu scăderea presiunii  $p(T)$  explică de ce plasmăle reci (din ionosferă sau din descărcările electrice în gaze rarefiate) sînt practic total ionizate.

### 6.11.2. OSCILAȚII ȘI UNDE ÎN PLASMĂ

Într-o plasmă se pot genera multiple forme de oscilații, funcție de natura perturbațiilor ce intervin (perturbații de natură elastică, electrică sau electromagnetică). Se constată că aceste oscilații se propagă în plasmă sub formă de unde.

Plasma fiind un mediu fluid, continuu la nivel macroscopic, va putea fi descrisă prin legi similare celor întâlnite în studiul mediilor continue (vezi cap. II). În acest studiu însă, va trebui să ținem seama și de prezența interacțiunilor de tip electromagnetic, a căror rol este însemnat datorită prezenței purtătorilor microscopici de sarcină electrică în plasmă. Se poate construi atît o teorie microscopică (statistică) a fenomenelor din plasmă, cît și o teorie macroscopică. Ultima este cunoscută sub denumirea de *magnetohidrodinamică* și constituie un capitol relativ nou al fizicii, care a cunoscut o dezvoltare spectaculoasă în ultimele decenii. Magnetohidrodinamica se bazează pe un sistem de ecuații fundamentale (*ecuațiile magnetohidrodinamicii*), în care se reunesc ecuațiile lui Maxwell cu ecuația lui Navier-Stokes (2.4.19) și cu ecuația masică de continuitate (2.4.22). Vom scrie aceste ecuații sub forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (n^+ - n^-) e\end{aligned}\quad (6.11.15)$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}); \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho_m = \frac{dm}{dV}$$

și vom analiza, cu ajutorul lor, cîteva procese ondulatorii care se pot naște în plasmă.

Mai întîi, să remarcăm că pentru cazul regimului staționar (plasmă în echilibru termodinamic și în cîmp electromagnetic constant în timp) ecuațiile magnetohidrodinamicii (6.11.15) se reduc la forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (n^+ - n^-) e; \quad \nabla p = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (6.11.16)$$



Ultima dintre aceste ecuații, descrie comportarea plasmei într-un câmp magnetic omogen ( $\mathbf{B} = \text{const.}$ ). Se vede că această ecuație poate fi transformată astfel

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2$$

sau

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

respectiv

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = P_0 = \text{const.} \quad (6.11.17)$$

Această lege exprimă faptul că într-o plasmă aflată în condiții de echilibru termodinamic în câmpuri magnetice constante în timp, suma presiunilor statice  $p$  și a celor magnetice  $p_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$  este constantă în timp.

Pe baza acestui rezultat se explică fenomenul de izolare magnetică a unei plasme de pereții incintei, fenomen deosebit de important pentru plasmăle fierbinți întâlnite în cazul reacțiilor termonucleare, care au temperaturi de  $10^6 \div 10^8 \text{K}$ , mult mai ridicate decât temperaturile de topire ale materialelor solide. Prin aplicarea unui câmp magnetic  $\mathbf{B}$  puternic la periferia incintei,  $p_B$  crește și în conformitate cu (6.11.17), plasma se va comprima în centrul incintei (unde presiunea  $p$  este mai scăzută).

Pentru oscilațiile produse de perturbațiile electrice (abateri de la cvasineutralitatea electrică a plasmei), studiul bazat pe ecuațiile (6.11.15) este în general destul de complex. Fiind vorba de un mediu fluid, ne așteptăm ca aceste perturbații să creeze unde longitudinale și de aceea, ne vom limita la cazul particular al unor unde plane. Să presupunem că inițial este vorba de o perturbație plană în care  $n_0$  electroni din unitatea de volum a plasmei s-au deplasat pe distanța  $y$ . Sub acțiunea câmpului electric creat (vezi 6.11.1), acești electroni se vor mișca conform ecuației

$$m_0 \ddot{y} = -eE = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} y. \quad (6.11.18)$$

Prin integrare găsim

$$y(t) = y_0 e^{-i\omega_p t} \quad (6.11.19)$$



unde

$$\omega_p = \left( \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \right)^{1/2} \quad (6.11.20)$$

reprezintă o pulsație proprie de oscilație a electronilor din plasmă. S-a constatat că aceste oscilații, la care participă numai electronii, se propagă sub formă de unde (numite *unde Langmuir*), cu viteza de fază

$$v_t = \frac{\omega_p}{k} \quad (6.11.21)$$

La frecvențe mici, această viteză de propagare este influențată și de către variațiile de presiune din plasmă, unda devenind o *undă electronoacustică*.

Plasma fiind un mediu fluid, ar trebui ca în ea să se poată propaga numai unde longitudinale. S-a constatat însă că în prezența unui câmp magnetic, în plasmă pot lua naștere și unde transversale — cunoscute sub numele de *unde magnetohidrodinamice* sau *unde Alfvén*. Pentru a înțelege modul de propagare a acestor unde, să presupunem că într-un anumit loc din

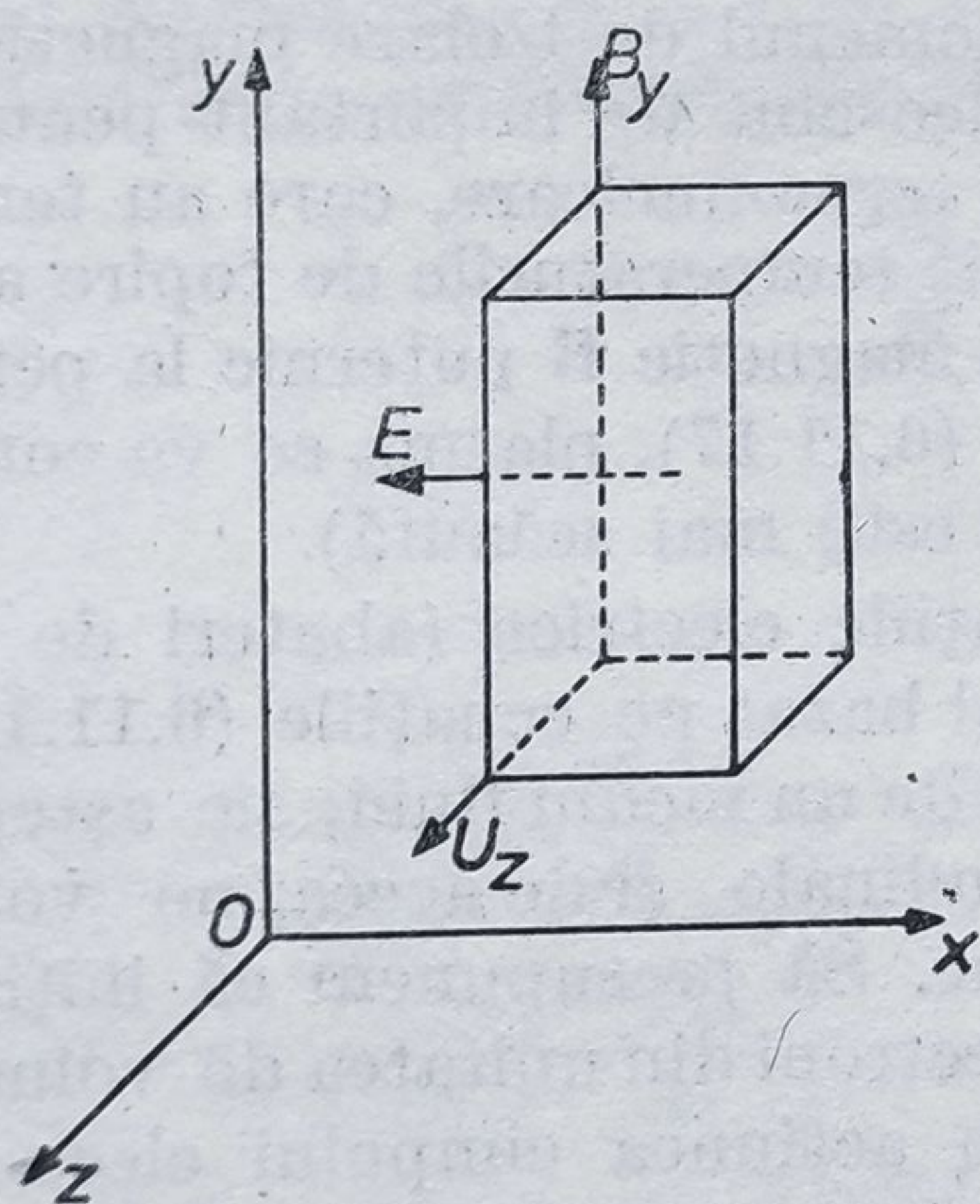


Fig. 6.11.2

plasmă s-a creat o perturbație electrică în care electronii liberi au fost deplasați cu viteza  $u_z$ , perpendicular pe direcția câmpului  $B_y$  de la starea lor de echilibru (fig. 6.11.2). Atunci, sub acțiunea forței Lorentz  $F_L = e(u \times B)$  se va crea un câmp electric  $E$  ( $eE = e(u \times B)$ , deci  $E = u \times B$ ), care va genera un curent electric în plasmă de densitate  $J$ . Asupra acestui curent va acționa câmpul magnetic cu forța  $dF = J \times B dV$ , care va frâna mișcarea inițială a plasmei. Dar zonele vecine perturbației inițiale din plasmă vor fi antrenate într-o mișcare similară și se vor obține astfel vibrații perpendiculare pe direcția lui  $B$ . Pentru a demonstra că aceste vibrații se propagă sub formă de unde, vom presupune cazul particular al unei plasmă incompresibile (densitatea masică  $\rho_m = \text{const.}$ , și vom par-

ticulariza ecuațiile (6.11.15) pentru  $E = \text{const.}$  în timp. Din primele două ecuații, prin eliminarea lui  $H$  se obține

$$\Delta E = -\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} \quad (6.11.22)$$



iar din ecuația Navier-Stokes, neglijând termenul  $(-\nabla p)$  din membrul al doilea

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (6.11.23)$$

Această ultimă ecuație se poate scrie, pentru geometria particulară prezentată în fig. 6.11.2, sub forma

$$\rho_m \frac{\partial u_z}{\partial t} = J_x B_y. \quad (6.11.24)$$

Dar

$$E_x = -u_z B_y \quad (6.11.25)$$

așa încît

$$J_x = \frac{\rho_m}{B_y} \frac{\partial u_z}{\partial t}. \quad (6.11.26)$$

Introducînd acest rezultat în (6.11.22) obținem

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} - \frac{\rho_m \mu_0}{B_y^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (6.11.27)$$

Ea descrie un proces ondulatoriu (este o ecuație de tip undă) care se propagă cu viteza

$$v = \frac{B_y}{\sqrt{\rho_m \mu_0}}. \quad (6.11.28)$$

Revenind la problema generală a propagării undelor în plasmă, să analizăm în continuare procesul propagării unei unde electromagnetice monocromatice într-o plasmă aflată în condiții de echilibru termodinamic. Fie

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.11.29)$$

cîmpul electric al undei. Acesta va antrena electronii liberi din plasmă într-o mișcare de oscilație, guvernată de legea

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (6.11.30)$$



Prin integrare, rezultă

$$\mathbf{v} = -i\omega \frac{e\mathbf{E}}{m_0\omega^2} \quad (6.11.31)$$

respectiv, inducerea unor curenți de densitate

$$\mathbf{J} = nev = -i\omega \frac{ne^2}{m_0\omega^2} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (6.11.32)$$

De notat că în acest proces, coeficientul de conductibilitate electrică  $\sigma$  este o mărime imaginară.

Pentru a caracteriza plasma din punct de vedere al propagării undei electromagnetice, vom folosi rezultatul (6.11.32) în a doua ecuație (6.11.15). Obținem

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left( -i\omega \frac{n_0 e^2}{m_0 \omega^2} + \epsilon_0 i\omega \right) \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon' \mathbf{E}. \quad (6.11.33)$$

Mărimea

$$\epsilon' = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} \right) = \epsilon_0 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right] \quad (6.11.34)$$

reprezintă constanta dielectrică a plasmei. În acest caz, viteza de propagare a undei electromagnetice în plasmă va fi dată de expresia

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \quad (6.11.35)$$

și se vede că în plasmă se vor propaga numai undele cu  $\omega > \omega_p$ . În domeniul  $\omega \leq \omega_p$ , viteza undei devine imaginară, ceea ce înseamnă că ea se va amortiza rapid la pătrunderea în plasmă. Se poate demonstra că amplitudinea undei scade de  $e$  ori la distanța

$$d = \frac{c}{\omega_p \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \quad (6.11.36)$$

care va juca rol de „adîncime skin” (vezi § 6.10.5).



În ultima vreme, studiul plasmei este strâns legat de aplicațiile practice ale ei în diverse domenii, ca surse de lumină cu plasmă, generatoare magnetohidrodinamice (MHD), reacții termonucleare, topirea metalelor și aliajelor în plasmă și chiar realizarea unor motoare cu reacție cu plasmă. În generatoarele MHD, care transformă direct în energie electrică energia termică (cu randamente mult superioare mașinilor termice), plasma fierbinte se injectează cu viteze mari  $[(1 \div 3)10^3 \text{ m/s}]$  între două armături metalice colectoare (fig. 6.11.3), unde acționează un câmp magnetic  $B$  orientat perpendicular pe direcția de curgere a plasmei. Sub acțiunea forței Lorentz ( $F = ev \times B$ ) purtătorii de sarcină pozitivă se vor separa de cei de sarcină negativă și vor fi colectați de către cele două armături. Va apare astfel o tensiune electrică  $U$ , care pentru  $v = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ,  $B = 2 \text{ T}$  și  $d = 10 \text{ cm}$ , atinge valoarea de 400 volți.

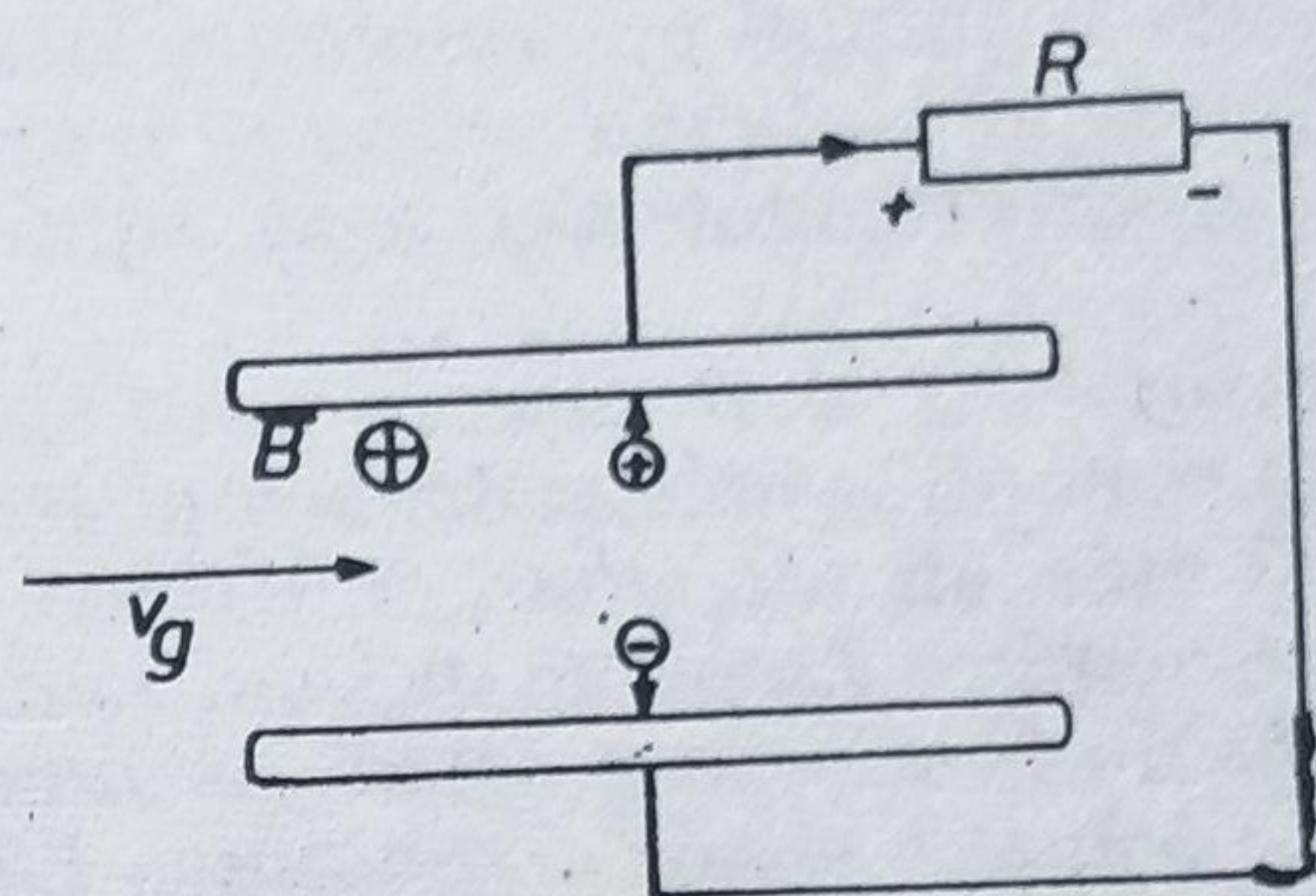


Fig. 6.11.3



## Elemente de optică

## § 7.1. INTRODUCERE

Optica este unul dintre cele mai vechi capitole ale fizicii. Ea studiază fenomenele produse de undele luminoase, adică de acele unde care impresionează și ochiul uman, producând senzații vizuale. Astăzi se știe că undele luminoase fac parte din gama undelor electromagnetice, ocupînd o porțiune relativ restrînsă din spectrul acestor unde, cuprinsă între lungimile de undă  $\lambda_1 = 0,39 \mu\text{m}$  și  $\lambda_2 = 0,75 \mu\text{m}$  (fig. 7.1.1.). De notat că după desco-

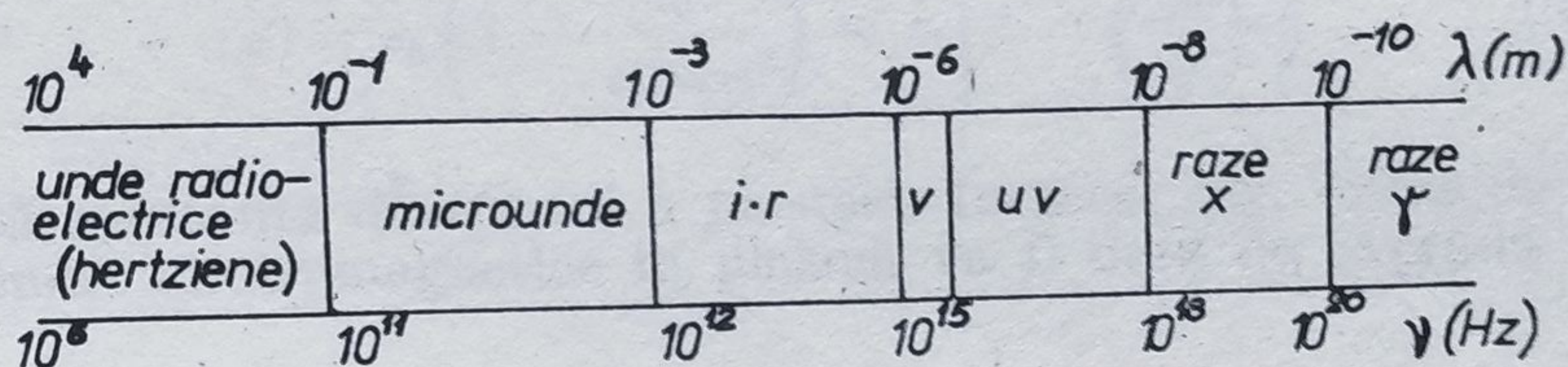


Fig. 7.1.1

perirea radiațiilor infraroșii cu  $\lambda \in (0,75; 1,2 \mu\text{m})$  și a celor ultraviolete cu  $\lambda \in (0,1; 0,39 \mu\text{m})$  și după ce s-a constatat că aceste radiații au proprietăți și produc fenomene asemănătoare cu ale celor luminoase, optica și-a extins domeniul ei de investigație și asupra acestor radiații.

Primul capitol constituit al opticii — *optica geometrică* — s-a dezvoltat în strînsă legătură cu problema obținerii unor imagini ale obiectelor cu ajutorul razelor de lumină care străbat diverse medii optice. Această problemă, de mare interes practic, a putut fi rezolvată efectiv pe baza ipotezei propagării rectilinii a luminii în medii materiale omogene, a legilor reflexiei, refracției și a independenței fasciculelor de lumină (fasciculele de lumină nu se influențează reciproc, efectele luminoase produse la suprapunerea lor fiind cumulative). Astăzi se știe că la baza ipotezei privind propagarea rectilinie a luminii stă noțiunea de rază de lumină (vezi și § 6.10.4) și că această noțiune este valabilă numai în aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ . Radiațiile lumi-



noase, avînd  $\lambda \neq 0$ , produc și o serie de fenomene specifice ondulatorii cum sînt: interferența, difracția, dispersia, polarizarea, efectul Doppler etc., iar de prezența acestora trebuie să se țină seama și în problema obținerii de imagini optice.

Studiul fenomenelor specifice ondulatorii produse de lumină a condus la constituirea unui alt capitol al opticii — *optica ondulatorie*. Acest capitol a cunoscut o dezvoltare deosebită după ce a fost dovedită natura electromagnetică a undelor luminoase.

Începînd cu anul 1900, în studiul radiațiilor luminoase în particular și a celor electromagnetice în general, a fost introdus conceptul de *cuantă de radiație* și apoi cel de *foton*, care au constituit momente de salt în studiul fenomenelor produse de lumină. A fost pusă în evidență comportarea duală, corpuscular-ondulatorie, a luminii în toate procesele de interacțiune cu substanța, dezvoltîndu-se astfel capitolul — *optica fonică* — cu impact deosebit asupra teoriilor cuantice. Dualismul undă-corpusul s-a regăsit în comportarea microparticulelor (a electronilor, protonilor, neutronilor etc.), așa încît în optică s-a conturat un nou capitol — *optica electronică* —, aflat în prezent în plină dezvoltare.

Se poate remarca din cele de mai sus că fenomenele luminoase sînt, în general, fenomene complexe în care aspectul cel mai pregnant de care trebuie să se țină cont în studiul lor este comportarea duală, corpuscular-ondulatorie a luminii.

Studiul acestor fenomene se poate face însă în cadrul unor modele particulare care iau în considerație fie numai comportarea ondulatorie, fie numai cea corpusculară. În prezentul capitol se va expune studiul unor fenomene luminoase în cadrul teoriei ondulatorii (electromagnetice) a luminii și se va particulariza apoi acest studiu pentru cazul opticii geometrice.

## § 7.2. CARACTERISTICI ENERGETICE ALE RADIAȚIILOR LUMINOASE. FOTOMETRIE ȘI MĂSURĂTORI FOTOMETRICE

În capitolul II s-a arătat că mediul material prin care se propagă unda are o anumită energie legată de undele respective, energie care se asociază mișcărilor pe care unda le determină în respectivul mediu. Cum aceste mișcări se propagă din aproape în aproape prin intermediul interacțiunilor din mediu, putem spune că și energia aferentă lor se „transferă” dintr-o parte în alta a mediului, odată cu propagarea undelor. Această energie se numește *energie a undelor*.

În cazul undelor electromagnetice energia unei unde se poate descrie prin intermediul vectorului Poynting

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.2.1)$$



care, așa cum s-a menționat în § 6.3, reprezintă fluxul de energie electromagnetică pe unitatea de arie și marchează în același timp atât direcția cât și sensul de propagare a acestui flux.

Într-un context mai general, s-ar putea spune că prin intermediul undelor, variațiile în timp ale stării energetice ale sursei de unde sînt transmise din aproape în aproape unui receptor și înregistrate prin variații corespunzătoare ale stării energetice a acestuia. Se realizează astfel o legătură între sursă și receptor, în care unda joacă rol de semnal purtător de „mesaj energetic”. De regulă, transmiterea acestui semnal presupune o anumită codificare la emisie (modularea prin reflexia luminii pe un anumit corp, de exemplu) și o decodificare la receptor (obținerea imaginii corpului respectiv) așa încît întregul proces poate fi descris în cadrul unui limbaj mai general al teoriei informației. Într-un astfel de cadru este avantajos și util să descriem caracteristicile semnalului (deci ale undelor) în funcție de cele ale receptorului sau ale sursei. Dar înainte de a arăta cum se poate face această descriere, să remarcăm că și în cazul undelor electromagnetice intervin modificări energetice ale mediului material prin care se propagă undele. Aceste modificări se datoresc interacțiunii cîmpului electromagnetic al undelor cu respectivul mediu material și pot fi descrise prin intermediul densității volumice de energie electromagnetică  $w_{EB}$ . S-a văzut că pentru medii nedisipative, această mărime este legată de vectorul lui Poynting  $S_P$  prin ecuația de continuitate (6.3.20).

$$\frac{\partial w_{EB}}{\partial t} + \nabla S_P = 0 \quad (7.2.2)$$

care exprimă, într-o formă locală, legea conservării energiei în procesul de transfer din aproape în aproape a interacțiunilor electromagnetice.

În cazul unei unde electromagnetice plane, printr-un raționament analog celui care a condus la definirea vectorului lui Umov  $U(t) = w(t) \cdot \mathbf{e}$  (vezi cap. II) se obține relația

$$S_P(t) = w_{EB}(t) \cdot \mathbf{v} \quad (7.2.3.)$$

$\mathbf{v}$  reprezentînd aici vectorul viteză de propagare a undei. În felul acesta s-a regăsit relația care leagă mărimea de stare  $w_{EB}$ , de mărimea de proces  $S_P$  (ultima descriind procesul de transfer a energiei odată cu propagarea undei de la sursă la receptor), relație care înlătură orice confuzie între semnificația energiei ca mărime de stare și semnificația lui  $S_P$ , care descrie un proces de propagare.

Pentru unde monocromatice plane de forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.2.4)$$

valoarea instantanee a vectorului Poynting (7.2.1) este dată de relația

$$S_P(t) = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (7.2.5)$$



Se numește *vector intensitate energetică* a undei, media în timp a vectorului  $\mathbf{S}_p(t)$ , adică mărimea fizică definită prin relația

$$\mathbf{I}_e = \langle \mathbf{S}_p \rangle = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \left( \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dt \right) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0. \quad (7.2.6)$$

Ținînd cont de (6.10.26) și de legătura dintre  $\mathbf{H}_0$  și  $\mathbf{E}_0$ , expresia (7.2.6) poate fi rescrisă sub forma

$$\mathbf{I}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_0 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{e}) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{e} \quad (7.2.7)$$

unde s-au folosit notațiile

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (7.2.8)$$

$\mathbf{k}$  fiind vectorul de undă. În sfîrșit, cu (6.10.38) se obține

$$\mathbf{I}_e = \frac{1}{2\mu\omega} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{k}. \quad (7.2.9)$$

Modulul vectorului  $\mathbf{I}_e$  se va numi *intensitatea energetică* a undei

$$I_e = |\mathbf{I}_e| = \frac{1}{2\mu v} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (7.2.10)$$

iar exprimarea acestei intensități prin intermediul intensității cîmpului electric  $\mathbf{E}$  ține seama de faptul că majoritatea fenomenelor optice (senzația vizuală, efectul fotochimic, efectul fotoelectric etc.) sînt determinate de componenta electrică a cîmpului electromagnetic al undei. De aceea, vectorul  $\mathbf{E}$  se mai numește și *vector optic* sau *vector luminos*.

De notat că intensitatea energetică a undei exprimă fluxul energetic transportat de undă prin unitatea de arie orientată normal la direcția de propagare a undei. Deci

$$I_e = \frac{1}{S} \frac{dw}{dt} = \frac{\Phi_e}{S}. \quad (7.2.11)$$

Considerațiile făcute mai sus, pentru unde monocromatice plane, pot fi extinse și asupra unor cazuri mai generale în care intervin fascicule nemonocromatice de diverse forme geometrice. De exemplu, pentru undele sferice descrise prin ecuații de forma (6.10.51), avînd în vedere faptul că



fluxul energetic ce străbate aria  $dS$ , situată la distanța  $r$  de sursa  $O$  (fig. 7.2.1, a) este dat de expresia

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= \langle S_p \rangle dS = \left| \frac{\mathbf{E}_0}{r} \times \frac{\mathbf{H}_0}{r} \right| \cdot \left( \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dt \right) dS \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0| \frac{dS \cos \theta}{r^2} = I_e d\Omega \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

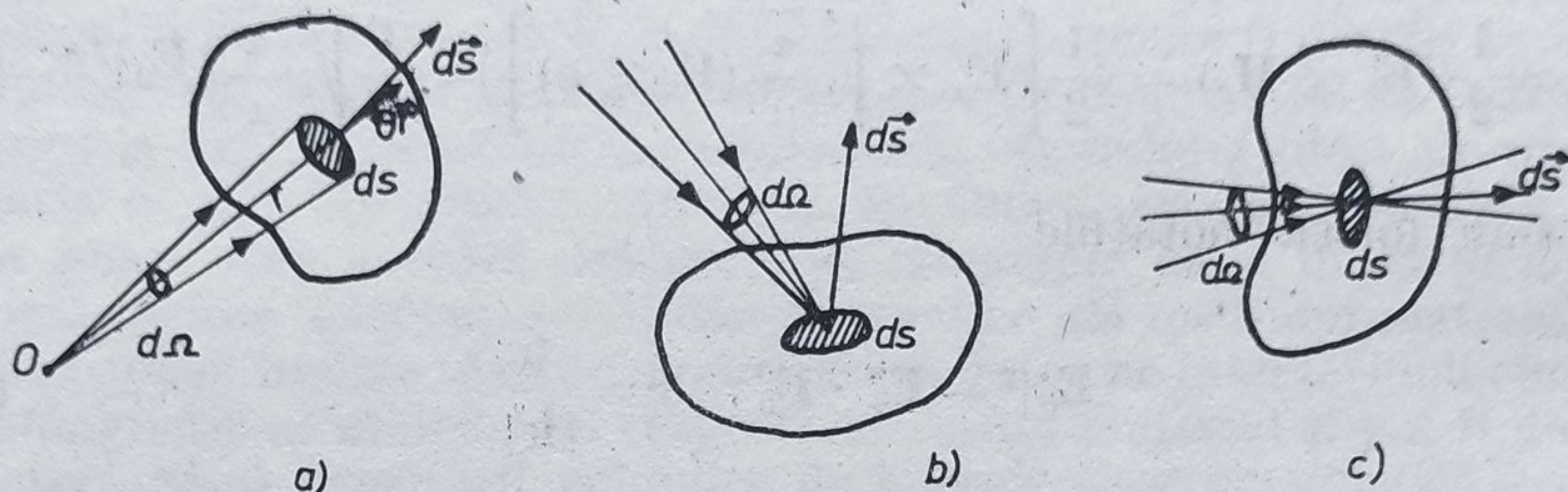


Fig. 7.2.1

unde  $d\Omega$  reprezintă elementul de unghi solid sub care se observă elementul de suprafață  $dS$  din sursa punctiformă  $O$ . Deci

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}.$$

Astfel definită, intensitatea energetică a undei va putea fi folosită în caracterizarea energetică atât a surselor punctiforme, cât și a receptoarelor de radiație, respectiv a suprafețelor străbătute de lumină (fig. 7.2.1., b și c).

În cazul radiațiilor nemonocromatice se definește fluxul energetic spectral  $\Phi_{e\lambda}$ , prin expresia

$$\Phi_{e\lambda} = \frac{d\Phi_e}{d\lambda} \quad \left( \text{sau } \Phi_{e\nu} = \frac{d\Phi_e}{d\nu} \right) \quad (7.2.14)$$

respectiv intensitatea spectrală

$$I_{e\lambda} = \frac{dI_e}{d\lambda}. \quad (7.2.15)$$

De asemenea, pentru o distribuție unghiulară neuniformă a intensității surselor, se definește o intensitate energetică medie pe unghiul solid, prin expresia

$$\langle I_e \rangle = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left( \int_0^{4\pi} I(\Omega) d\Omega \right). \quad (7.2.16)$$



De remarcat însă că aceste mărimi, numite și *mărimi fotometrice*, nu sînt suficiente pentru caracterizarea completă a tuturor surselor și receptorilor de energie radiantă. De aceea, pentru caracterizarea din punct de vedere energetic a surselor extinse s-au mai definit următoarele mărimi fotometrice :

*Luminanța energetică*  $L_e$ , care exprimă fluxul emis de unitatea de arie a sursei în unitate de unghi solid pe direcția normală la suprafața acesteia (fig. 7.2:2)

$$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{dS \cdot d\Omega \cos \theta} \quad (7.2.18)$$

Experiența arată că în general luminanța surselor depinde de unghiul  $\theta$  sub care este emis fluxul luminos față de normala la suprafața sursei. Dacă pentru o sursă extinsă dată, este îndeplinită condiția  $L_{e\theta} = \text{const.}$  se spune că această sursă este „de tip Lambert”. Pentru o sursă de tip Lambert, de arie  $S$ , se poate scrie

$$\Phi_e = \int_{(\Omega)} L_{e\theta} S d\Omega \cos \theta = L_{e\theta} S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi L_{e\theta} S. \quad (7.2.19)$$

*Emitanța energetică*  $M_e$  (sau *radianța*  $R_e$ , respectiv *puterea de emisie a sursei*) : exprimă fluxul radiant emis în unghiul solid  $2\pi$ , de către unitatea de arie a sursei

$$M_e = \frac{\Phi_{2\pi}}{S} = 2\pi \int_0^{\pi/2} L_e \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \pi L_e \quad (7.2.20)$$

ultima egalitate fiind valabilă numai pentru sursele de tip Lambert.

*Iluminarea energetică*  $E_e$  exprimă gradul de iluminare a suprafeței receptorului de radiație și se definește prin fluxul de radiație incidentă

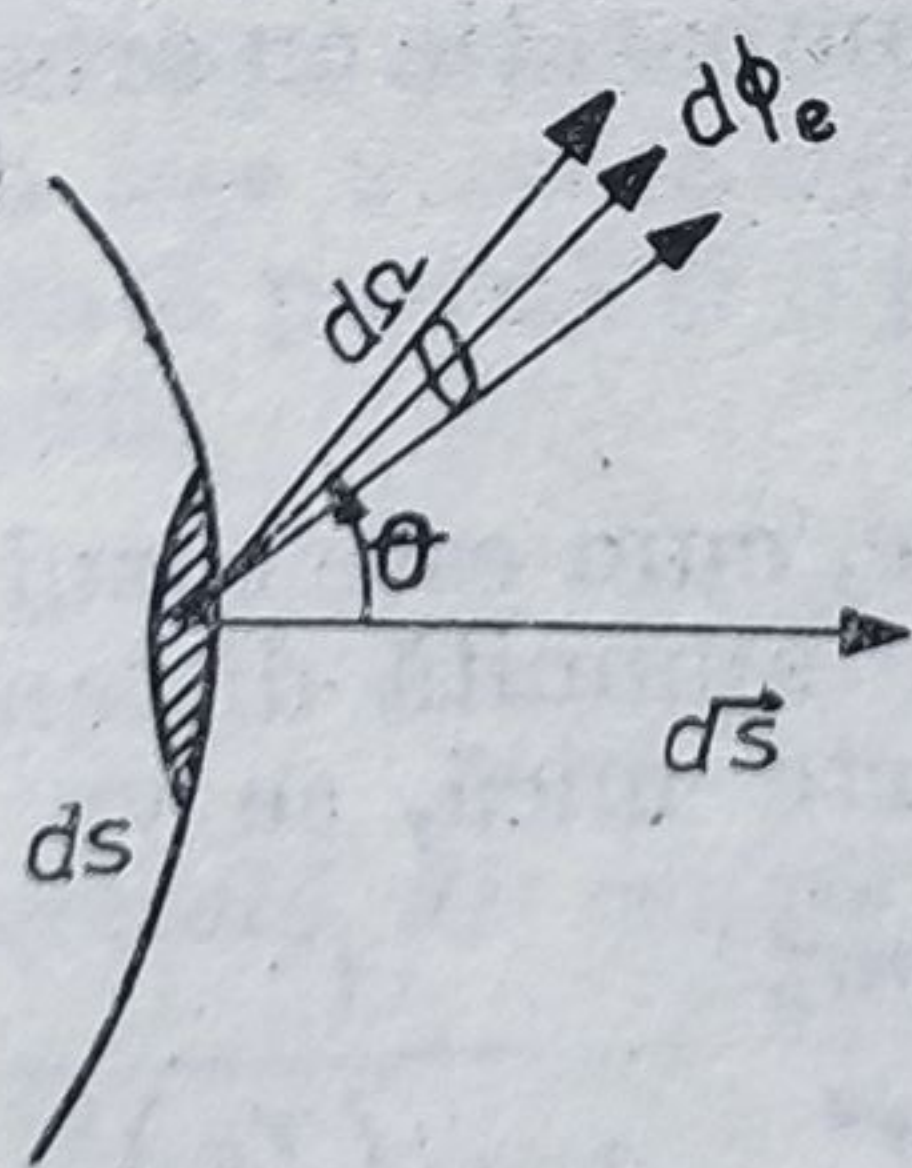


Fig. 7.2.2

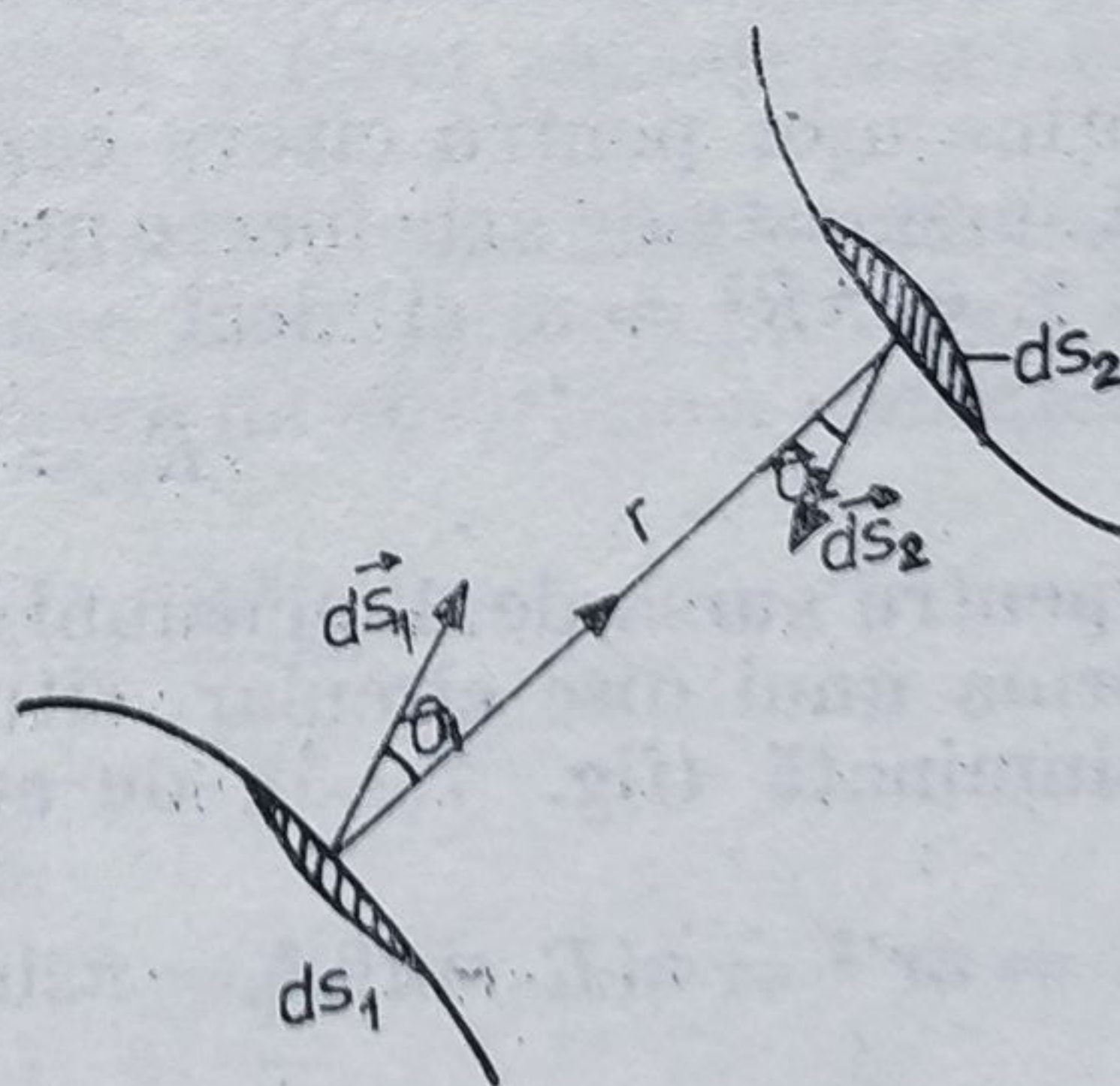


Fig. 7.2.3



$\Phi_e^i$ , ce cade pe unitatea de arie a acestuia

$$E_e = \frac{d\Phi_e^i}{dS} \quad (7.2.21)$$

Pentru receptoare iluminate de surse punctiforme, se vede (fig. 7.2.1, a) că putem scrie

$$E_e = \frac{d\Phi_e^i}{dS} = \frac{I_e d\Omega}{dS} = \frac{I_e \cos\theta}{r^2} \quad (7.2.22)$$

iar pentru sursele extinse (fig. 7.2.3)

$$dE_e = \frac{dI_e}{r^2} \cos\theta_2 = \frac{(L_e \cos\theta_1 \cdot dS_1)}{r^2} \cos\theta_2 = L_e \cos\theta_2 \cdot d\Omega_2$$

deci

$$E_e = L_e \int \cos\theta_2 \cdot d\Omega_2 = L_e \Sigma. \quad (7.2.22)$$

Aici prin  $\Sigma$  s-a desemnat un factor geometric care reprezintă proiecția pe planul de iluminare a ariei delimitată de fasciculul luminos ce vine de la sursa, pe suprafața unei sfere de rază  $R = 1$  (fig. 7.2.4). Valoarea lui  $\Sigma$

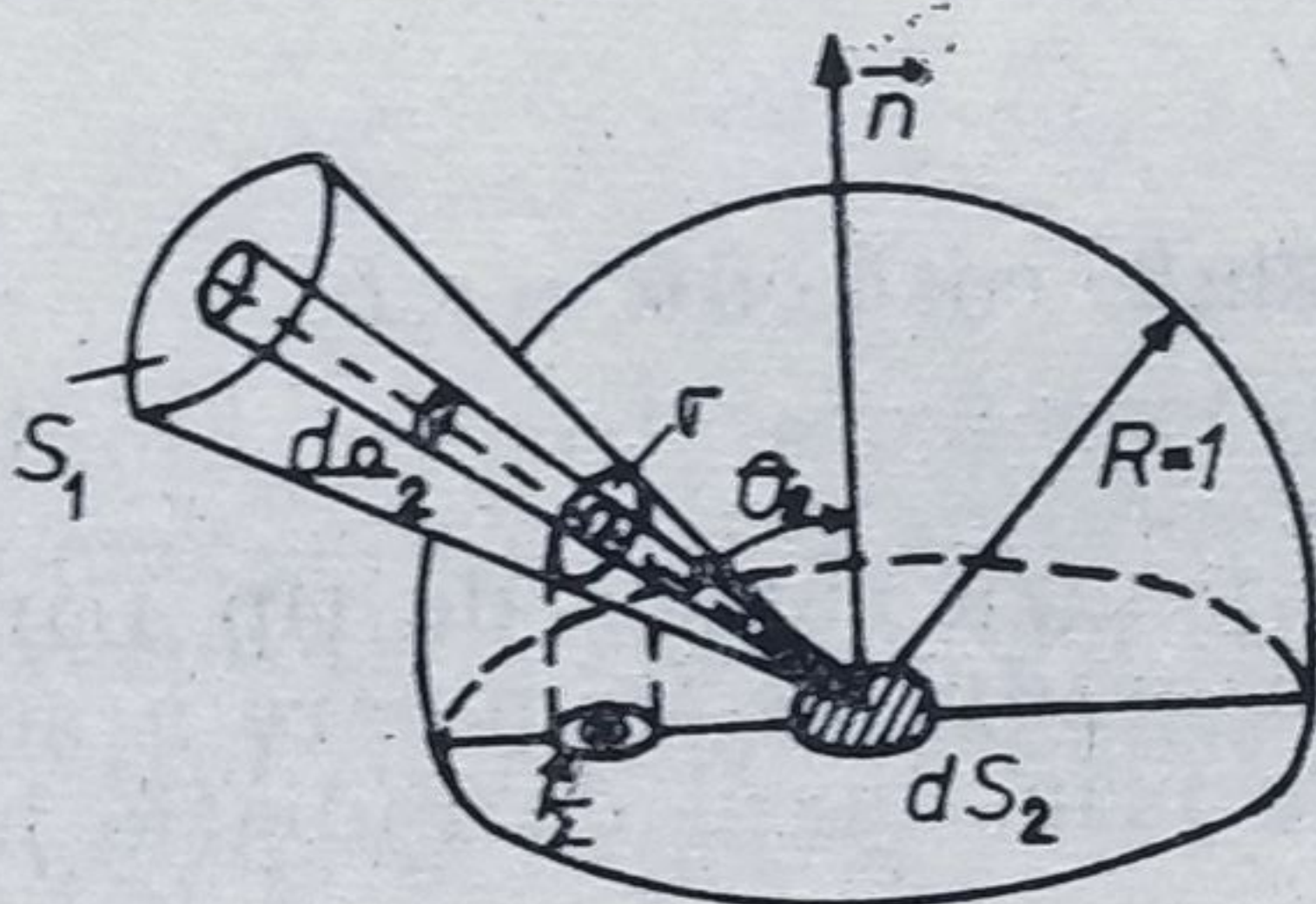


Fig. 7.2.4

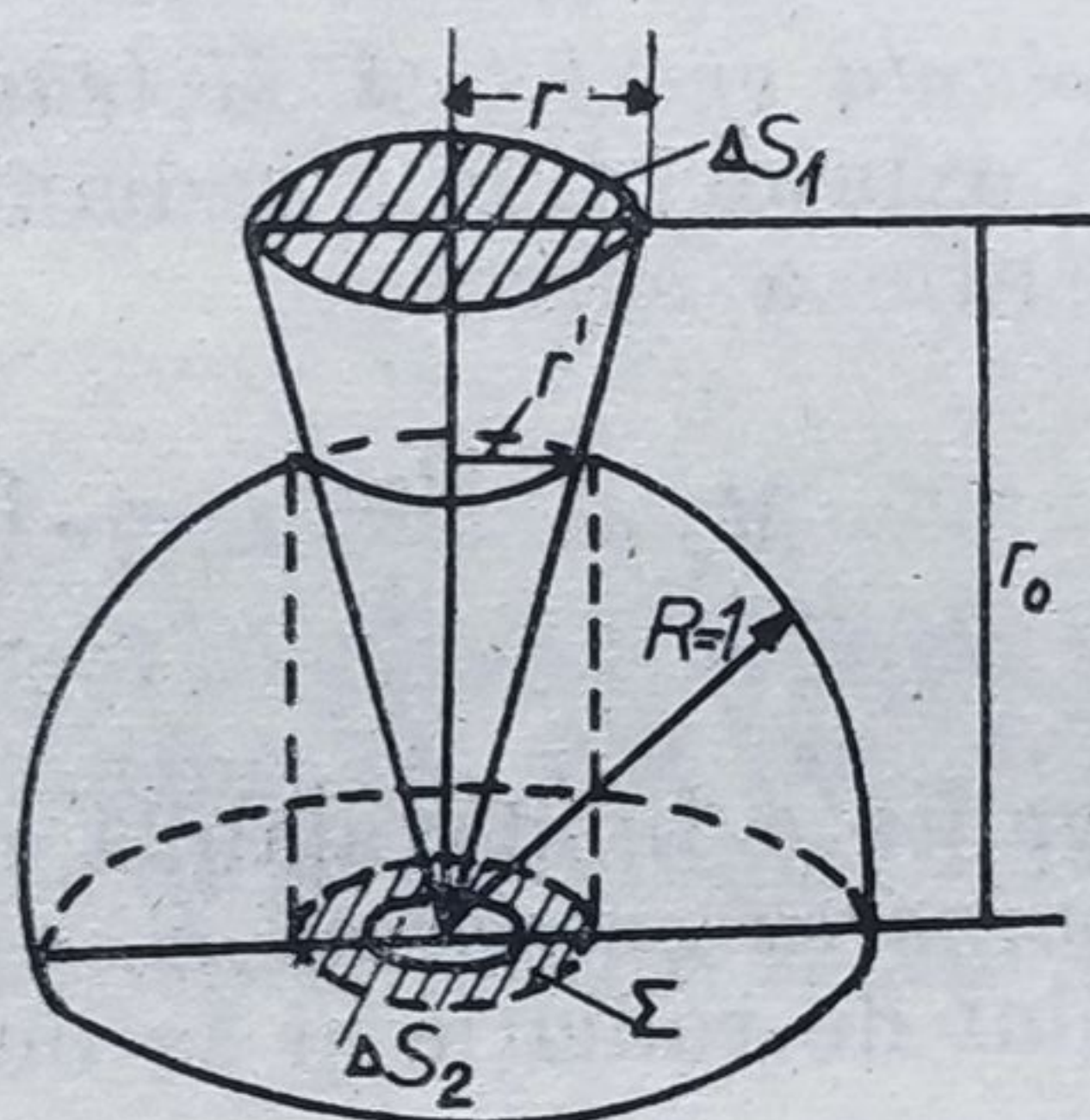


Fig. 7.2.5

se poate obține ușor pentru câteva cazuri particulare, de interes practic. Astfel, dacă sursa este de arie foarte mare în comparație cu aria receptorului, atunci  $\Sigma = \pi R^2 = \pi$  și deci

$$E_e = \pi L_e. \quad (7.2.23)$$

În schimb, pentru sursa de dimensiuni limitate, cum este cazul unei surse plane de forma unui disc circular, situat la o anumită distanță față de suprafața iluminată (fig. 7.2.5), de arie foarte mică, se va obține

$$\Sigma = \pi r'^2 = \pi (R \sin\theta)^2 = \pi \sin^2\theta = \frac{\pi r_0^2}{r^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}$$



deci

$$E_e = \pi \cdot \Sigma \cdot L_e = \frac{\pi r_0^2 L_e}{r^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} = K E_0 \quad (7.2.24)$$

unde s-au folosit notațiile  $E_0 = \frac{\pi L_e r_0^2}{r^2}$ ;  $K = \frac{1}{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}$ .

Rezultatul (7.2.24) ne arată că în calcularea iluminării create de sursele extinse, ale căror dimensiuni sînt mai mici decît a cincea parte din distanța sursă-receptor  $\left(r_0 \leq \frac{1}{5} r\right)$ , sursele se pot presupune ca fiind punctiforme, întrucît în aceste cazuri iluminarea creată de sursa extinsă reprezintă peste 99% din iluminarea pe care ar crea-o sursa punctiformă ( $E_e = 99\% E_0$ ).

De remarcat că relațiile (7.2.22) și (7.2.23) stabilesc o legătură între caracteristicile energetice ale sursei și ale receptorului de radiație. În forma prezentată mai sus, această legătură nu ține seama de efectele perturbatoare ale mediului prin care se propagă radiația (adică de fenomenele de dispersie, difuzie, absorbție, interferență, polarizare, reflexie etc., a undelor). Dar chiar și în această aproximație, relațiile (7.2.22) și (7.2.23) ne arată că există posibilitatea descrierii caracteristicilor energetice ale receptorilor de radiație funcție de cele ale surselor. O descriere energetică completă (inclusiv a structurii spectrale) se poate însă face numai pentru sursele de *radiație termică*, adică pentru acele surse care emit radiații luminoase prin încălzire. Această constatare se bazează pe faptul că radiația termică este o radiație electromagnetică de echilibru termic (închisă într-o incintă adiabatică, o astfel de radiație realizează transferul de energie între toate corpurile din incintă, aducîndu-le pe toate la aceeași temperatură de echilibru  $T$ , caracteristică și radiației din incintă) și numai pentru o astfel de radiație, distribuția energetică pe frecvențe se face în conformitate cu legile termodinamicii și ale fizicii statistice. Există însă și surse care emit radiații luminoase de neechilibru, cum sînt sursele *luminescente* (fluorescente și fosforescente), a căror caracterizare energetică se face altfel decît cea expusă mai jos.

Experiența arată că pentru sursele de radiații termice este valabilă așa numita *lege a lui Kirchhoff*, care stabilește că un corp cu putere de emisie ridicată posedă și o putere mare de absorbție a radiației respective. Definind prin

$$r_T(\lambda) = \frac{dM_e}{d\lambda} \quad (7.2.25)$$

puterea spectrală de emisie și prin

$$a_T(\lambda) = \frac{\Phi_\lambda^a}{\Phi_\lambda^i} \quad (7.2.26)$$



puterea spectrală de absorbție ( $\Phi_\lambda^i$  și  $\Phi_\lambda^a$  fiind fluxurile spectrale incidente și cel absorbit de corp), atunci legea lui Kirchhoff stabilește că raportul acestor mărimi nu depinde de tipul și natura corpului, ci numai de temperatura lui  $T$  și de lungimea de undă  $\lambda$  a radiației. Deci

$$\frac{r_T(\lambda)}{a_T(\lambda)} = f(T, \lambda). \quad (7.2.27)$$

S-a definit drept *corp absolut negru*, corpul care absoarbe integral toate radiațiile ce cad pe el, adică corpul pentru care

$$a_T = \int_0^\infty a_T(\lambda) d\lambda = 1. \quad (7.2.28)$$

În natură nu există corpuri absolut negre, ci numai corpuri pentru care  $a_T \lesssim 1$ , numite și „corpuri cenușii”. Se poate realiza însă un sistem care să absoarbă total radiația termică ce cade pe el. De exemplu, se constată că o incintă cu pereții absorbbanți, prevăzută cu un orificiu  $O$  (fig. 7.2.6, a), absoarbe integral radiația ce pătrunde prin respectivul orificiu, ca urmare a reflexiilor interioare multiple, însoțite de absorbție. Prin urmare, orificiul incintei capătă în acest caz, proprietățile unui corp absolut negru pentru că el va absorbi, respectiv va emite, toate radiațiile cu  $\lambda \in (0, \infty)$ . Distribuția energiei pe aceste radiații cu lungimi de undă diferite adică dependența

$$r_T^N(\lambda) = f(\lambda, T) \quad (7.2.29)$$

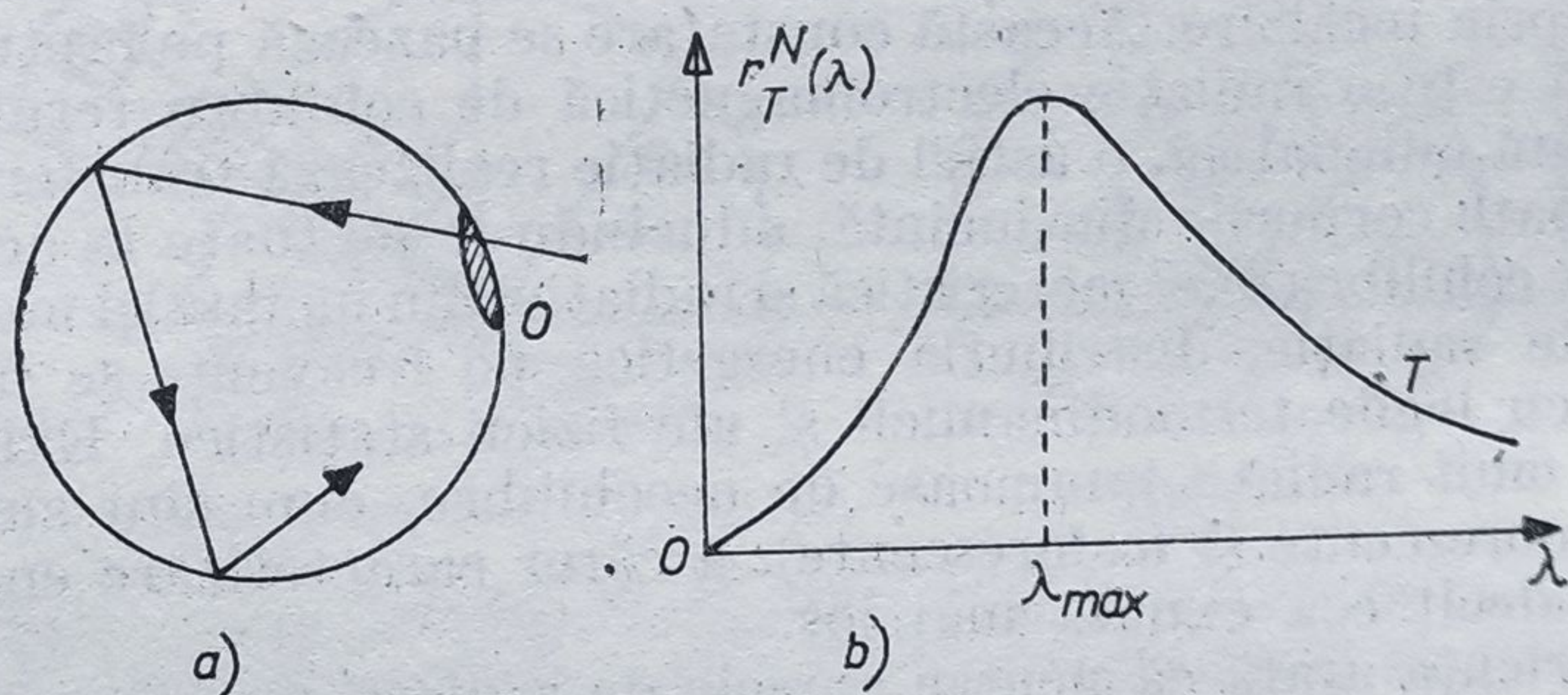


Fig. 7.2.6

este o curbă de forma celei prezentate în fig. 7.2.6, b, cu un maxim a cărui poziție depinde de temperatura  $T$  a sursei.

Se știe [43], că legea de distribuție a energiei pe unde de diverse lungimi de undă  $\lambda$  a fost obținută de către Max Planck, în anul 1900, pe baza ipotezei emisiei și absorbției discontinue, sub formă de cuante de energie ( $\varepsilon = h\nu$ ) a radiațiilor termice. Această lege este de forma

$$r_T^N(\lambda) = C_1 \lambda^{-5} (e^{C_2/\lambda T} - 1)^{-1} \quad (7.2.30)$$



$C_1$  și  $C_2$  fiind două constante, legate de constanta lui Planck  $h$  și de alte constante universale. În acest caz

$$R_T^N = \int_0^\infty r_T^N(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 = 5,6697 \cdot 10^{-8} \cdot T^4 \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right) \quad (7.3.31)$$

relație care exprimă *legea Stefan-Boltzmann*, iar

$$\lambda_{\max} \cdot T = b = 2,8978 \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot \text{K} \quad (7.2.32)$$

relație care exprimă *legea de deplasare Wien*.

În felul acesta, se obține o descriere energetică completă (integrală și spectrală), atât a surselor cât și a receptoarelor de radiație termică, cu condiția ca acestea să aibă calitățile de corpuri absolut negre.

Dar, în general, suprafețele emițătoare ca și cele receptoare de radiație termică nu posedă astfel de calități. De aceea, pentru aceste suprafețe se definește o mărime

$$\varepsilon_T(\lambda) = \frac{r_T(\lambda)}{r_T^N(\lambda)} \quad (7.2.23)$$

denumită *capacitate spectrală de emisie* a corpului respectiv care, așa cum se vede, raportează puterea spectrală de emisie a corpului respectiv la puterea de emisie a corpului absolut negru. Dacă se admite că structura spectrală a radiației emisă de către corpul respectiv la o temperatură  $T$  este aceeași sau foarte apropiată de a unui corp absolut negru, aflat de asemenea la temperatura  $T$  (adică:  $f(T, \lambda) \simeq f'(T, \lambda)$ , atunci din (7.2.27) rezultă

$$\varepsilon_T(\lambda) = \frac{a_T(\lambda) \cdot f(T, \lambda)}{a_T^N(\lambda) \cdot f'(T, \lambda)} = a_T(\lambda) \quad (7.2.34)$$

adică puterea de emisie spectrală a unui corp este egală cu puterea lui de absorbție la aceeași temperatură  $T$ . De notat că egalitatea (7.2.34) reprezintă o altă formă de exprimare a legii lui Kirchhoff. Faptul însă că mărimile  $\varepsilon_T(\lambda)$  și  $a_T(\lambda)$  posedă valori diferite în diverse domenii ale spectrului radiațiilor luminoase poate constitui de multe ori un avantaj pentru receptoarele de radiații termice. Dacă, de exemplu, pentru un receptor  $a_T(\lambda)$  are valori ridicate în domeniul vizibil, iar  $\varepsilon_T(\lambda)$  are valori mici în domeniul infraroșu al spectrului, atunci un astfel de receptor va fi o adevărată „capcană de energie solară”, pentru că el va absorbi o cantitate mai mare de energie (din domeniul vizibil al spectrului solar) decât energia pe care o va emite (emisie care se face în infraroșu, pentru temperaturi de ordinul a 400 K). De exemplu, carbura de hafniu (HfC) are  $\varepsilon_T(\lambda) = 0,1 \div 0,2$  pentru  $\lambda = 4 \div 10 \mu\text{m}$  și  $a_T(\lambda) = 0,75$ , pentru domeniul vizibil ( $a/\varepsilon \sim 4,5$ ), în cazul aluminiului metalic  $\varepsilon_T(\lambda) = 0,027$  în infraroșu, iar  $a_T(\lambda) = 0,387$  pentru domeniul vizibil ( $a/\varepsilon = 14,3$ ).



Folosirea unor astfel de suprafețe ca receptoare de energie solară oferă posibilitatea utilizării acestora în instalații de tip termo-electric sau în instalații de încălzit. De altfel pe principiul „capcanei termice” funcționează deja o serie de receptoare de energie solară instalate pe navele cosmice și se întrevăd perspective reale pentru construirea unor stații termo-electrice terestre, eficiente din punct de vedere economic. De exemplu, pentru un receptor de radiație solară (Soarele putând fi considerat ca un corp absolut negru), de arie  $S$  și  $a/\varepsilon > 1$ , pe care cade fluxul de energie  $\Phi_e$ , adunat de un concentrator de radiații de arie  $S_1$  se va stabili o temperatură de echilibru, dată de condiția

$$\Phi_e S_1 = \frac{\varepsilon}{a} \sigma T^4 S. \quad (7.2.35)$$

Deci

$$T = \left( \frac{a}{\varepsilon} \frac{S_1}{S} \frac{\Phi_e}{\sigma} \right)^{1/4}. \quad (7.2.36)$$

Calcululele numerice dau o valoare  $T \simeq 650$  K, pentru un receptor cu  $a/\varepsilon = 8$  și un concentrator cu  $S_1/S = 4$ , pe care cade fluxul  $\Phi_e = 1$  kW/m<sup>2</sup>, temperatură suficient de ridicată pentru a obține aburi care să propulseze turbina electrică. Desigur, rezolvarea practică a unei astfel de probleme este condiționată de realizarea unor materiale adecvate, materiale cu  $a/\varepsilon$  de valori ridicate pentru radiația solară, obținute la prețuri convenabile.

Revenind la problema generală a stabilirii legăturii energetice dintre sursă și receptorul de radiație, este de remarcat rolul ce revine în acest proces mediului material (substanței) prin care se propagă undele. El este sediul unor procese ondulatorii (absorbție, dispersie, polarizare etc.) care afectează fluxul energetic transmis  $\Phi'_e(\lambda)$ , în așa fel, încît se poate defini un coeficient  $\alpha(\lambda)$ , de utilizare a radiației de către receptor

$$\Phi'_e(\lambda) = \alpha(\lambda) \cdot \Phi_e(\lambda). \quad (7.2.37)$$

În cazul măsurătorilor fotometrice, energia radiantă absorbită de receptor este transformată în altă formă de energie (termică, electrică, chimică, luminoasă etc.) și apoi înregistrată cu ajutorul unei instalații auxiliare, sub formă de semnal electric. Raportul dintre puterea semnalului electric obținut și fluxul radiant absorbit de receptor va descrie sensibilitatea receptorului. Există receptoare a căror sensibilitate variază puțin cu lungimea de undă a radiației (receptoare neselective) și receptoare sensibile numai pe domenii restrînse din spectrul radiațiilor luminoase (receptoare selective). Din clasa receptoarelor neselective fac parte receptoarele termice (bolometrele, termocupluri le etc.), iar din clasa celor selective receptoarele care folosesc efectul fotoelectric, receptoarele fotoemisive, fotorezistive, luminiscente, fotodiodele, ochiul etc. Acestea se pot utiliza doar pe anumite domenii restrînse ale spectrului radiațiilor optice. S-au definit, din acest punct de vedere, următoarele cinci domenii: domeniul



ultraviolet ( $\lambda = 0,1 \div 0,38 \mu\text{m}$ ), domeniul vizibil ( $\lambda = 0,38 \div 0,78 \mu\text{m}$ ), infraroșul apropiat ( $\lambda = 0,78 \div 1,4 \mu\text{m}$ ), infraroșul mediu ( $\lambda = 1,4 \div 3 \mu\text{m}$ ) și infraroșul îndepărtat ( $\lambda = 3 \div 1000 \mu\text{m}$ ). Numai receptoarele termice și fotorezistorii pot fi utilizați pentru toate aceste cinci domenii, emulsia fotografică este sensibilă numai în ultraviolet, vizibil și infraroșu apropiat, iar ochiul numai în vizibil.

În ultima vreme, gama receptoarelor de radiație s-a diversificat extrem de mult, prin utilizarea materialelor semiconductoare și a celor supraconductoare [46], crescând în același timp și sensibilitatea acestora. Dar multă vreme, a fost folosit ca receptor în măsurătorile fotometrice doar ochiul uman și, de aceea, unitățile de măsură ale mărimilor energetice caracteristice radiațiilor luminoase au fost definite în funcție de caracteristicile (de receptor) ale ochiului uman. Una dintre aceste caracteristici este sensibilitatea spectrală a ochiului. Ea variază cu lungimea de undă a radiației luminoase, fiind maximă la radiația cu  $\lambda_0 = 5550 \text{ \AA}$ , pentru vederea de zi și la radiația cu  $\lambda'_0 = 5000 \text{ \AA}$ , pentru vederea pe timp de noapte. În figura 7.2.7. este reprezentată grafic dependența de lungimea de undă a sensibilității spectrale  $K_\lambda$ , definită prin raportul

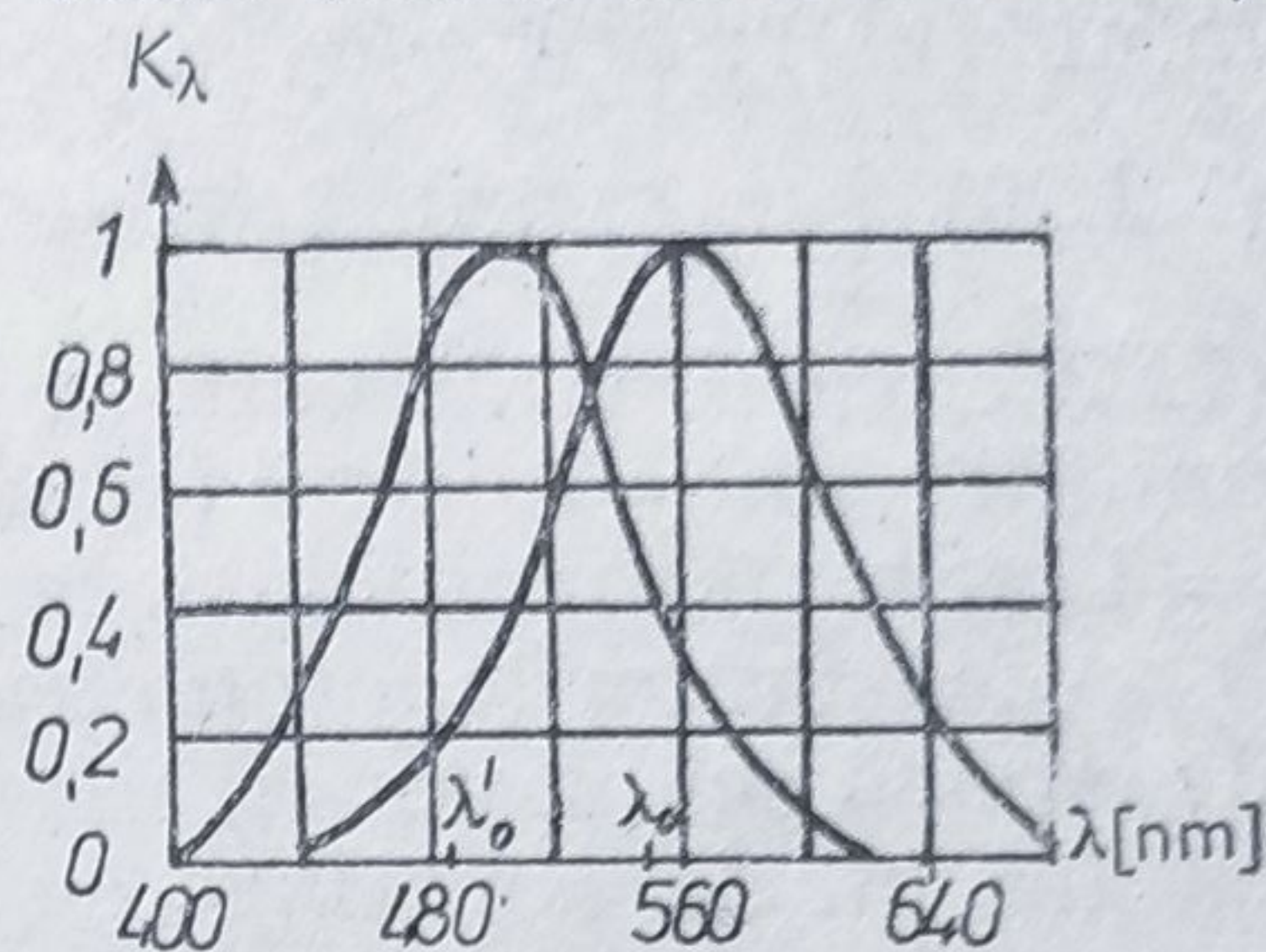


Fig. 7.2.7

$$K_\lambda = \frac{\Phi_{\lambda_0}}{\Phi_\lambda}. \quad (7.2.38)$$

Aici  $\Phi_\lambda$  reprezintă fluxul luminos spectral corespunzător radiației cu lungimea de undă  $\lambda$ , care produce o senzație vizuală de aceeași intensitate ca și fluxul luminos  $\Phi_{\lambda_0}$ . Se știe că în fotometria optică mărimile fotometrice care descriu tăria senzației vizuale se raportează la radiația cu  $\lambda_0 = 5550 \text{ \AA}$ , alegându-se ca mărime fundamentală intensitatea luminoasă  $I$ , exprimată în candelă (cd). Pentru o sursă punctiformă, fluxul fiind exprimat prin relația

$$\Phi = I\Omega \quad (7.2.39)$$

va avea ca unitate de măsură lumenul ( $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sterad}$ ). Experimental, s-a demonstrat că unui flux energetic  $\Phi_e$  de 1 watt corespunzător radiației cu  $\lambda = \lambda_0$  îi corespunde fluxul luminos  $\Phi$  de 680 lm. De aceea, fluxul luminos  $\Phi$  poate fi exprimat funcție de fluxul energetic spectral  $\Phi_{e\lambda}$  prin intermediul relației

$$\Phi = 680 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_\lambda \Phi_{e\lambda} d\lambda \quad (7.2.40)$$

$\lambda_1$  și  $\lambda_2$  fiind lungimile de undă care delimitează domeniul vizibil.



În mod analog se vor putea defini și alte mărimi fotometrice care să permită descrierea (din punct de vedere al senzației vizuale) surselor de lumină extinse și a suprafețelor iluminate. Astfel, se definește *luminanța*  $L$  (sau strălucirea  $B$ ) printr-o relație similară relației (7.2.18) (se exprimă în nit (nt)); *exitanța*  $M$  (sau radianța  $R$ ) printr-o relație similară relației (7.2.20) (se exprimă în lambert;  $1 \text{ La} = \frac{1}{\pi} \text{ nt}$ ) și *iluminarea*  $E$  (vezi (7.2.21) care se măsoară în luși (lx). De remarcat legătura dintre aceste unități:  $1 \text{ nt} = 1 \text{ cd/m}^2$  (se mai folosește stilbul  $1 \text{ sb} = 1 \text{ cd/cm}^2$ );  $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$  (se mai folosește photul:  $1 \text{ ph} = 1 \text{ lm/cm}^2$ ).

Măsurătorile fotometrice subiective (în care se utilizează ca receptor de lumină ochiul uman) se bazează pe două proprietăți ale ochiului: capacitatea lui de a distinge cu mare exactitate gradul de iluminare al unei suprafețe și existența unui prag de strălucire, comun tuturor ochilor (nor-

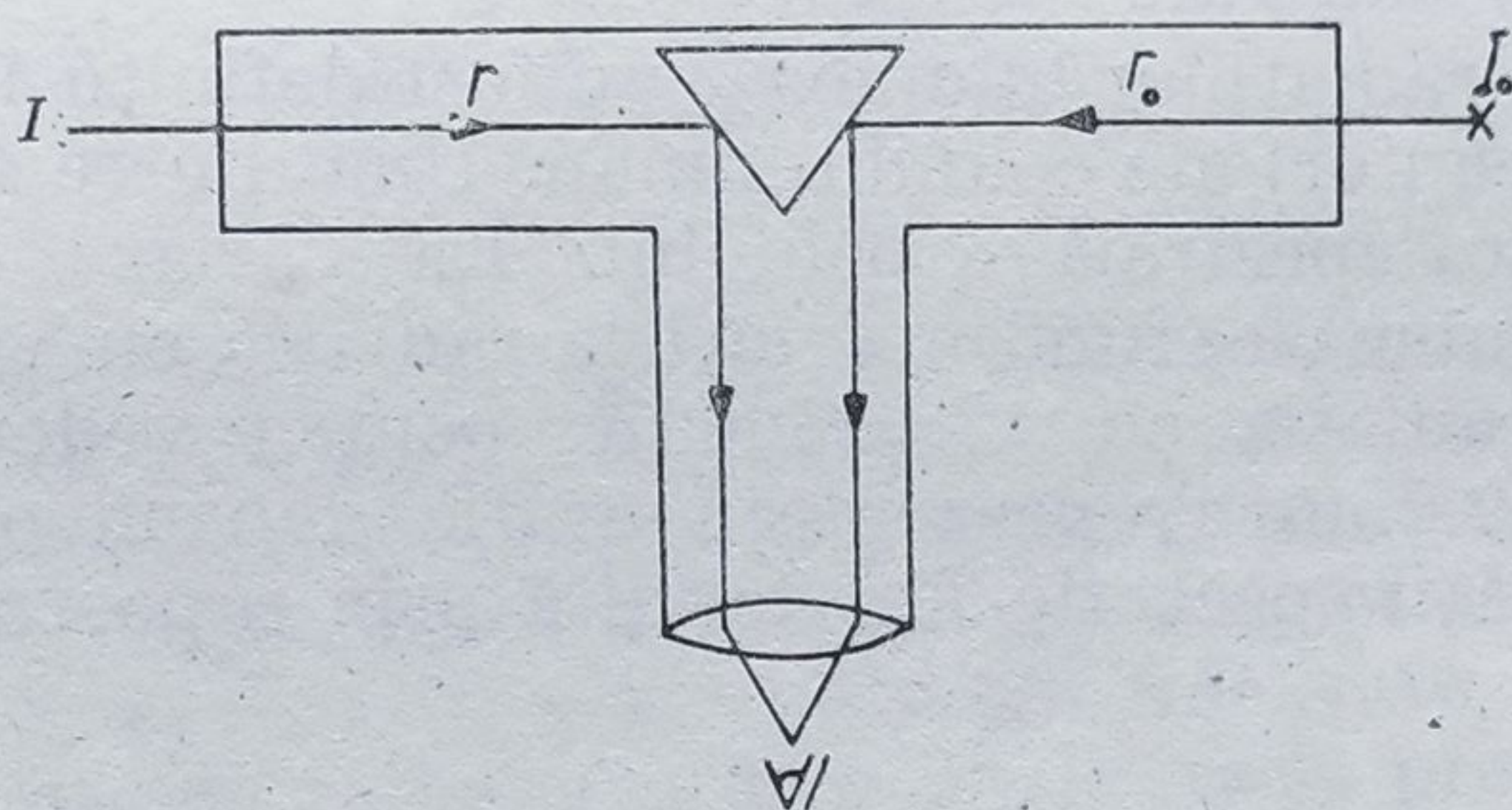


Fig. 7.2.8

mali fiziologic). Pe baza primei proprietăți s-au realizat fotometrele — aparate cu ajutorul cărora se măsoară, prin comparare, intensitatea luminoasă a surselor punctiforme sau evasipunctiforme. În figura 7.2.8. este schițat un astfel de fotometru în care egalizarea iluminării celor două porțiuni din câmpul ocular este stabilit vizual și în acest caz

$$\frac{I}{r^2} = \frac{I_0}{r_0^2}. \quad (7.2.41)$$

Cunoscînd pe  $I_0$  și măsurînd distanțele  $r$  și  $r_0$ , se poate determina  $I$ , respectiv variația  $I = I(\theta)$ , care reprezintă *curba fotometrică* a sursei. Pe baza celei de a doua proprietăți a ochiului s-au realizat măsurătorile de strălucire [41].

### § 7.3. INTERFERENȚA LUMINII

Interferența este un fenomen specific ondulatoriu, în sensul că prezența lui constituie o dovadă certă privind comportarea ondulatorie a respectivului fenomen. Interferența intervine la suprapunerea undelor



coerente, defazate între ele și se relevă prin franje de interferență — respectiv prin variații ale iluminării diverselor puncte ale suprafețelor introduse în spațiul de interferență a undelor.

În cazul luminii, teoria interferenței se bazează pe principiul de superpoziție a câmpurilor electromagnetice ale undelor care interferează. Acest principiu atestă valabilitatea regulii de compunere vectorială a două sau mai multor câmpuri electromagnetice care se suprapun

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i; \quad \mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i. \quad (7.3.1)$$

Principiul de superpoziție a stat de altfel la baza obținerii ecuațiilor lui Maxwell (vezi § 6.2.) și, datorită valabilității acestuia, ecuațiile lui Maxwell au o formă liniară. De notat, însă, că principiul de superpoziție nu este valabil în toate cazurile. Un exemplu de nevalabilitate al principiului de superpoziție îl constituie cazul propagării undelor electromagnetice de intensități ridicate (radiații laser) prin substanță. Fenomenele optice produse de astfel de unde fac obiectul de studiu al opticii neliniare și ele nu vor fi prezentate aici. Se va admite deci, că principiul de superpoziție este valabil în toate fenomenele de interferență ale luminii care vor fi prezentate în cadrul acestui paragraf.

Un experiment simplu de interferență se obține la suprapunerea a două unde plane de aceeași lungime de undă  $\lambda$  și frecvență  $\nu$ , polarizate în același plan de polarizație, care străbat într-un mediu optic cu indice de refracție  $n$ , drumuri geometrice ( $s_i$ ) diferite. În acest caz, undele pot fi descrise prin vectorii lor optici  $\mathbf{E}_i$  (vectorii electrici ai undei), care, potrivit relației (6.10.47), sînt dați de expresii de forma

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{-i[\omega t - n\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{s}_i - \varphi_{0i}(t)]} \quad (7.3.2)$$

în care s-a notat  $|\mathbf{k}_0| = 2\pi/cT = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Întrucît iluminarea rezultantă produsă de cele două unde plane pe un ecran  $P$ , plasat în zona lor de suprapunere (fig. 7.3.1), este determinată de intensitatea rezultantă (vezi echivalența relațiilor (7.2.11) și (7.2.21) pentru undele plane) este necesar să se evalueze mărimea

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \rangle \quad (7.3.3)$$

unde

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (7.3.4)$$

Prin calcule simple, folosind pentru  $\mathbf{E}_1$  și  $\mathbf{E}_2$  expresii de forma (7.3.2), iar pentru  $\mathbf{E}_1^*$  și  $\mathbf{E}_2^*$  complexe lor conjugate, rezultă

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi \rangle. \quad (7.3.5)$$

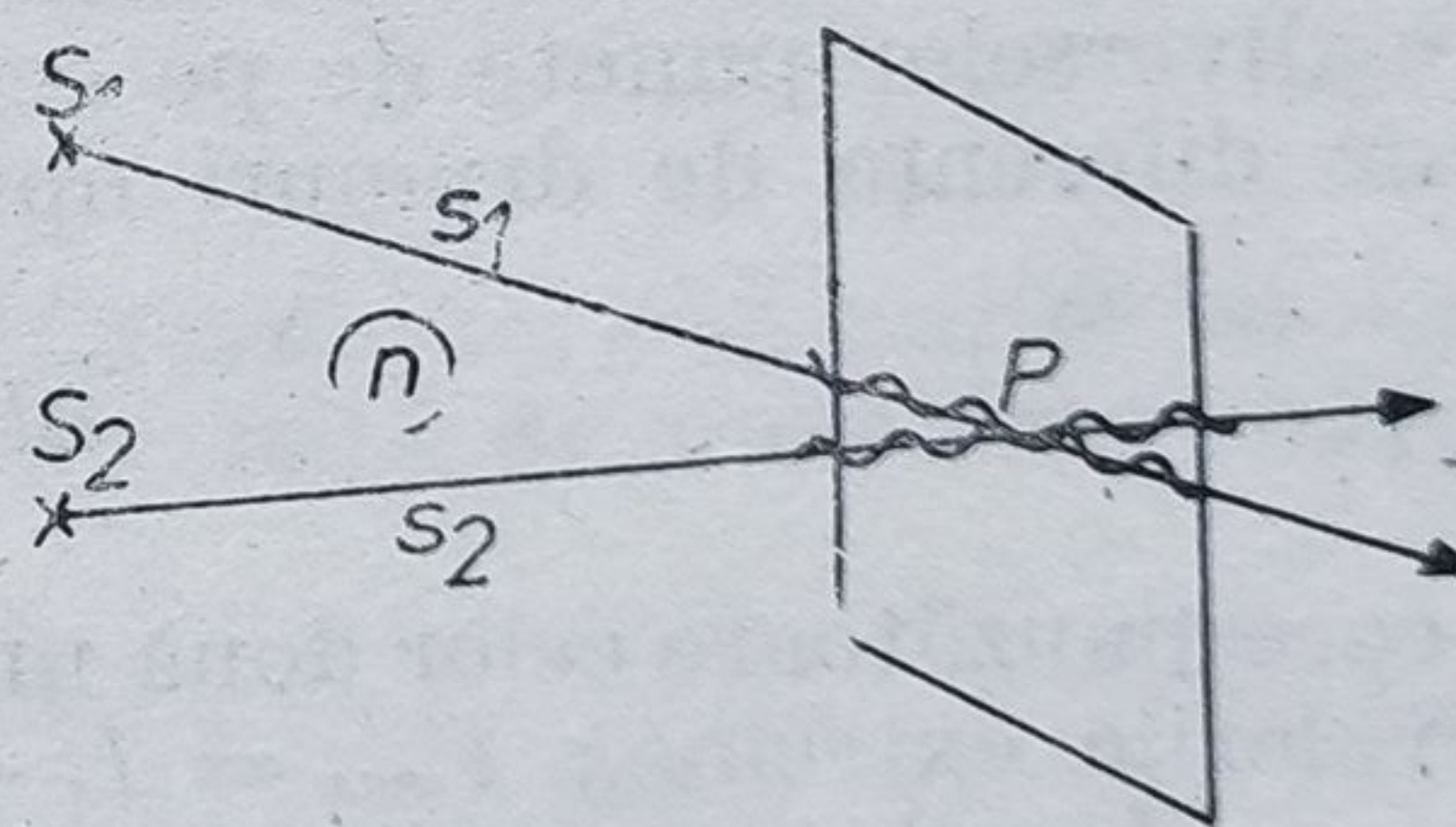


Fig. 7.3.1



Aici s-au folosit notațiile

$$I_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \rangle; \quad I_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \quad (7.3.6)$$

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi \rangle = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{Re}\{\langle \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \rangle\}. \quad (7.3.7)$$

În expresiile (7.3.5) și (7.3.7) unghiul  $\varphi$  reprezintă diferența dintre fazele celor doi vectori  $\mathbf{E}_1$  și  $\mathbf{E}_2$ . Valoarea lui rămâne constantă pentru undele coerente, dacă se admite că diferența fazelor inițiale  $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$  nu depinde de timp (pentru simplitate se va lua  $\Delta\varphi_0 = 0$ ). Într-adevăr, din (7.3.2) rezultă

$$\varphi = (\omega t - n\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{s}_1 - \varphi_{01}) - (\omega t - n\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{s}_2 - \varphi_{02}) = \frac{2\pi}{\lambda} n(s_2 - s_1). \quad (7.3.8)$$

În acest caz, media în timp a funcției  $\cos \varphi$ , definită în sensul expresiei (6.8.4), se reduce la forma

$$\langle \cos \varphi \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \varphi(t) dt = \cos \varphi \quad (7.3.9)$$

astfel încît cu (7.3.8), expresia (7.3.5) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} n(s_2 - s_1) \right]. \quad (7.3.10)$$

Se vede că intensitatea rezultantă  $I$  (respectiv iluminarea rezultantă a diverselor puncte de pe ecranul de observație  $P$ ) va fi diferită, funcție de diferența de drumuri optice

$$\Delta l = n(s_2 - s_1) \quad (7.3.11)$$

corespunzătoare celor două unde care interferează (fig. 7.3.1), variind între valorile extreme:  $I_{\max} = I_1 + I_2$  și  $I_{\min} = |I_1 - I_2|$ .

Locul geometric al punctelor, cărora le corespunde o intensitate rezultantă maximă poartă numele de *franșă luminoasă*. Poziția acestor franșe pe ecranul  $P$  va fi determinată de condiția

$$\frac{2\pi}{\lambda} n(s_2 - s_1) = 2m\pi$$



respectiv

$$n(s_2 - s_1) = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.12)$$

De asemenea, locul geometric al punctelor cărora le corespunde o intensitate rezultantă minimă se numește *franjă întunecată*, iar poziția acestora este determinată de condiția

$$n(s_2 - s_1) = \frac{2m + 1}{2}\lambda; \quad m = 0, 2, 2, \dots \quad (7.3.13)$$

Înseamnă că între două franje luminoase se intercalează o franjă întunecată.

De reținut că imaginea de interferență obținută este determinată de termenul

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n \Delta s\right) \quad (7.3.14)$$

numit uneori și „termen de interferență”. Dacă unghiul  $\varphi(t)$  variază haotic în timp, caz ce intervine când undele care se suprapun nu sînt coerente, atunci variațiile în timp ale intensității rezultante  $I$  vor fi atît de rapide (la lumină  $\nu = c/\lambda \sim 3 \cdot 10^8 / 5 \cdot 10^{-7} \sim 6 \cdot 10^{14}$  Hz) încît nici un receptor de lumină nu le va mai putea înregistra și ca atare, nu se va mai distinge nici o figură de interferență clară. Întrucît defazajul  $\varphi(t)$  poate să ia în acest caz orice valoare cuprinsă între 0 și  $2\pi$ , înseamnă că valoarea medie

$$\langle \cos \varphi \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \varphi(t) dt = 0 \quad (7.3.15)$$

și odată cu el  $I_{12} = 0$ , astfel încît

$$I = I_1 + I_2. \quad (7.3.16)$$

Această expresie ne arată că intensitatea luminoasă a mai multor fascicule de lumină necoerentă care se suprapun este dată de suma intensităților fiecărui fascicul în parte

$$I = \sum_i I_i \quad (7.3.17)$$

rezultat cunoscut și sub denumirea de „legea acțiunii independente a fasciculelor de lumină”, lege folosită în optica geometrică. Din expresia (7.3.7) rezultă că imaginea de interferență dispăre chiar și în cazul undelor coerente, dacă acestea sînt polarizate în plane reciproce perpendiculare ( $\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ ).



Trebuie remarcat că noțiunea de coerență sau de necoerență reprezintă cazuri extreme pentru fascicule de lumină obținute de la sursele reale. Surse cu coerență foarte ridicată sînt doar sursele de radiație laser, cele obișnuite fiind în general surse necoerente. Aceasta se datorește faptului că fiecare atom dintr-o sursă de lumină obișnuită emite radiații în mod spontan, deci emite radiații cu frecvențe și faze inițiale variabile haotic în timp. Dealtfel, din această cauză fenomenele de interferență ale fasciculelor de lumină au rămas multă vreme neobservate. Fresnel a fost printre primii care a arătat că se obțin fascicule de lumină coerente prin divizarea în două părți a unui fascicul de lumină ce provine de la o singură sursă. Se poate realiza atît divizarea frontului unei unde ce provine de la o sursă punctiformă, cît și amplitudinea unui fascicul de lumină paralelă. În primul caz, se realizează așa numita interferență în lumină divergentă, iar în al doilea caz, interferență în lumină paralelă.

Experiența arată, însă, că și în cazul cînd cele două fascicule de lumină care interferează provin de la aceeași sursă, prin „dedublarea” acesteia în două surse imagini, apar diferențe în ceea ce privește variațiile în timp ale vectorilor optici  $\mathbf{E}_1$  și  $\mathbf{E}_2$ . Aceste diferențe sînt determinate de faptul că cele două unde străbat drumuri optice diferite pînă la suprapunere. Astfel, dacă prima undă străbate distanța  $s_1(t)$ , în intervalul de timp  $t$ , iar cea de a doua undă, distanța  $s_2(t + \tau)$ , în intervalul de timp  $t + \tau$ , atunci media în timp a produsului  $\mathbf{E}_1(t) \cdot \mathbf{E}_2^*(t + \tau)$  va fi o funcție de diferența acestor intervale, adică de  $\tau$  și va putea lua valori cuprinse între zero și  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} I_1 I_2$ . Din acest motiv, funcția \*

$$G_{12}(\tau) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\langle (\mathbf{E}_1(t) \cdot \mathbf{E}_2^*(t + \tau)) \rangle| \quad (7.3.18)$$

este folosită ca măsură a gradului de coerență mutuală a celor două unde (respectiv surse). Se vede că

$$G_{11}(0) = I_1; \quad G_{22}(0) = I_2 \quad (7.3.19)$$

Introducînd, în locul funcției  $G_{12}(\tau)$ , funcția normată

$$g_{12}(\tau) = \frac{G_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (7.3.20)$$

se observă că această nouă funcție satisface condiția

$$0 \leq |g_{12}(\tau)| \leq 1. \quad (7.3.21)$$

\* Media în timp  $\langle \mathbf{E}_1(t) \cdot \mathbf{E}_2^*(t + \tau) \rangle$ , fiind definită în sensul relației (6.8.4) adică  $\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right)$ ,



putându-se distinge următoarele trei cazuri :

$$|g_{12}(\tau)| = 1 \text{ coerență totală}$$

$$0 < |g_{12}(\tau)| < 1 \text{ coerență parțială} \quad (7.3.22)$$

$$|g_{12}(\tau)| = 0 \text{ necoerență totală.}$$

Valorile funcției  $g_{12}(\tau)$  pot fi estimate atât pe cale experimentală, cât și pe cale teoretică. În tratarea teoretică se pleacă de la faptul că atomii sursei de lumină emit în mod spontan radiații sub formă de grupuri de undă. Amplitudinea și faza acestor grupuri de undă rămân practic constante într-un anumit interval de timp  $T_c$ , numit *timp de coerență*. Distanța  $L_c$ , străbătută de undă în acest interval de timp se numește *lungime de coerență*

$$L_c = cT_c. \quad (7.3.23)$$

Pentru sursele macroscopice se realizează desigur o distribuție statistică (pe atomii sursei) a intervalelor de timp  $T_c$ , astfel încât funcția de coerență poate fi exprimată prin

$$g(\tau) = e^{-\tau/\langle T_c \rangle} \quad (7.3.24)$$

unde  $\langle T_c \rangle$  reprezintă valoarea medie a timpului de coerență. Această expresie se reduce, într-o primă aproximație la forma

$$g'(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau/\langle T_c \rangle & \text{pentru } |\tau| \leq \langle T_c \rangle \\ 0 & \text{,, } |\tau| > \langle T_c \rangle. \end{cases} \quad (7.3.25)$$

În figura 7.3.2. sînt reprezentate grafic funcțiile  $g(\tau)$  și  $g'(\tau)$ , evidențiindu-se astfel mai exact semnificația noțiunii de timp de coerență. El reprezintă intervalul de timp după care funcția  $g(\tau)$  scade de  $e$  ori.

**a) Interferența în lumină divergentă.** Se obține folosind dispozitive de interferență, care divizează frontul unei incidente în două părți egale ( $I_1 = I_2$ ). Primul dispozitiv de acest gen a fost realizat de către Thomas Young în anul 1802 și este schițat în figura 7.3.3, alături de alte câteva astfel de dispozitive de interferență. Se observă că în toate cazurile sursa punctiformă  $S$  este dedublată în două surse  $S_1$  și  $S_2$ , imagini ale sursei  $S$ ,

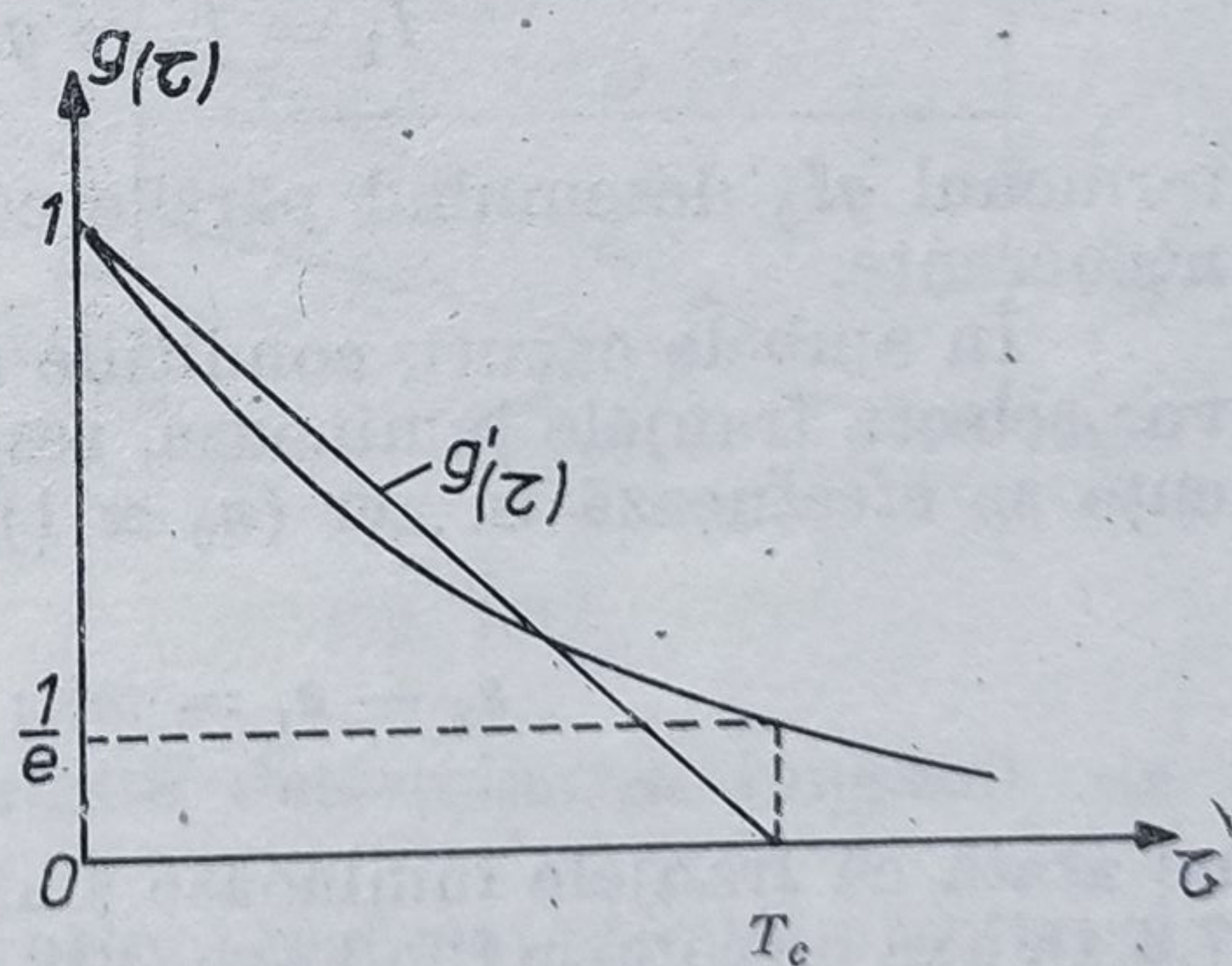


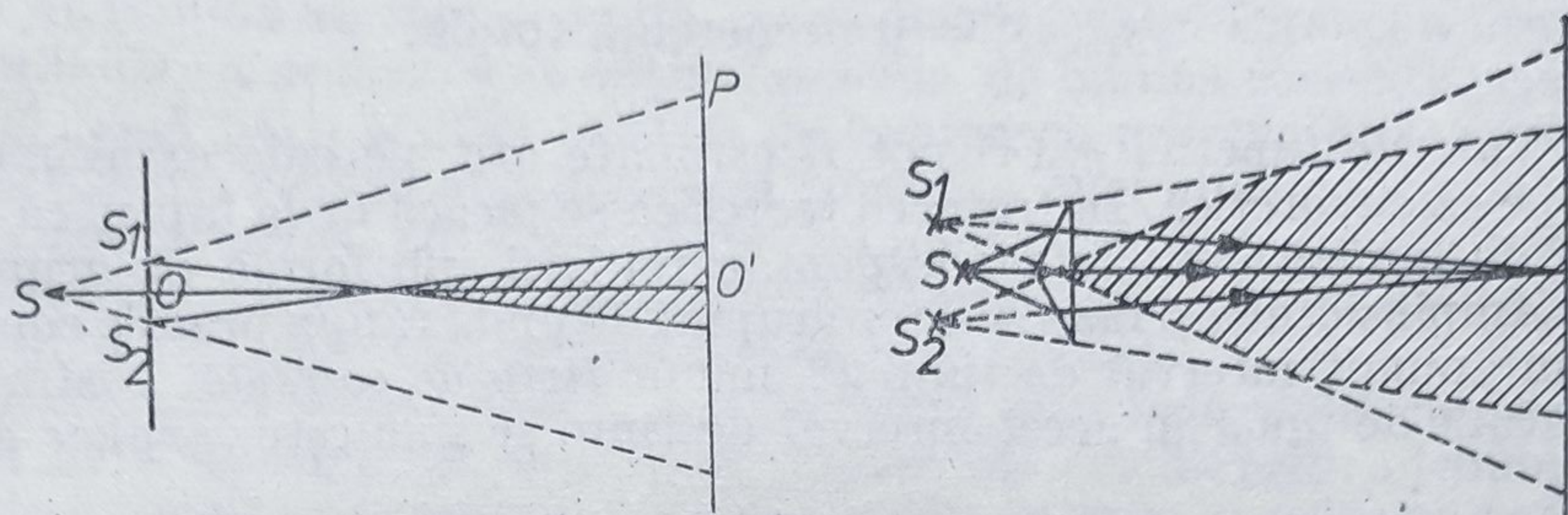
Fig. 7.3.2



care vor fi reciproc parțial coerente. Pe ecranul  $P$  se vor obține franjele de interferență.

De notat că în aceste cazuri relația (7.3.8) se reduce la forma ( $I_1 = I_2 = I_0$ )

$$I = 2I_0(1 + \cos \varphi) = 4I_0 \cos^2(\varphi/2) \quad (7.3.26)$$



a) Dispozitivul Young

b) Biprisma Fresnel

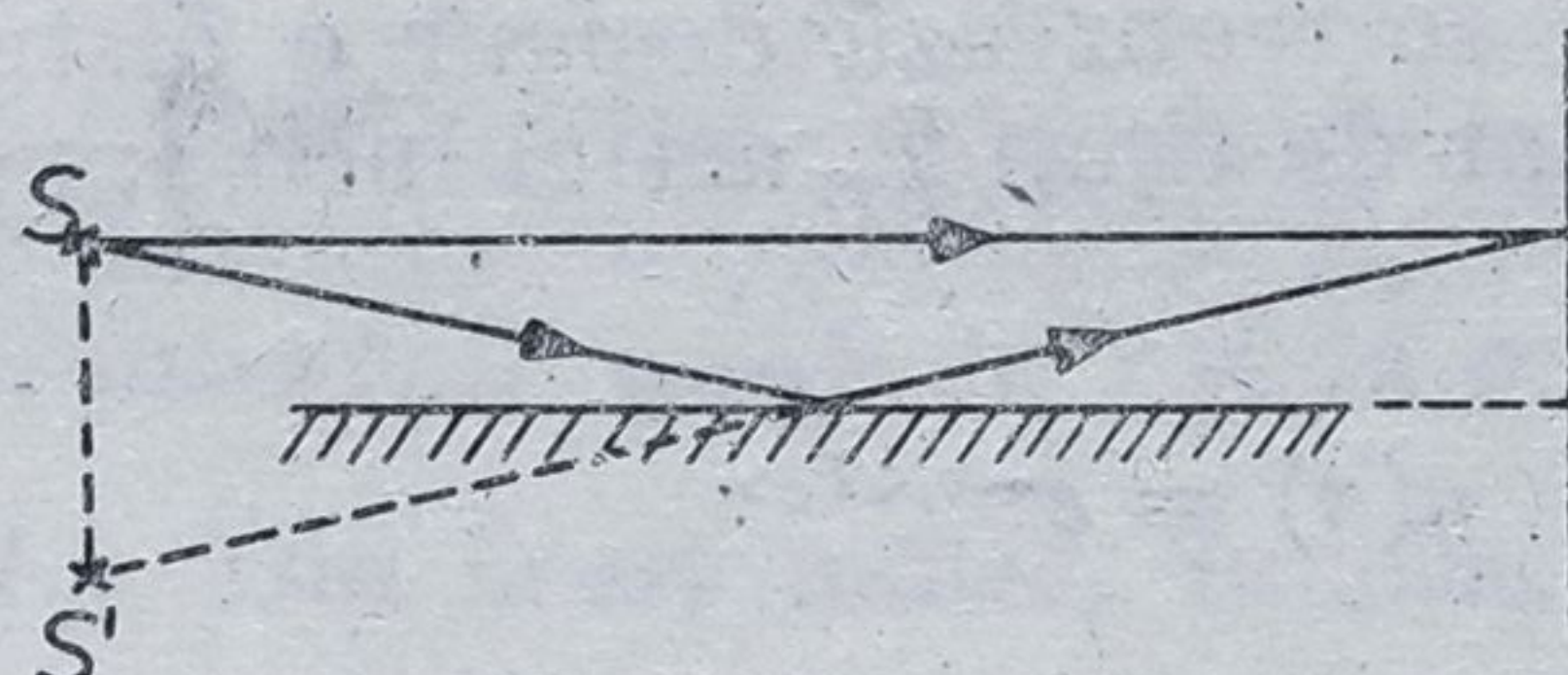


Fig. 7.3.3

c) Oglinda Lloyd

dacă fasciculele sînt total coerente și la forma

$$I = 2I_0(1 - g + 2g \cos \varphi) \quad (7.3.27)$$

dacă fasciculele sînt parțial coerente și deci

$$I_1 = I_2 = gI_0 + (1 - g)I_0 \quad (7.3.28)$$

termenul  $gI_0$  desemnînd părțile coerente din fascicule, iar  $(1 - g)I_0$  cele necoerente.

În ambele cazuri, condițiile de maxim (7.3.12) și de minim (7.3.13) vor selecta franjele luminoase, respectiv întunecate. Admițînd că experiența se efectuează în aer ( $n_0 \simeq 1$ ), prima condiție

$$s_2 - s_1 = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.29)$$

ne arată că franjele luminoase sînt suprafețe hiperbolice de rotație (fig. 7.3.4), axa de rotație fiind axa  $OO'$ , iar focarele  $S_1$  și  $S_2$ . Înseamnă că intersecția ecranului  $P$  cu aceste suprafețe va determina curbe de diverse forme,



funcție de orientarea acestuia în raport cu axa  $SS_2$  (fig. 7.3.4, b). Pentru cazul cînd ecranul este așezat paralel cu axa  $OO'$ , la o distanță  $D$  mult mai mare decît distanța  $l$  dintre sursele  $S_1$  și  $S_2$ , franjele vor fi în prima aproximație liniare și echidistante între ele. Distanța dintre două franje vecine

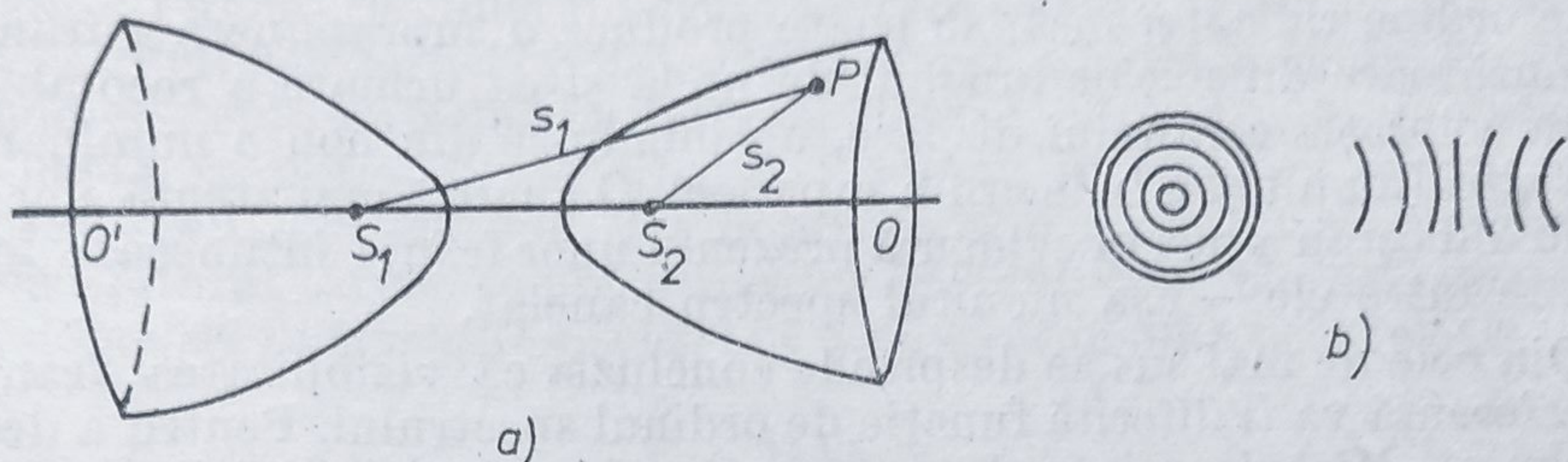


Fig. 7.3.4

(interfranja) poate fi calculată funcție de lungimea de undă  $\lambda$  și de elementele geometrice ale dispozitivului. Astfel, în cazul dispozitivului Young (fig. 7.3.5.), în care sursa  $S$  emite lumina monocromatică de lungime de undă  $\lambda$ , pentru franja luminoasă de ordinul  $m$ , aflată pe ecran la distanța  $y_m$  față de franja centrală ( $m = 0$ ) avem

$$s_1^2 = D^2 + \left(y_m + \frac{l}{2}\right)^2; \quad s_2^2 = D^2 + \left(y_m - \frac{l}{2}\right)^2$$

Deci

$$s_1 - s_2 = \frac{y_m l}{D} \quad (7.3.30)$$

Dar, potrivit condiției de maxim (7.3.12)

$$s_1 - s_2 = m\lambda \Rightarrow y_m = \frac{m\lambda D}{l} \quad (7.3.31)$$

și respectiv interfranja

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{l}. \quad (7.3.32)$$

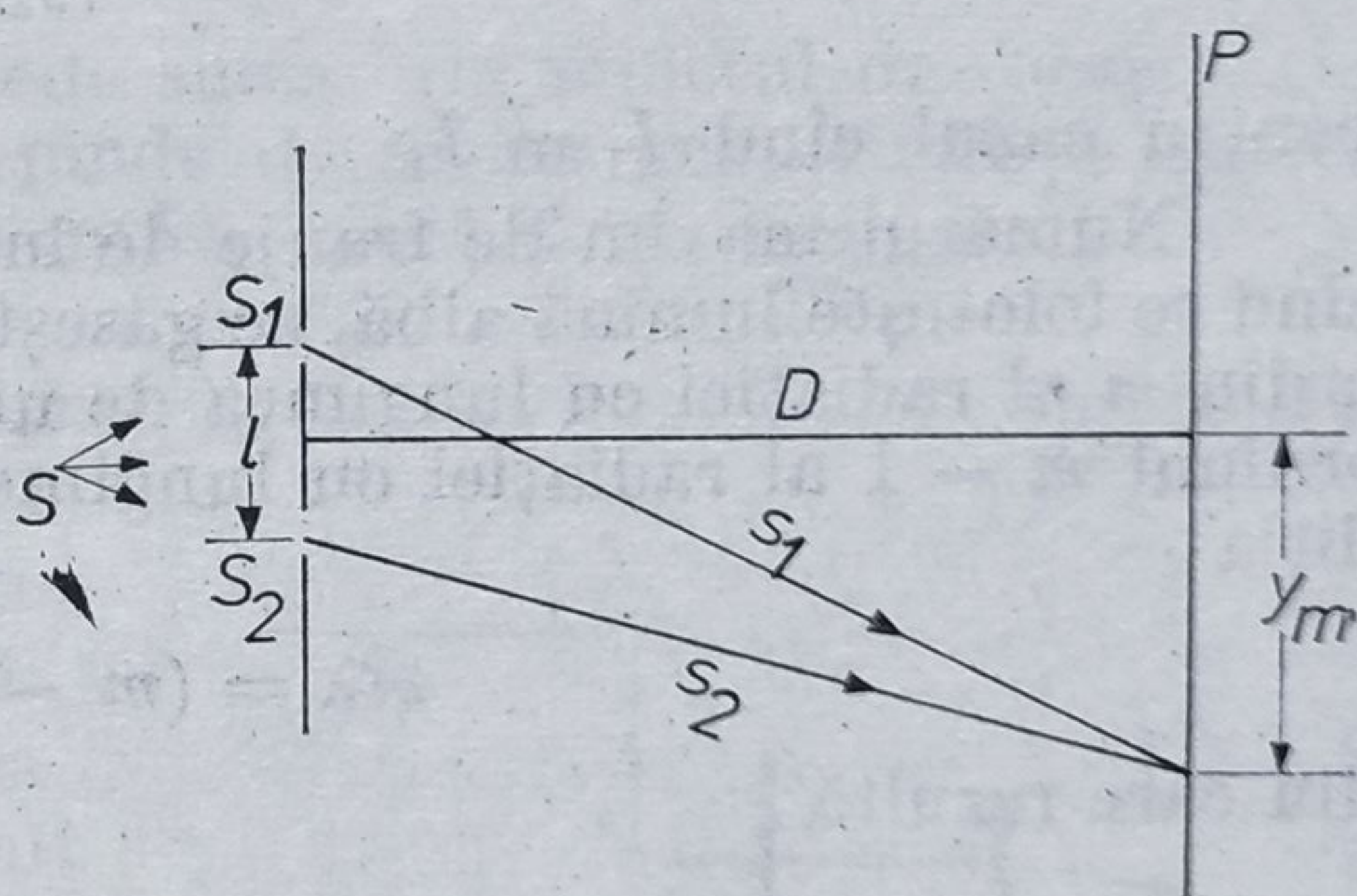


Fig. 7.3.5

Evident, măsurarea interfranjei  $\Delta y$  permite determinarea lungimii de undă  $\lambda$ .

Experiențe de interferență de tipul celei prezentate se pot efectua și cu surse care emit radiații nemonocromatice. În cazul surselor de lumină



albă (care emit spectrul vizibil integral, de la roșu la indigo — spectrul *roșu alb*), imaginea de interferență va fi formată dintr-un anumit număr de franje, diferite colorate care se grupează în spectre de diverse ordine (ordinul zero pentru  $m = 0$ ; ordinul unu pentru  $m = 1$  ș.a.m.d.), spectrul de ordin zero fiind format dintr-o singură franjă luminoasă albă. Pentru spectrele de ordine ridicate, însă, se poate produce o suprapunere a franjelor corespunzătoare diverselor lungimi de undă și ca urmare a recombinației acestora colorația ecranului dispare, obținându-se din nou o iluminare cu lumină albă (numit și alb de ordin superior). O analiză mai atentă a acestei porțiuni din ecran a pus în evidență prezența unor franje întunecate foarte apropiate între ele — așa numitul spectru canelat.

Din cele de mai sus se desprinde concluzia că vizibilitatea franjelor de interferență va fi diferită funcție de ordinul spectrului. Pentru a descrie acest aspect, Michelson introduce un parametru al vizibilității  $V$ , definit prin expresia

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (7.3.33)$$

care pentru ochiul uman descrie suficient de bine contrastul imaginii de interferență. S-a constatat că ochiul distinge o imagine formată din franje de interferență numai pentru  $V \geq 0,1$ , ceea ce înseamnă că  $I_{\max} \geq 1,22 I_{\min}$ . Parametrul  $V$  se poate exprima și prin intermediul parametrului de coerență  $g(\tau)$ . Din relațiile (7.3.5), (7.3.7), (7.3.18) și (7.3.20) rezultă

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |g_{12}(\tau)| \quad (7.3.34)$$

respectiv

$$V = |g_{12}(\tau)| \quad (7.3.35)$$

pentru cazul când  $I_1 = I_2$

Numărul maxim de franje de interferență ce se pot distinge atunci când se folosește lumină albă, se găsește din condiția ca peste maximumul de ordin  $m$  al radiației cu lungimea de undă  $\lambda$  să se suprapună maximumul de ordinul  $m - 1$  al radiației cu lungimea de undă  $\lambda + \Delta\lambda$ , adică din condiția

$$m\lambda = (m - 1)(\lambda + \Delta\lambda)$$

din care rezultă

$$m = \lambda / \Delta\lambda. \quad (7.3.36)$$

De exemplu, dacă  $\Delta\lambda = 1000 \text{ Å}$ , atunci pentru  $\lambda = 5000 \text{ Å}$  se vor obține maximum cinci spectre de interferență ( $m = 5$ ).

Introducând rezultatul (7.3.36) în expresia (7.3.29) se obține pentru diferența maximă de drum geometric între cele două raze pentru care se



mai obțin franje, în cazul utilizării radiației albe, relația

$$L_c = (s_2 - s_1)_{\max} = \lambda^2 / \Delta\lambda. \quad (7.3.37)$$

Această diferență maximă de drum nu este altceva decât lungimea de coerență  $L_c$ , definită prin (7.3.23). De valoarea acestei lungimi de coerență depinde coerența surselor de lumină. Pentru  $\Delta\lambda = 1\text{\AA}$ , la o radiație cu  $\lambda = 5000\text{\AA}$  se obține  $(s_2 - s_1)_{\max} = 2,5\text{ mm}$ , în timp ce pentru radiația laser  $(s_2 - s_1)_{\max} \simeq 500\text{ km}$ . De notat că în caracterizarea aparatelor optice cu ajutorul cărora se obțin spectre de lumină se folosește adesea noțiunea de *putere de rezoluție*  $r$  (vezi și § 7.4), exprimabilă prin relația

$$r = \lambda / \Delta\lambda. \quad (7.3.38)$$

Se vede că putem scrie

$$r = \frac{L_c}{\lambda}; \quad L_c = r\lambda \quad (7.3.39)$$

din care rezultă că puteri mari de rezoluție se obțin în cazul radiațiilor laser.

În considerațiile făcute mai sus s-a admis că sursa  $S$ , respectiv sursele imagine  $S_1$  și  $S_2$  sînt punctiforme. Desigur că extinderea sursei pe un anumit domeniu spațial va avea ca efect o slăbire a contrastului imaginii de interferență. De aceea, pentru fasciculele de lumină largi, ce interferează, se definește o lărgime de coerență laterală, peste care imaginea de interferență nu mai este decelabilă. Această lărgime este exprimabilă prin relația

$$l_c = a(\lambda / \theta_s) \quad (7.3.40)$$

unde  $\theta_s$  este unghiul sub care se vede sursa din punctul de observație, iar  $a$ , constantă a cărei valoare depinde de forma geometrică a sursei. Pentru surse circulare plane, de exemplu,  $a = 1,22$  și deci

$$l_c = 1,22\lambda / \theta_s. \quad (7.3.41)$$

Pe baza unei astfel de relații se poate determina diametrul sursei de lumină, lucru foarte important cînd este vorba de surse extraterestre (cazul astrilor). Astfel, Michelson a realizat așa numitul *interferometru stelar* (fig. 7.3.6), cu ajutorul căruia a stabilit că diametrul steii Betelgeuse este de aproximativ 280 ori mai mare decât a Soarelui. Metoda interferometrului

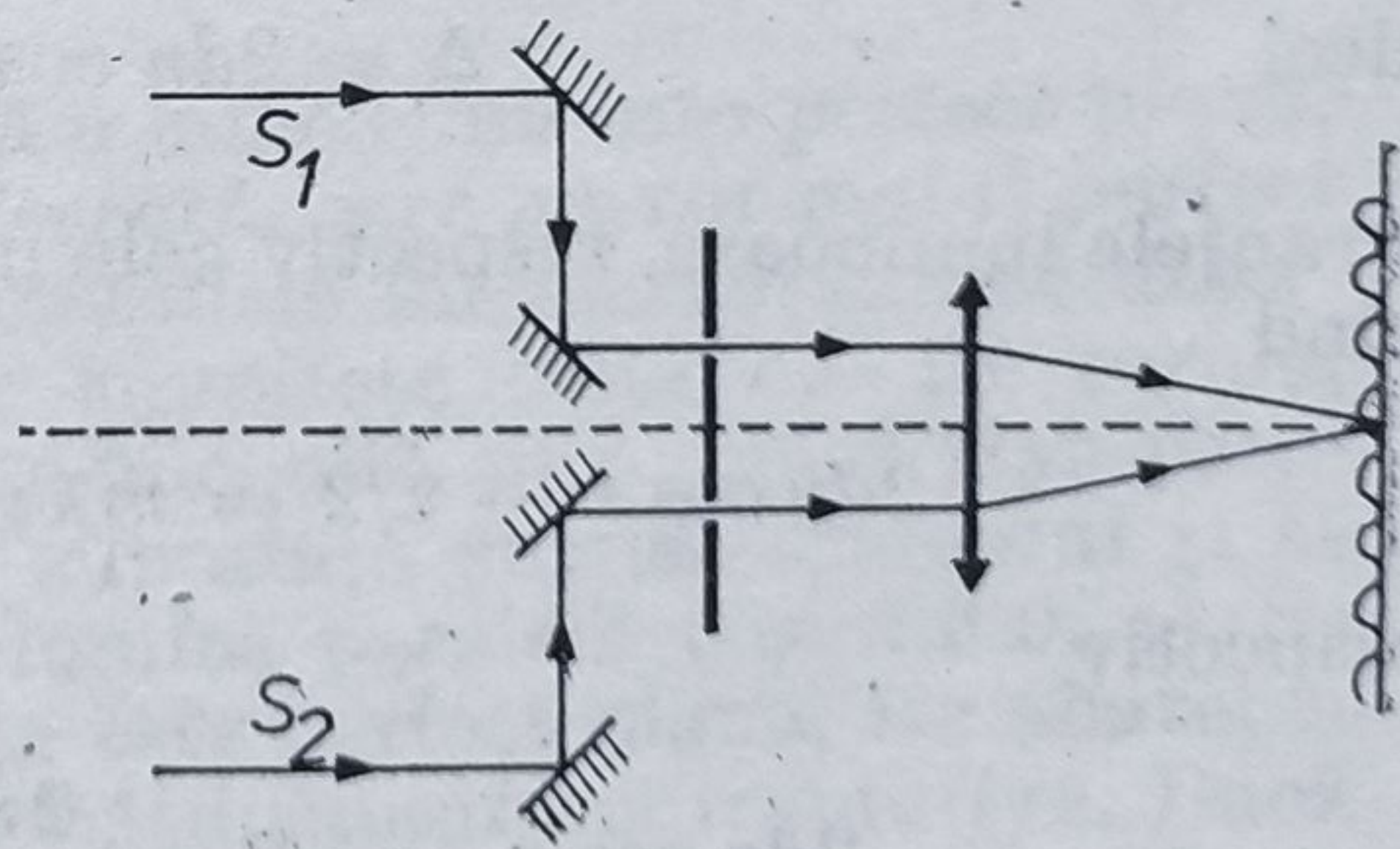


Fig. 7.3.6



stelar se bazează pe faptul că dacă distanța dintre cele două fante  $S_1$  și  $S_2$  devine egală sau mai mare decât lărgimea de coerență  $l_c$ , atunci imaginea franjelor de interferență dispăre, condiție ce poate fi stabilită cu multă exactitate. Aceeași condiție limitează de altfel și posibilitățile de obținere a imaginilor de interferență cu dispozitive clasice de interferență. De exemplu, în cazul dispozitivului Young, pentru  $D = 1$  m,  $\lambda = 5000$  Å și sursă circulară de rază  $r = 1$  mm, se vor obține franje de interferență numai dacă distanța între cele două fante  $S_1$  și  $S_2$  satisface condiția:  $l < l_c = 0,6$  mm.

b) **Interferența în lumină paralelă.** În acest gen de interferență se impun cerințe mai puțin pretențioase, în privința lărgimii surselor, din care cauză majoritatea aparatelor interferențiale (interferometrele) folosesc acest tip de interferență.

O experiență simplă de interferență în lumină paralelă se obține la trecerea razelor de lumină prin straturi optice subțiri. În cazul luminii albe, interferența se va pune în evidență sub forma unor colorații ale stratului (colorația baloanelor de săpun, a peliculelor de ulei pe suprafața apei, a sticlelor vechi etc.), care sînt franje de interferență ce rezultă în urma suprapunerii razelor reflectate pe fețele anterioară și posterioară ale stratului. Poziția acestor franje va fi determinată de diferența de drum optic între cele două raze și de lungimea lor de undă. Pentru o lamelă cu fețe plane, de indice de refracție  $n$  și grosime  $d$ , așezată într-un mediu optic de indice de refracție  $n_0$ , ( $n_0 < n$ ) (fig. 7.3.7) se vede că avem

$$\Delta = 2n \cdot AB - n_0 \cdot DC - \lambda/2 \quad (7.3.42)$$

termenul  $\lambda/2$  intervenind datorită faptului că raza  $I_2$  se reflectă în  $B$  cu pierderea unei jumătăți de lungime de undă (reflexie pe un mediu mai puțin dens optic,  $n_0 < n$ ). Dar

$$AB = \frac{d}{\cos r}; \quad DC = AC \sin i = 2AE \sin i$$

și

$$AE = d \operatorname{tg} r; \quad n_0 \sin i = n \sin r$$

deci

$$\Delta = 2dn \cos r - \lambda/2. \quad (7.3.43)$$

Franjele luminoase, respectiv cele întunecate se vor obține pentru cazurile cînd

$$2dn \cos r - \lambda/2 = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.44)$$

respectiv

$$2dn \cos r - \lambda/2 = \frac{2m+1}{2}\lambda; \quad m = 0, 1, \dots \quad (7.3.45)$$



Se observă că aceste condiții pot fi realizate practic în două variante: fie prin variația grosimii  $d$ , fie prin variația unghiului de refracție  $\angle r$  (respectiv a celui de incidență  $\angle i$ ). În primul caz se obțin *franje de egală grosime*, care sînt localizate pe fața superioară a lamelei de grosime variabilă (pene de sticlă, de exemplu), iar în al doilea caz, franjele sînt de *egală încli-*

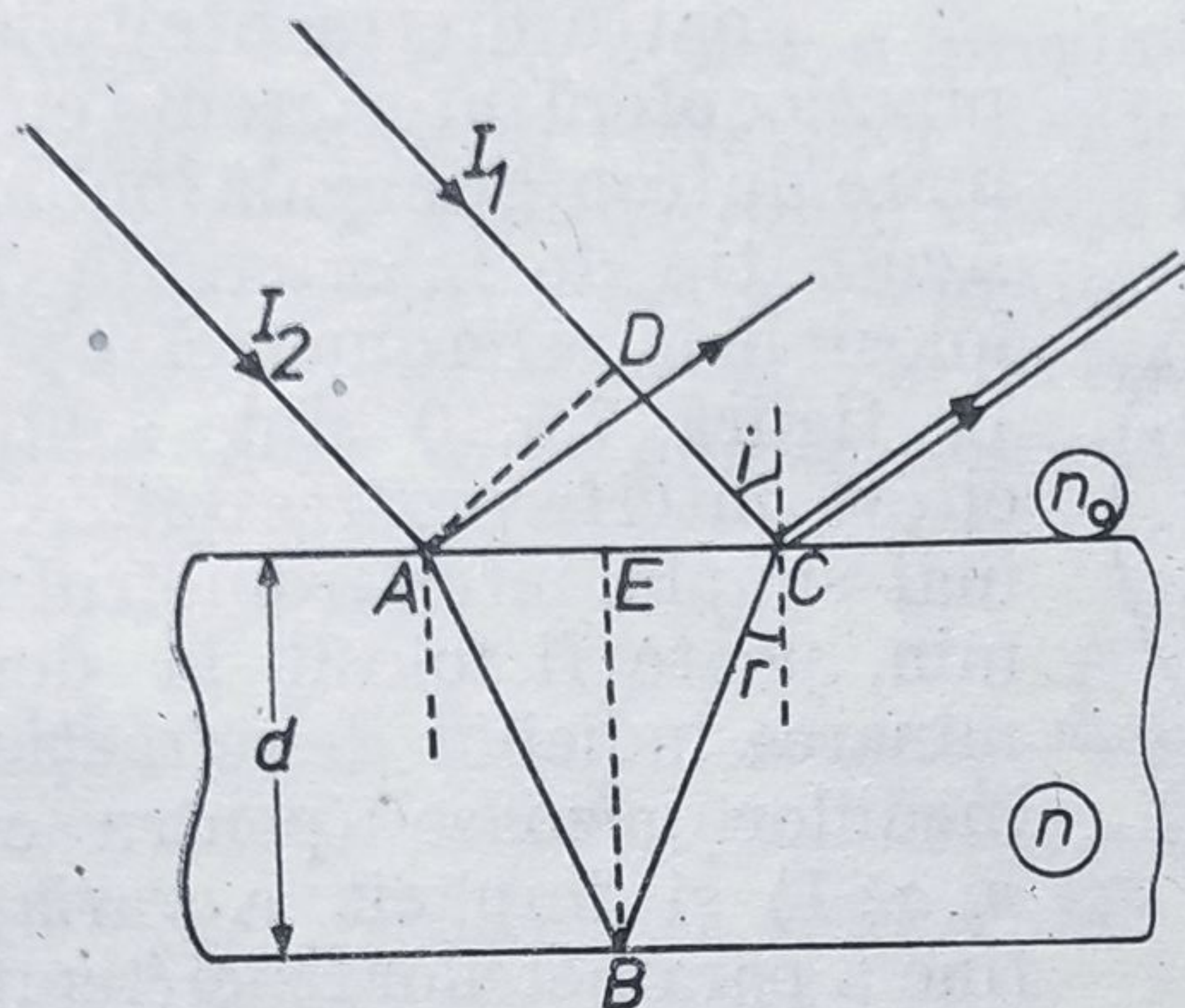


Fig. 7.3.7

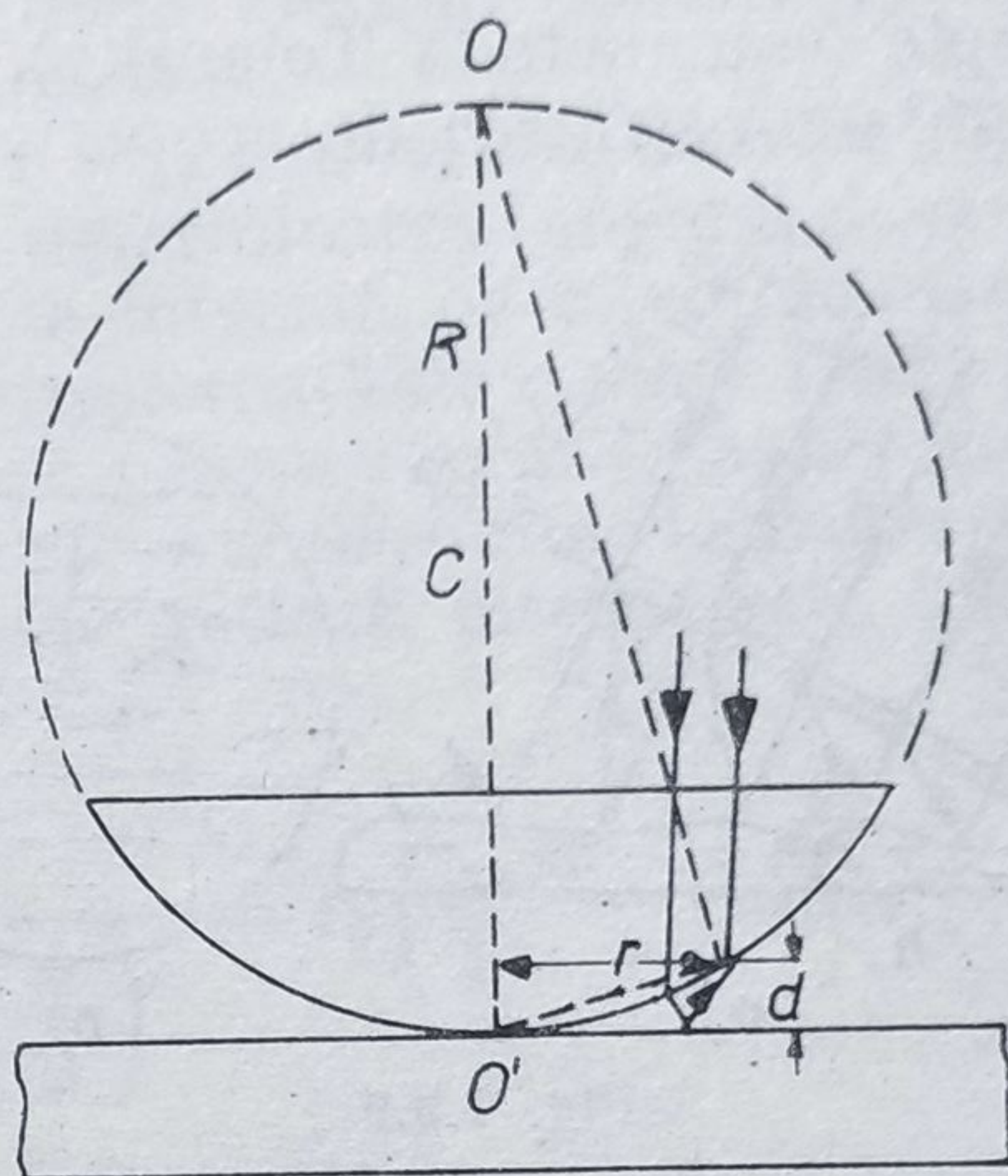


Fig. 7.3.8

*nare*. Acestea sînt franje nelocalizate, dar care pot fi prinse în planul focal al unei lentile convergente.

O experiență interesantă de interferență, cu producere de franje de egală grosime, este cunoscută sub denumirea de „inelele lui Newton”. Ele se obțin cu ajutorul unei pene de aer realizată de spațiul delimitat de o suprafață plană de sticlă și o suprafață sferică realizată de o lentilă plan-convexă, ce se sprijină pe suprafața plană (fig. 7.3.8). Datorită simetriei axiale, franjele luminoase vor avea forma unor cercuri (inele), cu centrele pe axa  $OO'$  și vor fi localizate pe fața convexă a lentilei. Se poate determina ușor raza  $r_m$  a unui inel de interferență de ordin  $m$ , plecînd de la condiția de maxim (7.3.44) și observînd de pe figură că  $d \simeq r^2/2R$ . Se obține

$$r_m \simeq \sqrt{m\lambda R}. \quad [(7.3.46)]$$

De remarcat că dacă suprafața superioară a lamelei nu este perfect plană, aceasta va afecta forma inelelor de interferență, care nu vor mai fi perfect circulare. Pe acest principiu se bazează metodele interferențiale de determinare a gradului de planeitate a unor suprafețe metalice. De regulă, în aceste metode, lentila plan-convexă este înlocuită cu o placă plan-paralelă semitransparentă, înclinată față de suprafața supusă studiului și se iluminează transversal cu un fascicul de lumină paralelă (fig. 7.3.9, a). Se vor obține franje rectilinii dacă suprafața este perfect plană, iar abaterea de la liniaritate va fi o măsură a neplaneității suprafeței respective. Dacă experiența se efectuează în lumină monocromatică de lungime de undă  $\lambda$ ,



atunci din frîngerea  $b$  a franjelor luminoase, se poate determina abaterea  $h$  de la planeitate a suprafeței, folosind relația evidentă

$$h = (b/a)(\lambda/2). \quad (7.3.47)$$

Metoda aceasta, cunoscută și sub numele de metoda interferometriei optice multiple (sau metoda Tolansky), este utilizată frecvent la determinarea grosimii unor straturi de acoperire, grosimi ce nu depășesc valoarea  $\lambda/2$ .

Foarte interesante aplicații practice oferă interferența cu formare de franje de egală înclinare. Acest tip de interferență este folosit în interferometrele optice. În figura 7.3.10 sînt schițate cîteva interferometre optice. Cel mai simplu, interferometrul Jamin, poate fi folosit la determinarea indicilor de refracție ai mediilor gazoase (pentru care  $n_g \simeq 1$ ) și implicit a variației fine a parametrilor fizici (temperatură, presiune, umiditate etc.)

de care depinde  $n_g$ . În acest scop, în calea uneia dintre razele de lumină se introduce o cuvă de lungime  $l$ , umplută cu gazul de studiu, care va introduce o diferență de drum optic suplimentară între cele două raze

$$\Delta = l(n_g - n_0) \quad (7.3.48)$$

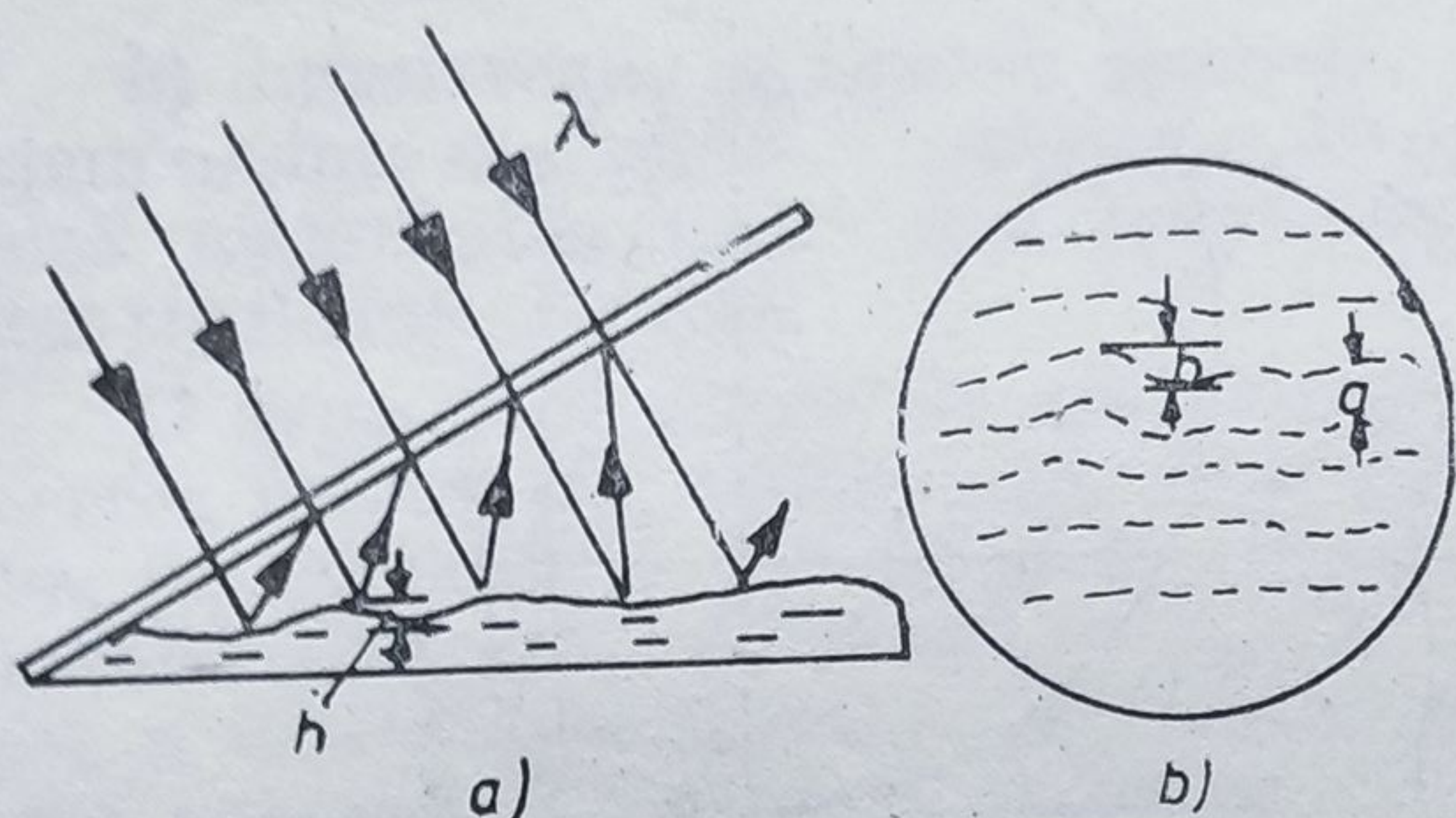


Fig. 7.3.9

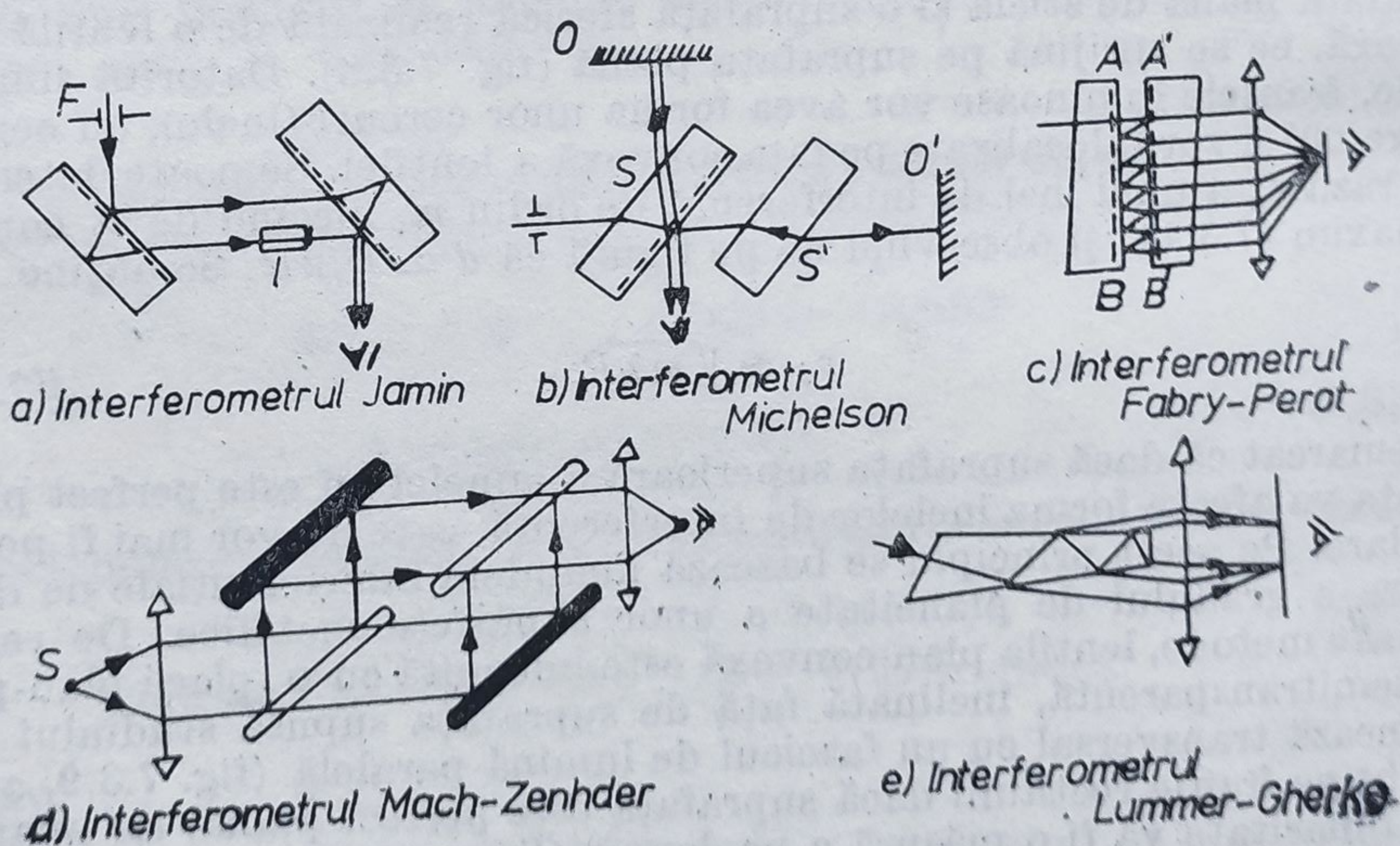


Fig. 7.3.10



Ca atare, în ocularul interferometrului se va înregistra o anumită deplasare a imaginii de interferență și din măsurarea acestei deplasări (numărînd franjele ce trec prin fața unui reticular), se determină  $n_g$ .

Interferometrul Michelson, în care interferează raze care parcurg drumuri reciproc perpendiculare ( $SO$  și  $S'O'$ ), prezintă interes mai ales pentru că cu ajutorul lui s-a efectuat celebra experiență Michelson-Morley din anul 1896 care a demonstrat inexistența eterului luminos (privit ca suport pentru propagarea undelor luminoase).

În ceea ce privește interferometrul Fabry-Perot, este de reținut precizia ridicată pe care acesta o prezintă în determinarea lungimii de undă  $\lambda$  a luminii. Datorită reflexiilor multiple ce intervin pe fețele semiarginte  $AB$ , respectiv  $A'B'$ , se obțin franje de interferență de o mare finețe și de intensități ridicate. Se poate arăta [69] că pentru suprafețe al căror coeficient de reflexie este  $r$ , iar cel de transmisie  $\tau$ , intensitatea radiației transmise în urma unui număr foarte mare de reflexii interne este dată de expresia

$$I = I_0 \left( \frac{\tau}{1-r} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)} = I_0 \left( \frac{\tau}{1-r} \right)^2 A(\Delta) \quad (7.3.49)$$

unde funcția

$$A(\Delta) = \left[ 1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi d n}{\lambda} \cos r \right) \right]^{-1} \quad (7.3.50)$$

este cunoscută sub numele de „funcție Airy”. Se vede că intensitatea franjelor luminoase este  $I_{max} = I_0 \left( \frac{\tau}{1-r} \right)^2$ , iar a celor întunecate  $I_{min} = I_0 \left( \frac{\tau}{1+r} \right)^2$ . Parametrul de vizibilitate  $V$ , va fi dat în acest caz de expresia

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2r}{1+r^2}. \quad (7.3.51)$$

În figura 7.3.11 este prezentată grafic distribuția intensității pentru două franje ( $m$  și  $m+1$ ), funcție de  $r$ , remarcîndu-se contrastul ridicat pentru  $r \geq 0,5$ .

De remarcat că la incidență normală, într-un fascicul de lumină paralelă intervin interferențe și la reflexia pe o singură față a lamelei (lamelă metalică, de exemplu). În acest caz interferează unda incidentă cu unda reflectată și formează o undă staționară (fig. 7.3.12). Vectorii optici ai celor două unde fiind

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \sin(\omega t - kx); \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \sin(\omega t + kx + \varphi_r) \quad (7.3.52)$$



unde  $\varphi_r$  reprezintă faza suplimentară pe care o introduce reflexia (funcție de valorile indicilor de refracție ai celor două medii delimitate de suprafața de reflexie, vezi § 6.10), se observă că diferența lor de fază

$$\varphi = (\omega t + kx + \varphi_r) - (\omega t - kx) = 2kx + \varphi_r \quad (7.3.53)$$

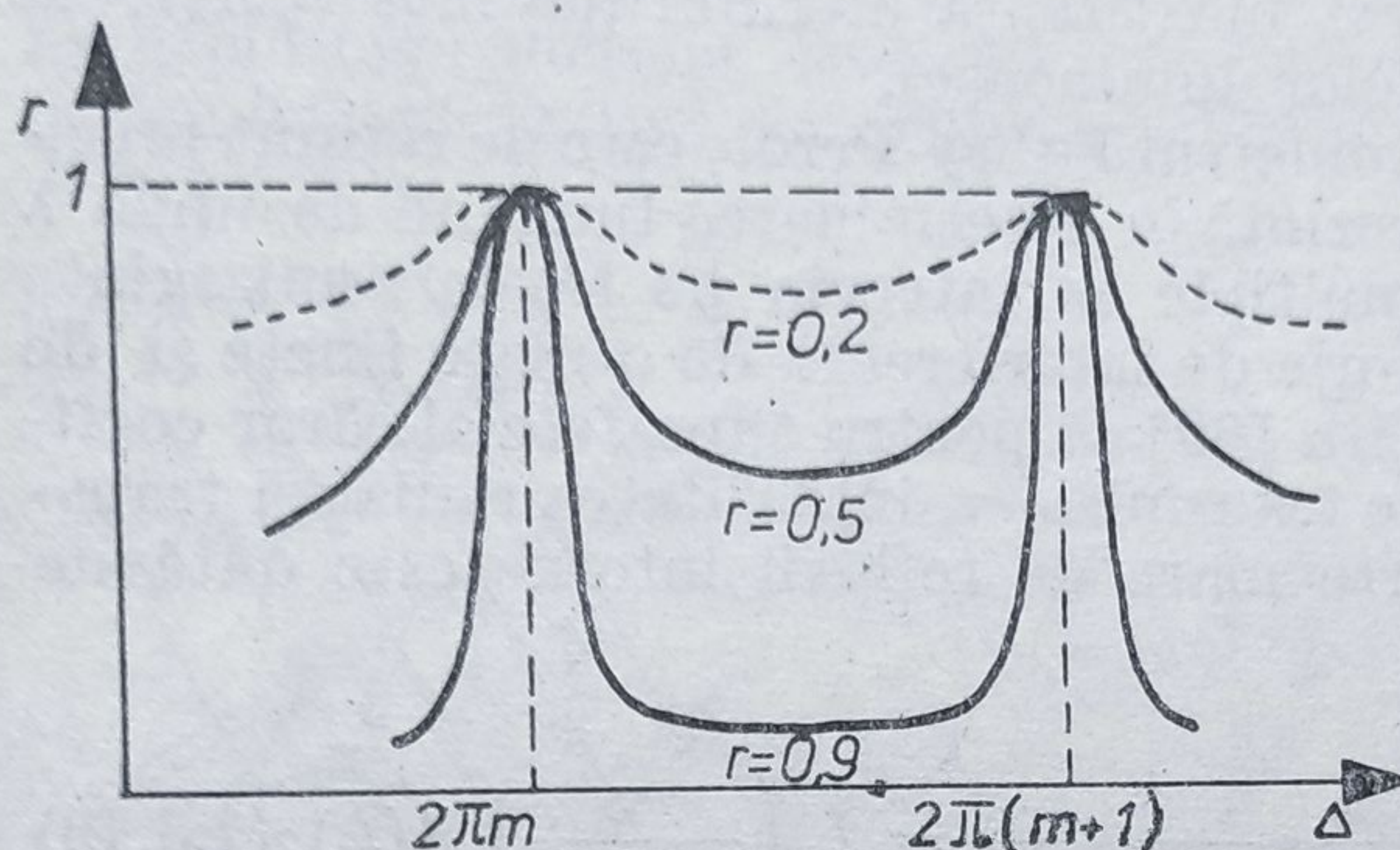


Fig. 7.3.11

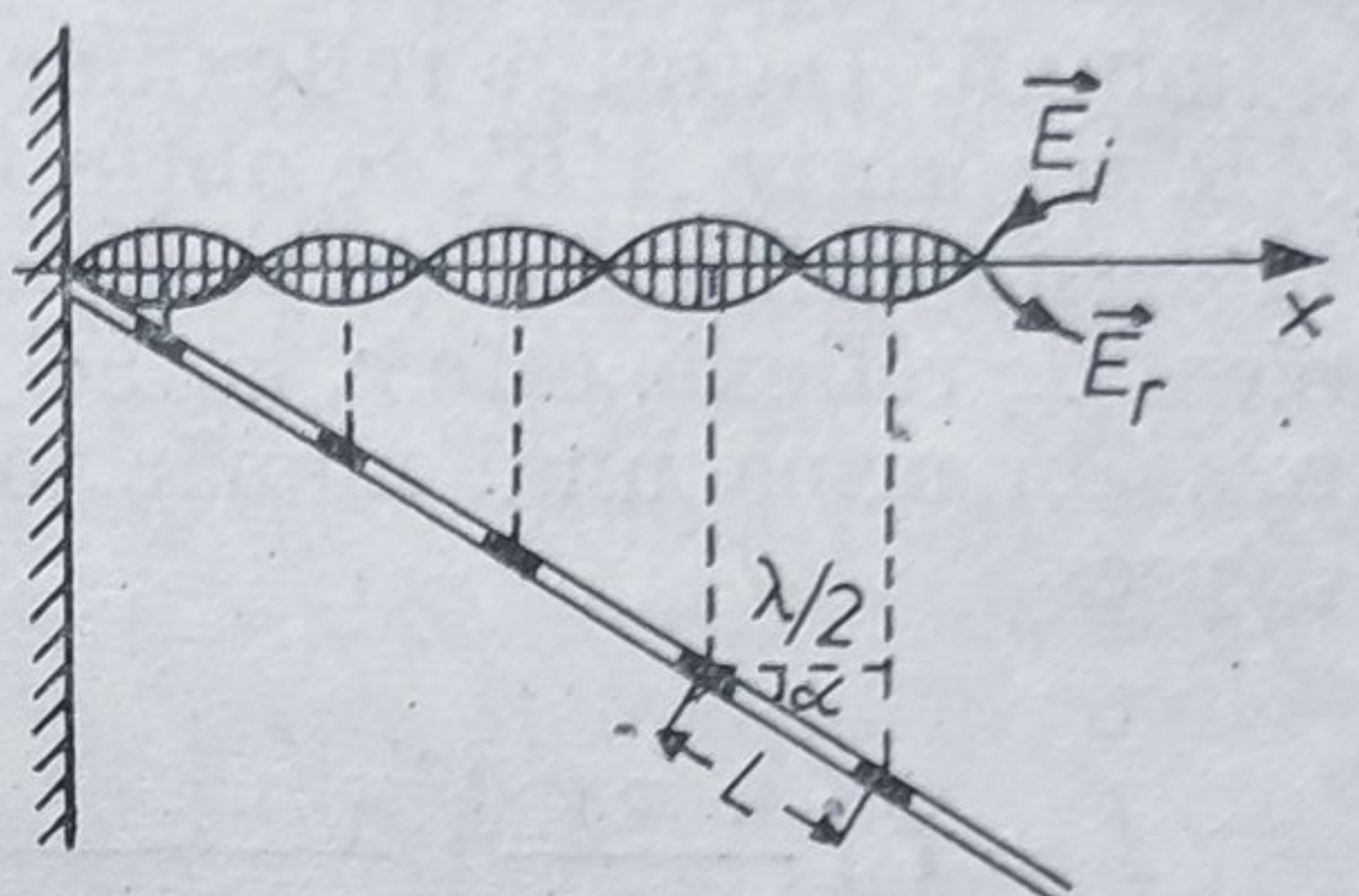


Fig. 7.3.12

este constantă în timp. Deci se vor obține zone de maxim (ventre) și de minim (noduri) ale intensității luminoase rezultante, care vor fi localizate în lungul axei  $0x$ . Pozițiile lor, pentru cazul particular când  $E_{0i} = E_{0r}$  și  $\varphi_r = 0$ , și deci când relația (7.3.26) se reduce la forma

$$I = 4I_0 \cos kx \quad (7.3.54)$$

sînt date de condițiile

$$x_m = m \frac{\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.55)$$

$$x_m = \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{k} = \frac{2m+1}{4} \lambda; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3.56)$$

Se observă că distanțele dintre două ventre, respectiv dintre două noduri vecine sînt egale între ele ( $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda/2$ ).

Undele staționare de lumină au fost folosite de către Wiener pentru a demonstra că efectele luminoase sînt determinate, în marea majoritate a cazurilor, de vectorul electric  $\mathbf{E}$  al undei respective. În acest scop, Wiener a prins imaginea de interferență, cu producere de unde staționare, pe o emulsie fotografică înclinată sub un unghi  $\alpha$  mic față de normala la suprafața metalică reflectătoare, caz în care distanța dintre două ventre se mărește ( $L = \lambda/2 \cos \alpha$ ) și poate fi determinată cu suficientă precizie. S-a constatat astfel că benzile înnegrite ce apar pe emulsie după dezvoltare se datoresc



cîmpului electric al undei (ele se formează în ventrele corespunzătoare cîmpului  $E$ ).

Plecînd de la experiența lui Wiener, Lippmann realizează în anul 1891 primele fotografii în culori, folosind o metodă interferențială. El folosește o placă metalică pe care depune un strat mai gros de emulsie fotosensibilă și proiectează imaginea (obiectului colorat) pe acest strat. În stratul fotosensibil vor lua naștere unde staționare ale căror ventre vor fi situate la distanțe diferite față de placa metalică, funcție de lungimea de undă  $\lambda$ . Prin dezvoltare, halogenura de argint se va reduce la argint metalic în locul ventrelor, astfel încît în interiorul emulsiei se vor forma pelicule de Ag semitransparente, echidistante între ele pentru o radiație de o anumită culoare ( $\lambda$ ). Expusă la iluminare cu lumină albă, un astfel de clișeu va reflecta selectiv acele radiații ale căror lungimi de undă  $\lambda$  corespund celor folosite la fotografiere. Astăzi se folosește o altă tehnică în fotografierea în culori și anume stratul fotosensibil este format din suprapunerea a trei pelicule cu sensibilități cromatice diferite (sensibilitate în albastru, verde și roșu), despărțite între ele prin două filtre pentru culoarea galbenă [15].

c) **Optica albastră și filtrele interferențiale.** Dintre aplicațiile de mare însemnătate practică ale interferenței în lumină paralelă se remarcă utilizarea peliculelor subțiri în calitate de straturi de acoperire pentru îmbunătățirea transmitanței sau a reflectanței dispozitivelor optice. Au fost realizate astfel straturi de acoperire antireflectătoare, straturi perfect reflectătoare și filtre cu ajutorul cărora se poate selecta, dintr-un fascicul paralel de lumină albă, o anumită componentă  $\lambda$ .

Sistemele antireflectătoare (sau antireflectorizante) sînt constituite dintr-o lamelă de sticlă cu fețe plan-paralele, acoperite pe o față cu una sau mai multe pelicule avînd grosimea egală cu  $\lambda/4$  și indicele de refracție  $n_1$  (diferit de al lamelei  $n_2$ ) ales în așa fel încît coeficientul de reflexie  $r$  al sistemului să fie minim pentru radiația respectivă. Pentru cazul unei singure pelicule cu  $d = \lambda/4$ , se vede de pe figura 7.3.13 că razele  $I_1$  și  $I_2$  interferează cu formarea unui minim pe suprafața superioară a peliculei. Cele două excitații luminoase se vor anula reciproc pe suprafața superioară a peliculei dacă și amplitudinile  $E_{01}$  și  $E_{02}$  vor fi în aceste puncte egale între ele. Or, ținînd cont și de relația (6.10.77), la incidență normală

$$E_{01} = \sqrt{r_1} E_0 = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} E_0 \quad (7.3.57)$$

$$E_{02} = \sqrt{r_2} E_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0.$$

Din condiția  $E_{01} = E_{02}$ , rezultă după calcule simple

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \simeq \sqrt{n_2} \quad (7.3.58)$$

unde pentru aer s-a luat  $n_0 \simeq 1$ . Dacă baza este realizată din sticlă optică ușoară (sticlă crown cu  $n_2 = 1,5$ ), atunci din condiția (7.3.58) rezultă pentru pelicula antireflectoare un indice de refracție  $n_1 = 1,225$ . Există cîteva materiale optice cu indici de refracție apropiați de această valoare :



florura de magneziu ( $\text{MgF}_2$  cu  $n_1 = 1,35$ ); criolitul ( $\text{Na}_3\text{AlF}_6$  cu  $n_1 = 1,36$ ) etc.

Calculule efectuate pe baza considerentelor prezentate mai sus conduc la următoarele expresii pentru coeficienții de reflexie ai suprafeței, fără strat de acoperire ( $r$ ), respectiv cu strat ( $r'$ )

$$r = \left( \frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2; \quad r' = \frac{2(n_2 - n_1)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_0)} \quad (7.3.59)$$

Luînd  $n_0 = 1$ ;  $n_2 = 1,5$  și  $n_1 = 1,35$ , se obțin valorile:  $r = 0,11$  și  $r' = 0,051$ , deci  $r' \ll r$ . În figura 7.3.14 este reprezentată grafic variația raportului  $r'/r = f(\lambda)$ , pentru cazul cînd condiția (7.3.58) este îndeplinită pentru radiația cu  $\lambda = 5550 \text{ \AA}$ . Se observă că sistemul este în acest caz ușor reflectorizant în albastru-violet și aproape perfect antireflectorizant în galben-roșu. Aplicînd o astfel de peliculă (de exemplu prin evaporare în vid înaintat) pe suprafața obiectivelor aparatelor optice, acestea primesc o colorație albastruie-purpurie (privite prin reflexie!), din care cauză, ele formează o așa zisă „optică albastră”.

Teoria peliculelor optice subțiri, creată de către Born și Wolf [10] arată că pot fi realizate și sisteme optice cu transmitanță minimă ( $\tau \rightarrow 0$ ) și reflectanță maximă ( $r \rightarrow 1$ ), cu condiția ca să se folosească straturi formate din pelicule cu grosimea  $\lambda/4$ , care să aibă alternativ indici mari ( $n_1$ ) de refracție, respectiv indici mici ( $n_2$ ) de refracție. De exemplu, cu 4 astfel de pelicule din sulfură de zinc ( $n_1 = 2,3$ ) și fluorură de magneziu ( $n_2 = 1,35$ ) se obține un strat cu  $r = 0,97$ .

În sfîrșit, dacă aceste pelicule se depun pe ambele fețe ale lamelei de sticlă, cu grosimea egală cu multiplu întreg de  $\lambda_0/2$ , se obține un filtru

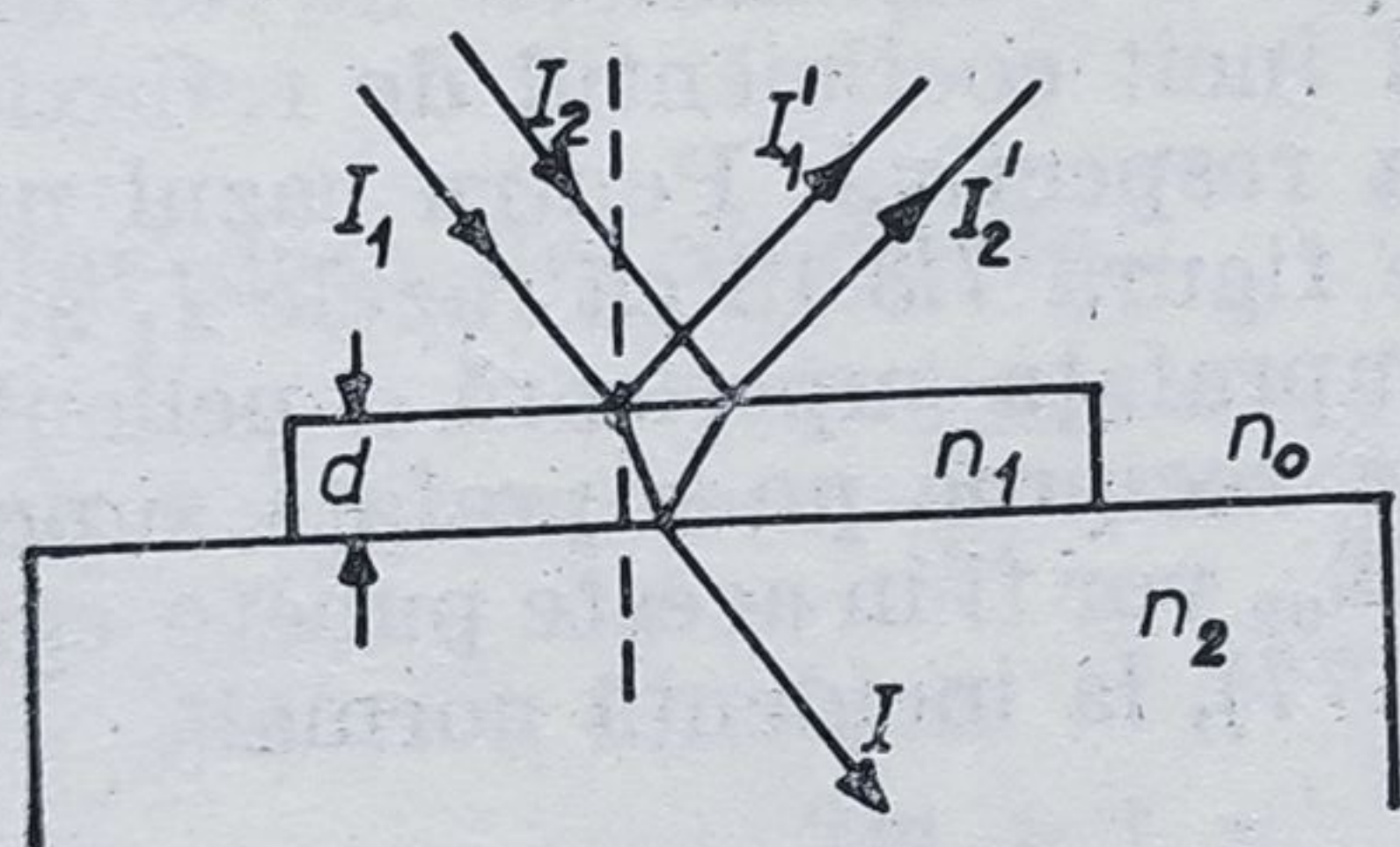


Fig. 7.3.13

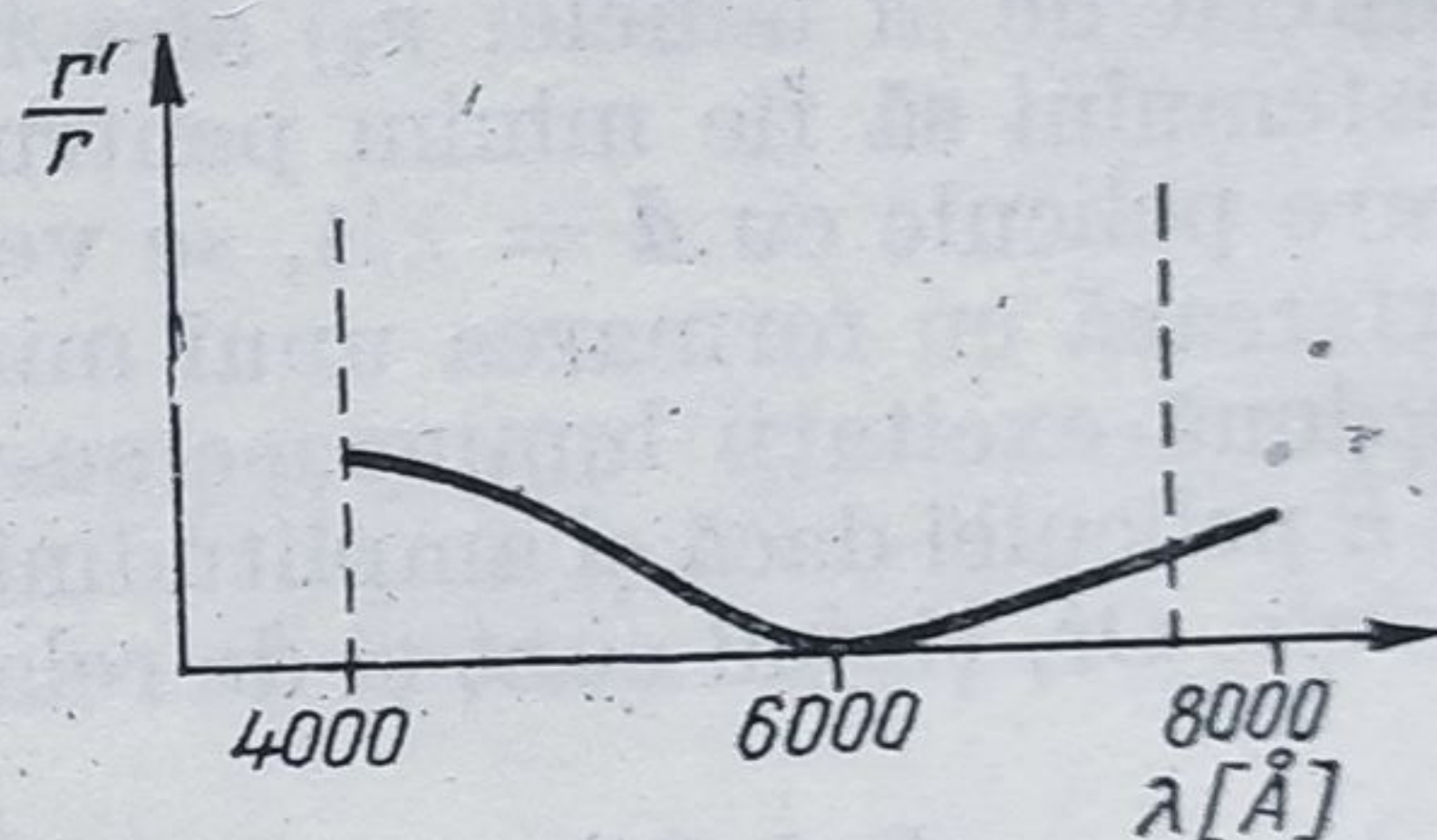


Fig. 7.3.14

interferențial, adică un sistem cu transmitanță maximă pentru  $\lambda_0$  (de fapt pentru o bandă în jurul lui  $\lambda_0$  cu  $\Delta\lambda \simeq 5 \div 80 \text{ \AA}$ ) și nulă pentru restul spectrului [11].

## § 7.4. DIFRACTIA LUMINII

Primele fenomene de difracție a luminii obținute, se pare, de către Leonardo da Vinci (1452—1519), sînt descrise, încă din anul 1665 de către Grimaldi, dar abia în anul 1818 este elaborată o teorie a difracției în cadrul



concepției ondulatorii asupra naturii luminii. Această teorie a fost creată, în linii mari, de către Fresnel care completează principiul lui Huygens cu ideea că undele elementare sînt coerente și, ca atare, interferează între ele. De asemenea, el demonstrează (vezi mai jos), că intensitatea undelor elementare este maximă pe direcția normalei pozitive a vechiului front de undă și scade cu creșterea unghiului  $\alpha_m$  (fig. 7.4.1), anulîndu-se pentru  $\alpha_m \geq \pi/2$ . Pe baza acestor elemente, Fresnel elaborează o teorie a difracției, cunoscută sub denumirea de „metoda zonelor”. Cu ajutorul acestei metode, el reușește să descrie calitativ o serie de experiențe de difracție și să dea o anumită „interpretare ondulatorie” noțiunii de rază de lumină. Cîțiva ani mai tîrziu (1821), Fraunhofer descoperă difracția în lumină paralelă, iar Schwerd o explică tot pe baze ondulatorii în anul 1837. De notat că contribuții de seamă la dezvoltarea teoriei matematice a difracției luminii aduce Kirchhoff [16].

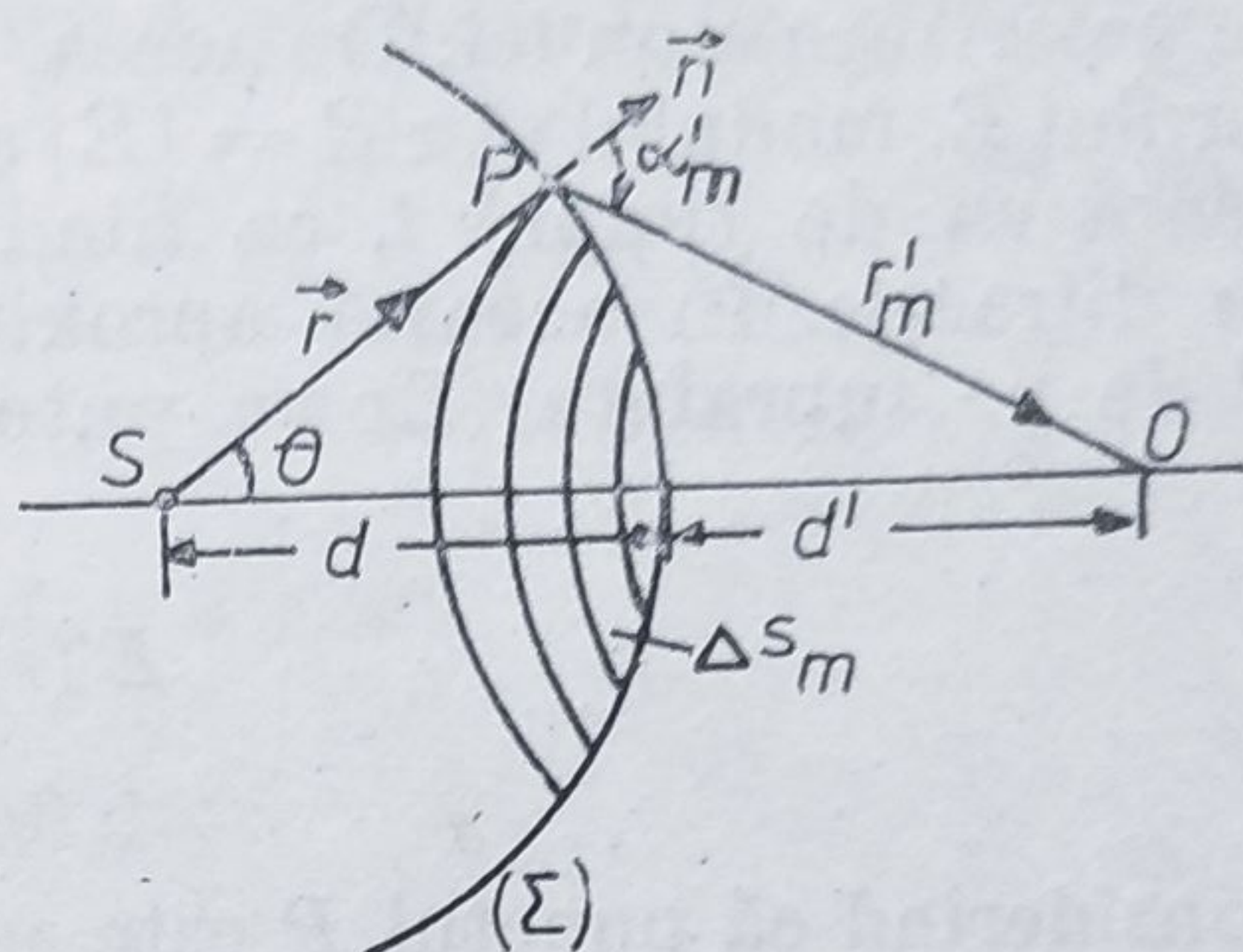


Fig. 7.4.1

Difracția este un fenomen specific ondulatoriu și apare atunci cînd în calea undelor luminoase se interpun obstacole (deschideri sau aperturi, respectiv obstacole opace) cu dimensiuni de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii. Și în cadrul descrierii acestui fenomen pot fi distinse două cazuri particulare de difracție: difracția în lumină divergentă sau difracția de tip Fresnel și difracția în lumină paralelă sau de tip Fraunhofer. Această clasificare prezintă avantaje în privința dezvoltării sub aspect matematic a teoriei fenomenului. Înainte însă de a prezenta studiul acestor fenomene de difracție, va fi expusă succint metoda zonelor lui Fresnel.

Fie  $S$  o sursă punctiformă de lumină monocromatică (fig. 7.4.1), care generează într-un mediu optic omogen o undă sferică, descrisă prin ecuația

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}_0}{r} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (7.4.1)$$

și fie  $(\Sigma)$  suprafața sferică a frontului acestei unde la un moment dat  $(t)$ . În conformitate cu principiul lui Huygens-Fresnel, fiecare element de arie  $\Delta S_m$  al acestui front va fi locul de generare a noi unde elementare sferice, astfel încît dacă dorim să calculăm intensitatea luminoasă într-un punct de observație  $O$ , atunci va trebui să ținem seama de efectul rezultat al suprapunerii (și interferării) tuturor acestor unde elementare în punctul  $O$ . Calcularea intensității rezultante produsă de undele elementare ce provin de la diverse porțiuni ale suprafeței  $(\Sigma)$  se poate face folosind o teoremă a lui Green din analiza matematică [16], în care valoarea unei funcții armonice de tipul (7.4.1) într-un punct  $O$  din interiorul unei



suprafețe închise este determinată de valoarea aceleiași funcții pe respectiva suprafață. Această cale a fost urmată de către Kirchhoff în dezvoltarea teoriei difracției. Aici va fi expusă doar o tratare calitativă a acestei teorii, detaliile de calcul putînd fi găsite în tratate de specialitate [64].

De notat, însă, că teoria lui Kirchhoff este valabilă numai pentru funcții armonice scalare, ceea ce înseamnă că ea nu ține seama de starea de polarizare a undei. De aceea, în expresia (7.4.1) se va lua în locul vectorului  $\mathbf{E}$ , modulul său  $E = |\mathbf{E}|$  și se va lăsa deocamdată la o parte dependența sa de timpul  $t$ , ca fiind nesemnificativă în studiul fenomenelor de difracție. În această aproximație, excitația luminoasă într-un punct  $P$  de pe suprafața  $(\Sigma)$  va putea fi descrisă de mărimea

$$E'(r) = E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (7.4.2)$$

Considerînd că punctul  $P$  este sediul de generare al unei unde elementare sferice, atunci excitația luminoasă determinată de această undă în punctul de observație  $O$  va fi descrisă de

$$E(r, r') = E'(r) \frac{e^{-ikr'}}{r'} f(\alpha') = E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{e^{-ikr'}}{r'} f(\alpha') \quad (7.4.3)$$

în care factorul  $f(\alpha')$ , numit și „factor de oblicitate” ține seama de poziția punctelor  $S$  și  $O$  față de  $P$ . El este determinat de unghiurile pe care le fac razele  $SP$ , respectiv  $PO$  cu versorul  $\mathbf{n}$  al normalei pozitive la suprafața  $(\Sigma)$  și este dat de expresia

$$f(\alpha') = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \quad (7.4.4)$$

avînd în cazul particular al suprafeței  $(\Sigma)$  sferice (cînd  $\mathbf{n} \uparrow \uparrow \mathbf{r}$ ) forma

$$f(\alpha') = 1 + \cos \alpha'. \quad (7.4.5)$$

De remarcat că dacă punctul  $O$  se găsește în partea dinspre sursa  $S$  a suprafeței  $(\Sigma)$ , atunci și  $\cos \alpha' = -1$ , astfel încît:  $f(\alpha') = 0$ , respectiv  $E(r', r) = 0$ . Deci, undele elementare nu se propagă și „înapoi”, lucru conținut de altfel în principiul lui Fresnel.

Pentru a socoti contribuția întregului front de undă  $(\Sigma)$  la excitația luminoasă din  $P$ , Fresnel îl împarte în zone elementare prin secționarea sa cu suprafețe sferice concentrice, avînd centrele în  $O$  și alege razele acestor sfere în așa fel încît

$$(r_{m+1} + r'_{m+1}) - (r_m + r'_m) = r'_{m+1} - r'_m = \lambda/2; \quad m = 0, 1, \dots \quad (7.4.6)$$

În acest caz, undele elementare care provin de la două zone vecine ajung în  $O$ , în opoziție de fază și ca atare, își vor diminua reciproc acțiunea lumi-



moasă. Firește, contribuția dată în  $O$  de una dintre zone va fi

$$\Delta E_{0m} = E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \iint_{\Delta S_m} \frac{e^{-ikr'}}{r'} f(\alpha') dS \quad (7.4.7)$$

$\Delta S_m$  reprezintă aria zonei respective. Socotind elementul de arie în coordonate sferice

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (7.4.8)$$

și observînd de pe figura 7.4.1 că se poate scrie relația

$$r'^2 = r^2 + (d + d')^2 - 2r(d + d')\cos\theta$$

respectiv

$$r' dr' = r(d + d') \sin\theta \, d\theta$$

se obține

$$dS = \frac{r}{d + d'} r' dr' \, d\varphi. \quad (7.4.9)$$

Cu acest rezultat introdus în (7.4.8) și neglijînd variația mică a lui  $f(\alpha')$  în cadrul unei zone, după cîteva calcule simple rezultă

$$\Delta E_m = E_0 \frac{e^{-ikr}}{d + d'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{d' + (m-1)\lambda/2}^{d' + m\lambda/2} f(\alpha') \cdot e^{-ikr'} \cdot dr' = - \frac{2\pi E_0 e^{-ikr}}{ik(d + d')}.$$

$$f(\alpha'_m) e^{-ikr'} \Big|_{d' + (m-1)\frac{\lambda}{2}}^{d' + m\frac{\lambda}{2}} = i \frac{2\pi E_0 e^{-ikr}}{k(d + d')} \cdot e^{-ikd'} \cdot e^{-ikm(\lambda/2)} (1 - e^{ik\lambda/2}).$$

sau întrucît  $k = 2\pi/\lambda$  și  $e^{-imk\lambda/2} (1 - e^{ik\lambda/2}) = e^{-im\pi} (1 - e^{i\pi}) = 2(-1)^m$

$$\Delta E_m = 2i(-1)^{m+1} \lambda f(\alpha'_m) \cdot E_0 \frac{e^{-ik(d+d')}}{d + d'}. \quad (7.4.10)$$

Prezența simbolului imaginar ( $i$ ) în această expresie arată că faza undelor difractate s-a modificat cu  $\pi/2$  față de a undelor primare.

Contribuția tuturor zonelor în punctul de observație  $O$  va fi dată deci de suma

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_m \Delta E_m = 2i\lambda \frac{E_0 e^{-ik(d+d')}}{d + d'} \sum_m (-1)^{m+1} f(\alpha'_m) = \\ &= 2i\lambda \frac{E_0 e^{-ik(d+d')}}{d + d'} (f_1 - f_2 + f_3 - \dots + (-1)^{n+1} f_n). \end{aligned} \quad (7.4.11)$$



Se constată astfel că acțiunea luminoasă în  $O$  este dată de o sumă de termeni, de forma

$$E_0 = E_{01} - E_{02} + E_{03} - \dots + (-1)^{n+1} E_{0n} \quad (7.4.12)$$

această serie fiind convergentă, pentru că termenii ei sînt descrescători ( $f(\alpha'_m)$  descrește cu creșterea lui  $m$ )

$$E_{01} > E_{02} > \dots > E_{0n}.$$

Făcînd o rearanjare a termenilor în suma (7.4.12) de forma:

$$E_0 = \frac{E_{01}}{2} + \left( \frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \dots + \frac{E_{0n}}{2}$$

și luînd aproximativ  $E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+2})$  se vede că:

$$E_0 \simeq \frac{1}{2}(E_{01} + E_{0m}) \quad \text{pentru } m = 2n \quad (7.4.13)$$

$$E_0 \simeq \frac{1}{2}(E_{01} - E_{0m+1}) \quad \text{pentru } m = \frac{2n+1}{2}.$$

Evident că pentru  $m \rightarrow \infty$ , rezultă  $E_{0m} \rightarrow 0$  și deci intensitatea luminoasă care va ajunge în  $O$  va fi dată de expresia

$$I_p \sim E_p^2 = \frac{I_1}{4}. \quad (7.4.14)$$

Acest rezultat „surprinzător”, stabilește că în punctul  $O$  va ajunge numai a 4-a parte din intensitatea fluxului luminos ce trece prin prima zonă Fresnel. Avînd în vedere că aria secțiunii unei zone (toate zonele au aceeași arie) este dată de expresia

$$\Delta S = \pi \frac{dd'}{d + d'} \cdot \lambda \quad (7.4.15)$$

și deci pentru lumină are valori de ordinul a  $10^{-2} \text{ mm}^2$ , în optica ondulatorie s-a acreditat ideea că raza de lumină poate fi echivalată cu un „tub luminos”, de secțiune transversală egală cu a unei zone Fresnel. O astfel de imagine nu are însă decît meritul de a fi intuitivă, întrucît așa cum s-a precizat în § 6.10.4, noțiunea de rază a undei nu este valabilă decît în aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ .



Rezultatele de mai sus au fost probate experimental direct, prin folosirea așa numitelor rețele zonate (rețele Soret), în care fie zonele de ordin par, fie cele impare sînt opturate. Conform teoriei zonelor, la introducerea unei astfel de rețele în calea unui fascicul de lumină, iluminarea în punctul de observație  $O$  trebuie să crească (pentru că  $E_0 = E_{01} + E_{03} + \dots$  sau  $E_0 = E_{02} + E_{04} + \dots$ ), concluzie atestată de experiență. În continuare, metoda zonelor lui Fresnel va fi folosită în explicarea cîtorva experimente simple de difracție.

a) **Difracția de tip Fresnel.** *Difracția produsă de o apertură circulară, practică într-un ecran plan.* Fie  $S$  sursa punctiformă de lumină și  $MN$  ecranul prevăzut cu un orificiu circular  $P$ , de diametru  $d \simeq \lambda$  (fig. 7.4.2). În punctul de observație  $O$  se va compune lumina care provine de la un număr finit de zone Fresnel (cîte încap în apertura  $P$ ) și ca atare, dacă numărul acestora este par, atunci punctul  $O$  va fi slab iluminat, iar dacă acest număr este impar, punctul  $O$  va fi iluminat intens. Acest lucru se obține experimental, iar punctul central  $O$  este înconjurat de inele circulare luminoase și întunecate, care constituie *franșele de difracție*.

*Difracția produsă pe muchia rectilinie a unui plan.* Fie  $MN$  ecranul pe a cărui margine  $N$  se produce difracția luminii emise de sursa punctiformă  $S$  (fig. 7.4.3). Se observă că în acest caz cîte o jumătate din fiecare zonă Fresnel este opturată de către ecranul  $MN$  (fig. 7.4.3, b) și, de aceea, se pot obține informații în legătură cu variația iluminării prinse pe un ecran  $OP$ , folosind „metoda subzonelor”: fiecare zonă Fresnel se împarte în subzone de arii  $\delta S_{m_i}$  (prezentate prin linii întrerupte în fig. 7.4.3) și se calculează amplitudinea vibrației luminoase în punctul de observație  $O$  prin însumarea vectorială a amplitudinilor  $\delta E_{01}, \delta E_{02}, \dots$ , etc., care provin de la fiecare subzonă în parte. În această însumare trebuie să se țină seama de faptul că  $\delta E_{01} > \delta E_{02} > \dots$ , iar defazajul dintre aceste unde crește odată

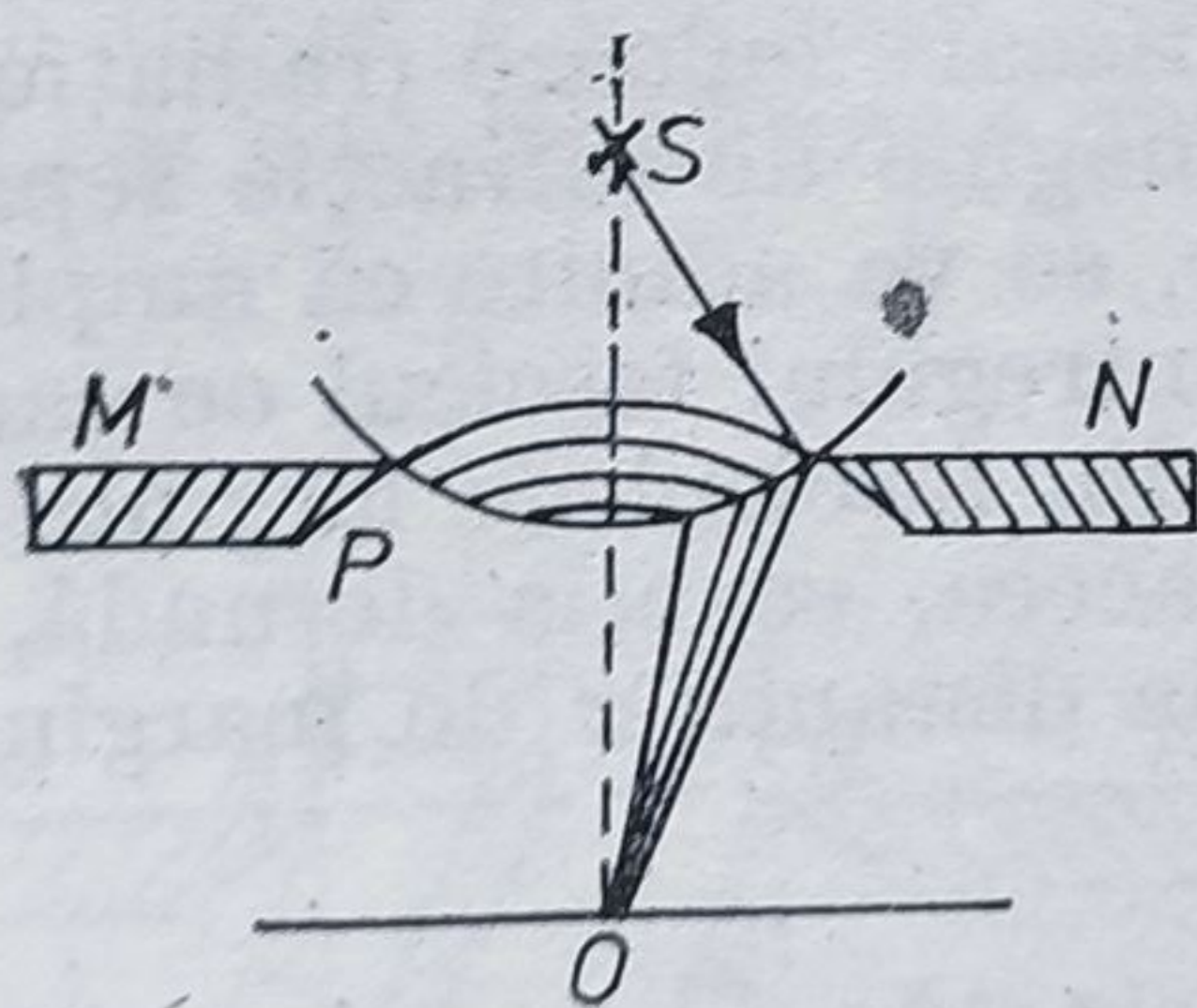


Fig. 7.4.2

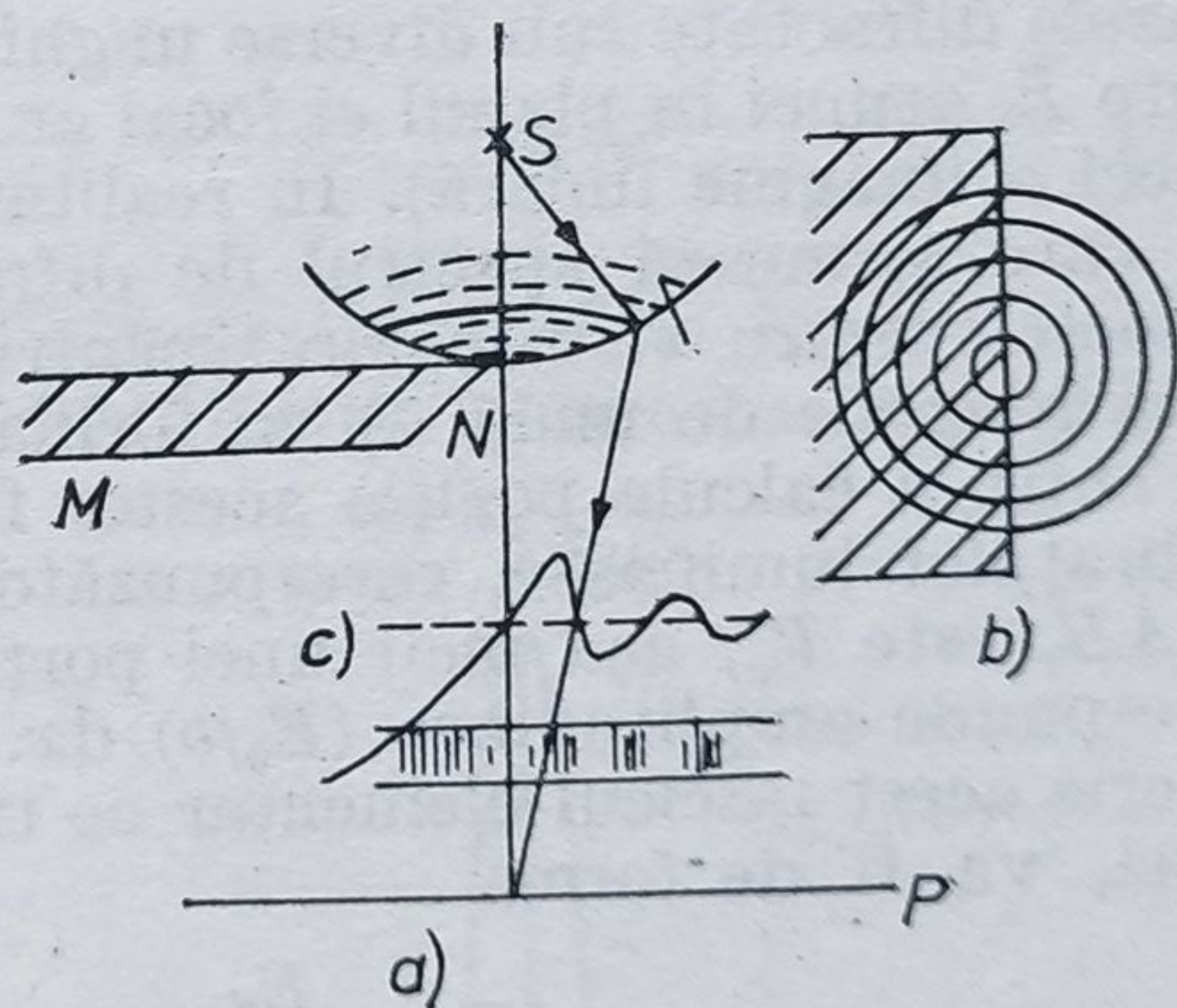


Fig. 7.4.3

cu numărul lor de ordine. Se obține o construcție grafică de forma celei prezentate în figura 7.4.4, care la limită, pentru subzone de arii infinitezimale de mici, va trece într-o curbă continuă de formă unei spirale. Este cunoscută sub numele de *spirala lui Cornu* și are două ramuri, respectiv



doi poli  $F$  și  $F'$ , dacă în însumare se iau în considerație și subzonele din partea stângă a ecranului  $MN$ , obturate de către acesta.

Utilizarea spiralei Cornu în studiul difracției luminii pe muchia unui plan se face astfel: intensitatea în punctul  $D$  (fig. 7.4.3) va fi dată de patratul amplitudinii vibrației luminoase, egală cu  $OF$ . Pe măsură ce se

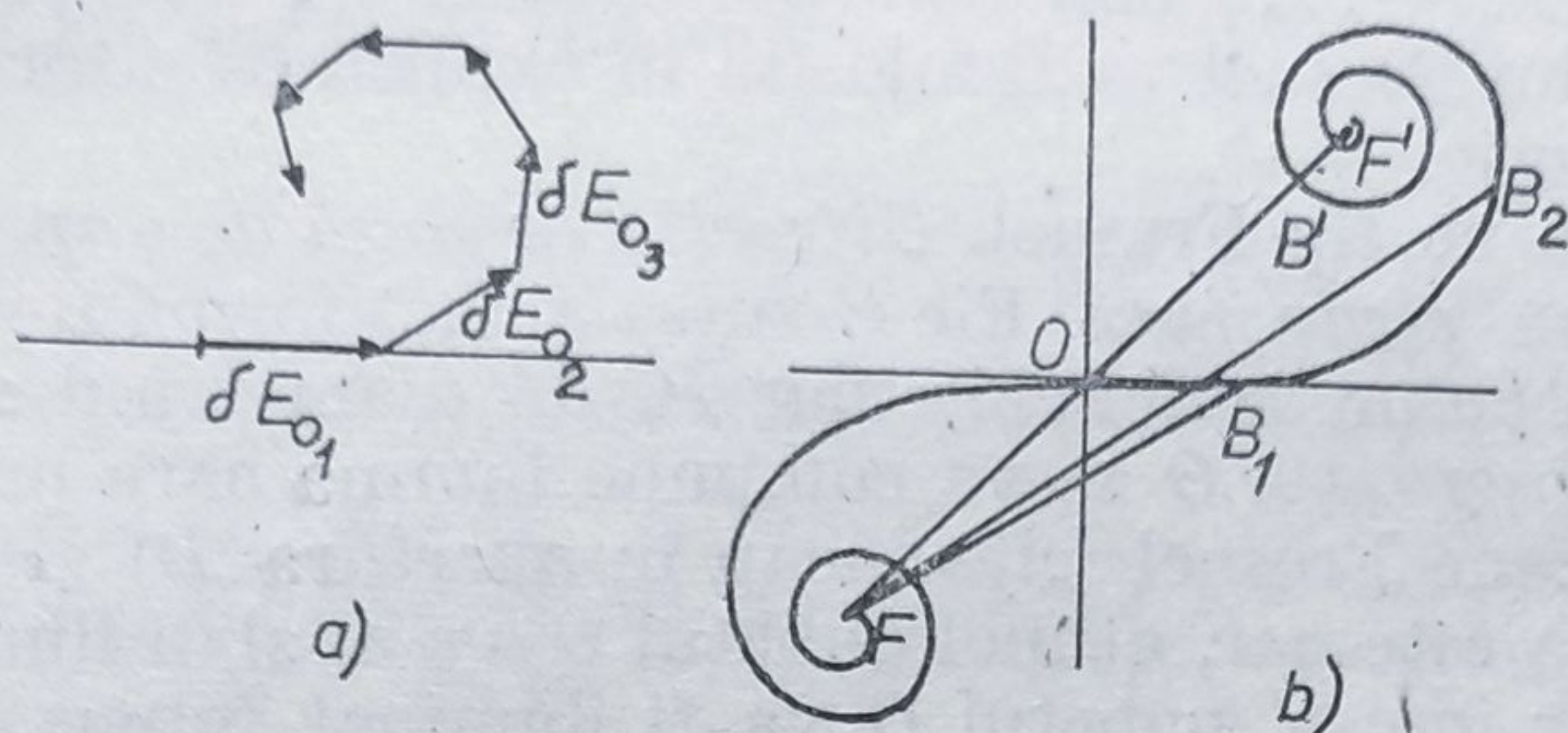


Fig. 7.4.4

înaintează spre  $P$ , încep să fie văzute părți tot mai mari din subzonele opturate de  $MN$ , iar aceasta corespunde unei deplasări a punctului  $B$  pe spirala Cornu (în  $B_1, B_2, \dots$ ). Înseamnă că amplitudinea oscilației luminoase și implicit, intensitatea  $I$  a acesteia crește (fiind dată de segmentele  $FB_1, FB_2, \dots$ ). Când s-a epuizat prima zonă, înaintării pe spirală îi corespunde o micșorare a amplitudinii (de exemplu  $FB' < FB_2$ ) până se epuizează toate subzonele din zona a doua ș.a.m.d. Pe ecranul  $DP$  se obțin dungi luminoase și întunecate (paralele cu muchia  $N$  a ecranului), care formează spectrul de difracție (fig. 7.4.3, c).

b) **Difracția de tip Fraunhofer.** *Difracția printr-o fantă dreaptă.* Fie  $AB$  o fantă rectilinie de lărgime  $b$ , practică într-un ecran opac plan  $MN$  (fig. 7.4.5), pe care cade normal o undă de lumină plană. Dacă strângem razele difractate sub diverse unghiuri  $\alpha$ , cu ajutorul unei lentile convergente  $L$ , atunci în planul ei focal ar trebui să obținem imaginea fantei  $AB$  (deci o imagine liniară). În realitate se obțin mai multe imagini ale fantei, care formează spectrul de difracție. Când lumina incidentă este albă, acest spectru va fi colorat pentru că fiecare culoare (radiație de o anumită lungime de undă  $\lambda$ ) va forma o imagine de difracție separată.

Pentru a calcula poziția acestor franje, se va admite că amplitudinea vibrațiilor luminoase, corespunzătoare întregului fascicul ce cade pe fanta  $AB$ , este  $E_0$ , așa încât unei porțiuni din fascicul de lărgime  $dx$  îi va corespunde amplitudinea  $(E_0/b) dx$ . De aceea, ecuația de undă, care va descrie acest fascicul elementar ce trece la distanța  $x$  de marginea  $A$  a fantei, va fi de forma

$$dE = \frac{E_0}{b} \sin(\omega t - kx \sin \alpha) dx. \quad (7.4.16)$$

Pentru întregul fascicul, strâns în planul focal al lentilei  $L$ , rezultă ecuația

$$E = \frac{E_0}{b} \int_0^b \sin(\omega t - kx \sin \alpha) dx. \quad (7.4.17)$$



Prin calcule simple (folosind schimbarea de variabilă  $y = \omega t - kx \sin \alpha$ ) se obține

$$E = E_0 \frac{\sin\left(\frac{ks}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{kb}{2} \sin \alpha} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{kb \sin \alpha}{2}\right). \quad (7.4.18)$$

Înseamnă că amplitudinea vibrațiilor luminoase în planul focal  $F$  al lenti-  
lei va fi dată de expresia

$$E_\alpha = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \quad (7.4.19)$$

iar intensitatea ( $I_\alpha \sim E_\alpha^2$ )

$$I_\alpha = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}; \quad u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \quad (7.4.20)$$

Se constată astfel, că  $I_\alpha = 0$ , pentru cazurile în care sînt satisfăcute con-  
dițiile:  $\sin \alpha = 0$ ;  $u \neq 0$ , adică

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha_m = m\pi; \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.4.21)$$

și  $I_\alpha = I_{max}$ , pentru cazurile cînd  $dI_\alpha/d\alpha = 0$ , respectiv

$$\operatorname{tg} u = u. \quad (7.4.22)$$

Această ultimă relație reprezintă o ecuație transcendentă și are soluțiile  
(obținute pe cale grafică)

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha_m = 0; \quad 1,43\pi; \quad 2,46\pi; \quad 3,47\pi; \dots \quad (7.4.23)$$

În figura 7.4.6. este reprezentată grafic variația intensității lumi-  
noase  $I_\alpha = f(u)$ . Se obține o imagine de difracție în care franjele întunecate

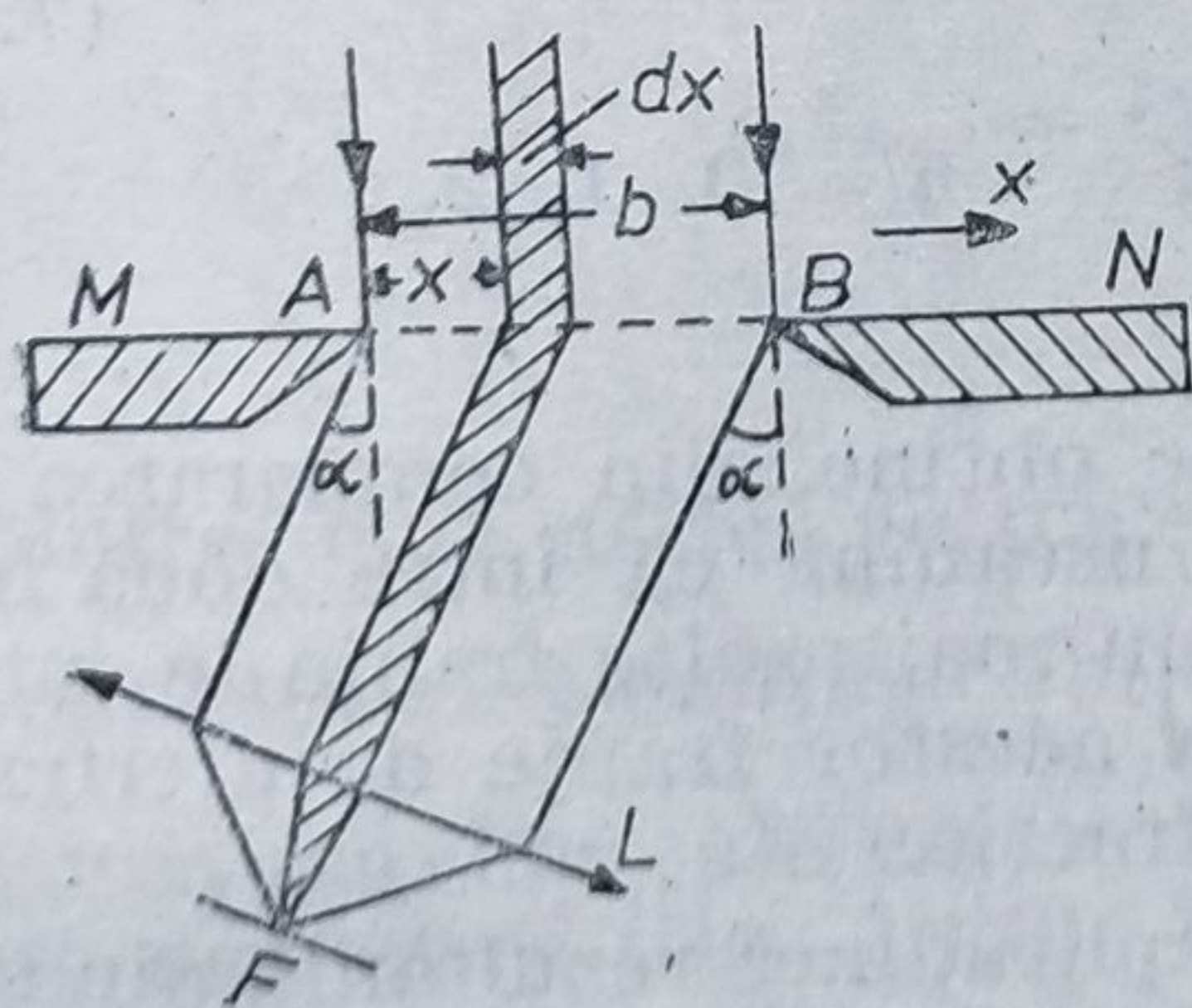


Fig. 7.4.5

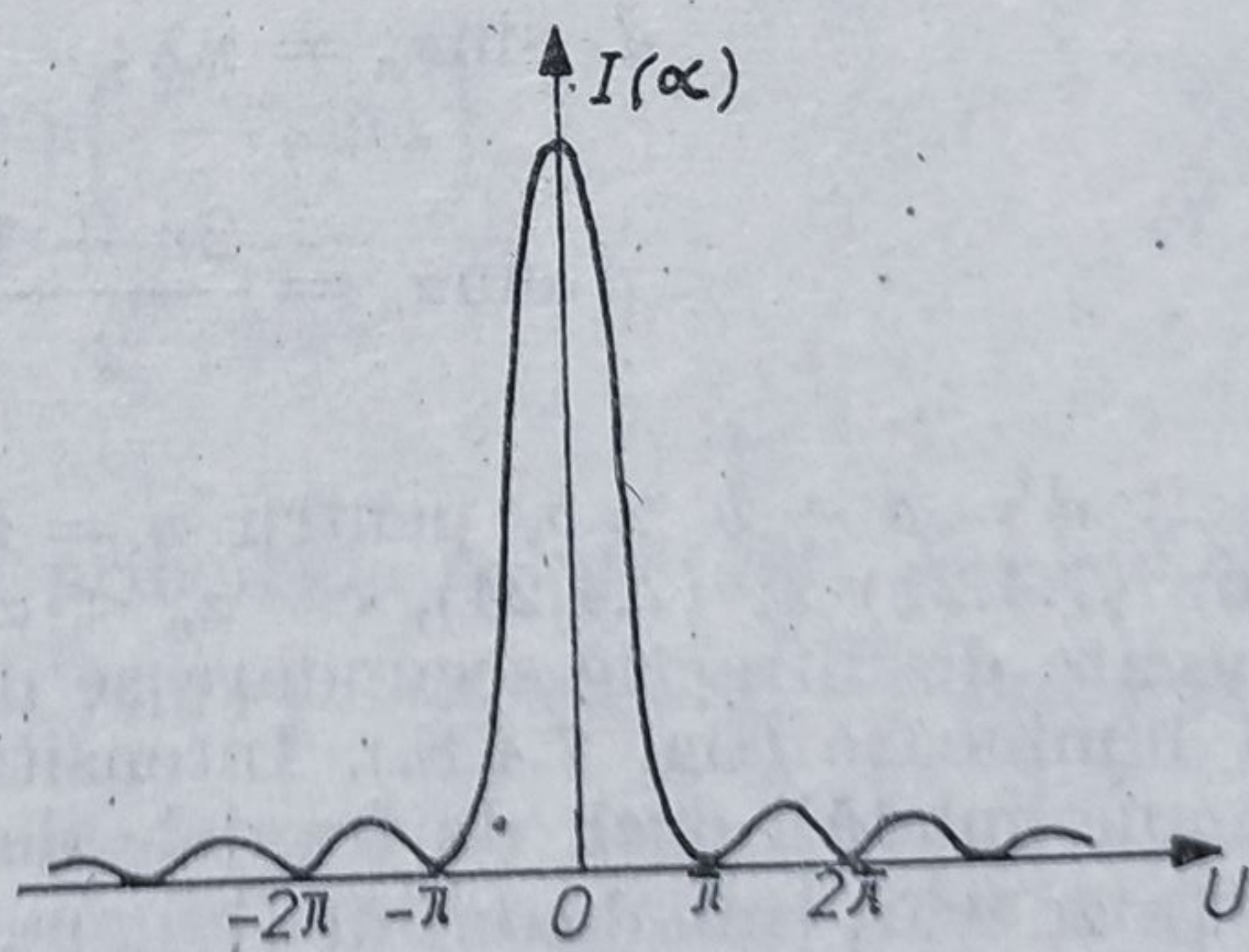


Fig. 7.4.6



sînt echidistante între ele, iar intensitatea celor luminoase scade pronunțat odată cu creșterea lui  $m$ . Acestea se numesc „franje secundare de difracție”.

*Difracția prin două și mai multe fante liniare plane și echidistante. Rețeaua de difracție.* Se remarcă din studiul prezentat mai sus că poziția

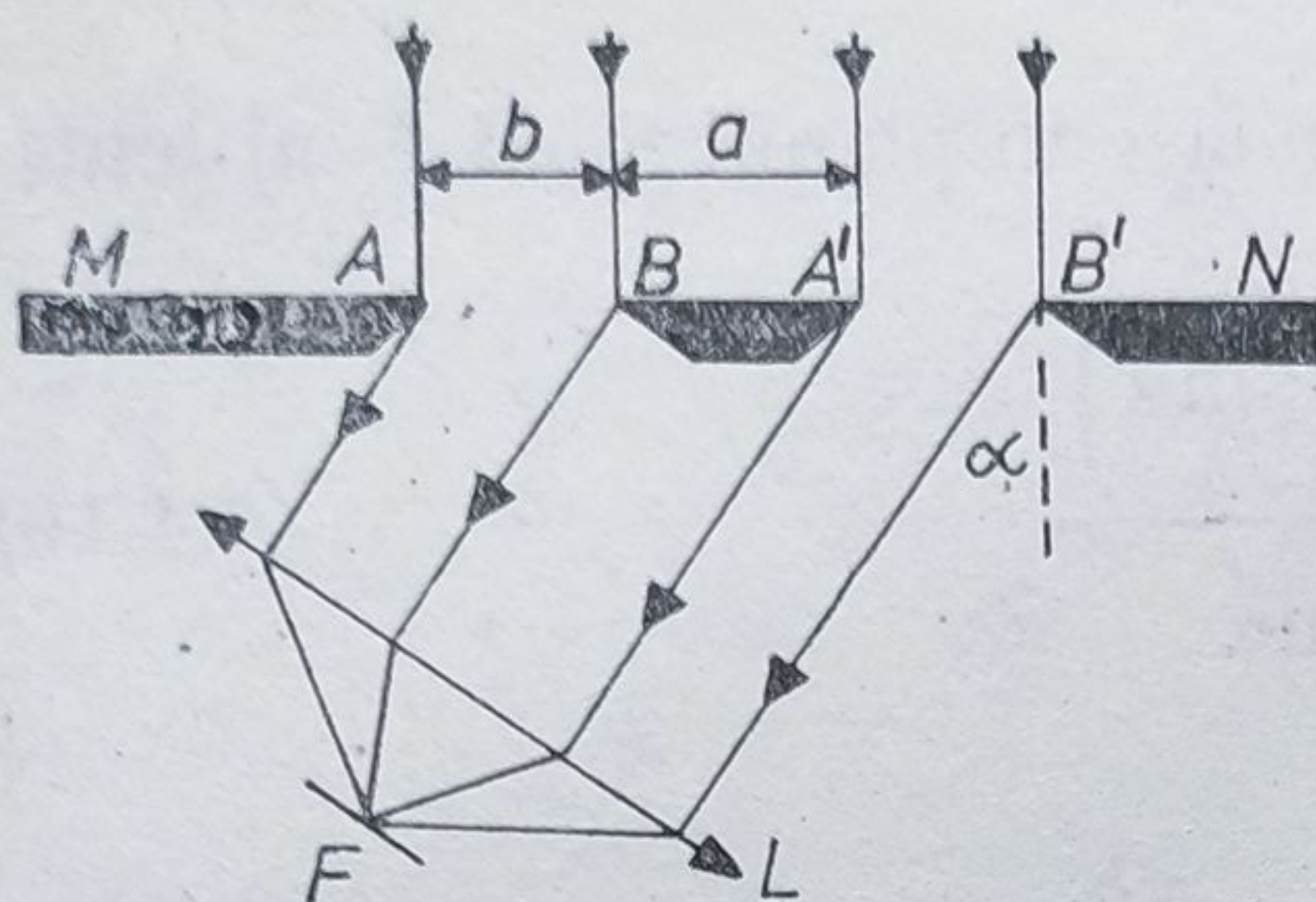


Fig. 7.4.7

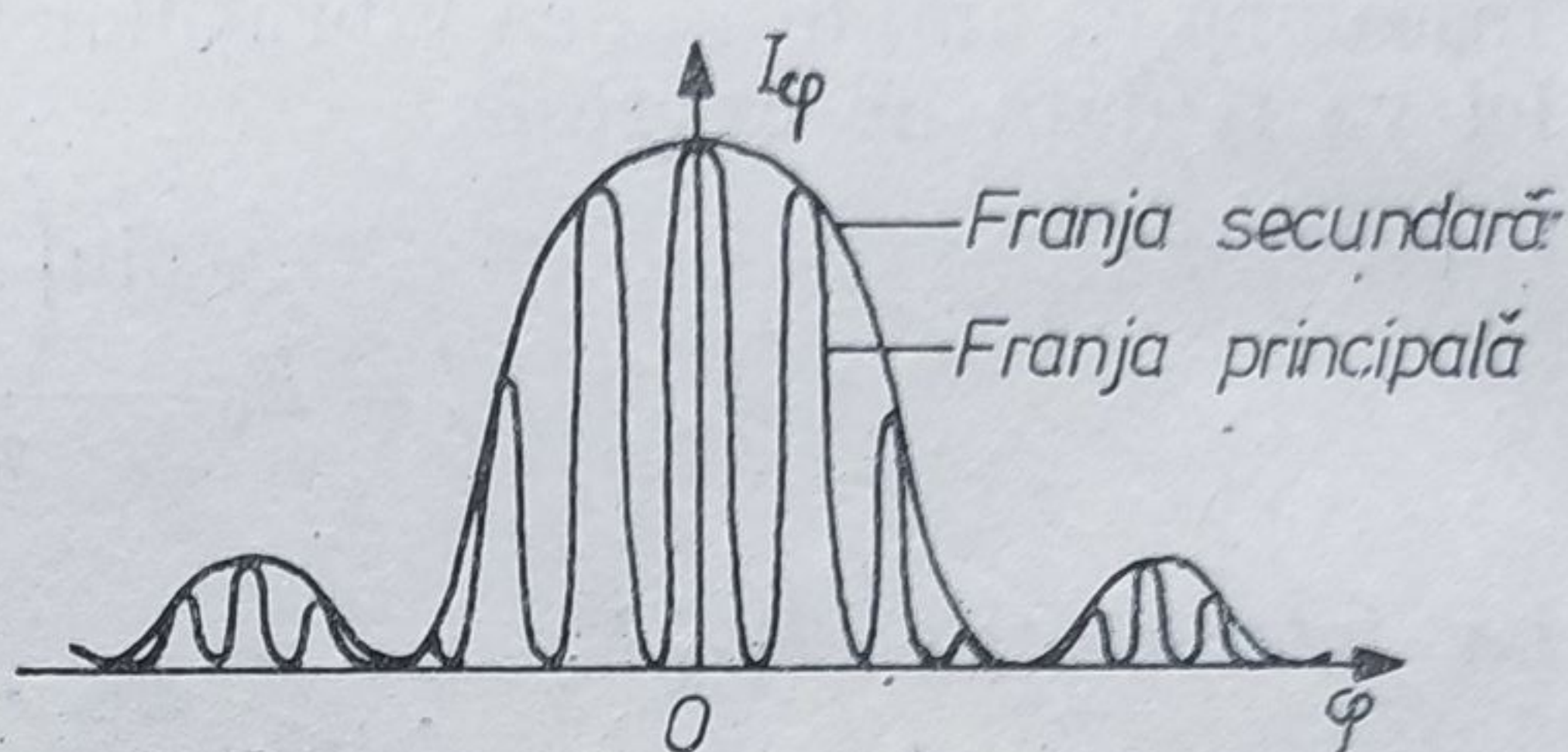


Fig. 7.4.8

franjelor de difracție, în planul focal al lentilei  $L$ , nu depinde de poziția fantei  $AB$  în planul  $MN$ . Aceasta înseamnă că dacă s-ar deplasa fanta  $AB$  în lungul axei  $Ox$ , pozițiile franjelor de difracție în planul  $F'$  ar rămâne aceleași. Pe baza acestei proprietăți au fost realizate rețelele de difracție, care sînt sisteme formate din mai multe fante identice, echidistante între ele.

Pentru a studia imaginea de difracție obținută cu un astfel de sistem este instructiv să analizăm mai întîi cazul în care ecranul  $MN$  conține două fante identice, de lărgime  $b$ , separate între ele printr-un interval opac, de lărgime  $a$ . Se observă (fig. 7.4.7) că în acest caz, în planul focal al lentilei  $L$  se vor obține franjele de difracție secundare, date de către fiecare fantă în parte (suprapuse bineînțelese), dar și franje de lumină datorate interferenței fasciculelor ce trec prin cele două fante. Poziția acestor franje de interferență este dată de condiții de maxim și minim de forma (7.3.12), respectiv de

$$d \cdot \sin \alpha_n = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4.24)$$

$$d \cdot \sin \alpha_n = \frac{2n + 1}{2} \lambda; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Întrucît  $d = a + b > b$ , pentru  $n = m$  se obține, din compararea condițiilor (7.4.21) și (7.4.24), că  $\alpha_n < \alpha_m$ . Înseamnă că între două franje întunecate de difracție secundare se dispun mai multe franje de interferență luminoase (fig. 7.4.8.). Intensitatea acestor franje de interferență va fi „modulată” deci, de franjele de difracție.

În adevăr, ținînd cont de (7.4.19), amplitudinea rezultantă din interferarea celor două fascicule ce provin de la cele două fante vecine va fi



dată de expresia

$$E_{\varphi} = \sqrt{E_{\alpha}^2 + E_{\alpha}^2 + 2E_{\alpha}^2 \cos \varphi} = 2E_{\alpha} \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \quad (7.4.25)$$

respectiv cu (7.4.19) și (7.4.20)

$$I_{\varphi} = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda} \right). \quad (7.4.26)$$

Se poate demonstra ușor [10] că în cazul a  $N$  fante drepte echidistante, practicate într-un ecran plan (rețea de difracție prin transmisie, de constantă  $d = a + b$ ), avem

$$I_{\varphi} = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)}{N \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)} \right]^2 \quad (7.4.27)$$

în care firește, de astă dată  $I_0 \sim (N \cdot E_0)^2$ .

Poziția franjelor luminoase de interferență va fi determinată și în acest caz de condiția ca diferența de drum  $d \sin \alpha$  să fie egală cu un multiplu întreg de lungimi de undă. Deci

$$d \sin \alpha = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4.28)$$

Pentru aceste maxime, numite și „maxime principale”, intensitatea luminoasă va fi dată de relația

$$(I_{\varphi})_{\max} = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2. \quad (7.4.29)$$

Dar, între două astfel de maxime principale se vor găsi  $N-1$  minime, corespunzătoare condiției:  $\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right) = 0$ , cu  $\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right) \neq 0$  și tot atâtea maxime, ale căror intensitate este cu atât mai mică cu cât  $N$  este mai mare (fig. 7.4.9). Întrucât intensitatea maximelor principale este proporțională cu  $N^2$ , iar a celorlalte scade cu creșterea lui  $N$ , înseamnă



că pentru o rețea de difracție formată din multe fante, vizibilitatea  $V$  va avea valori apreciable numai pentru maximele principale de interferență, care formează spectrul de difracție al rețelei.

Primele rețele de tipul celei schițate mai sus (prin transmisie) au fost realizate de către Fraunhofer, iar discipolii săi Rowland și Wood au

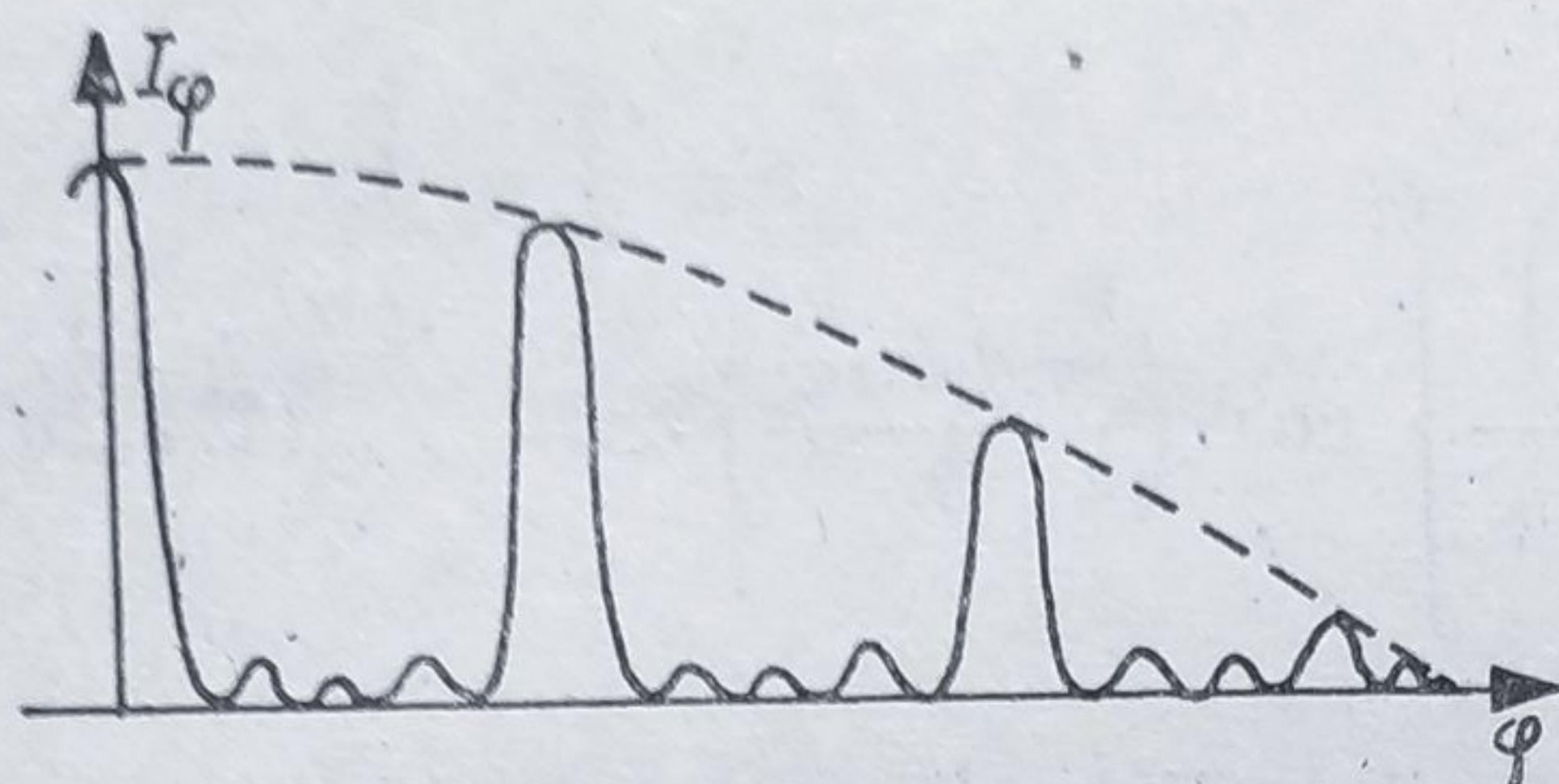


Fig. 7.4.9

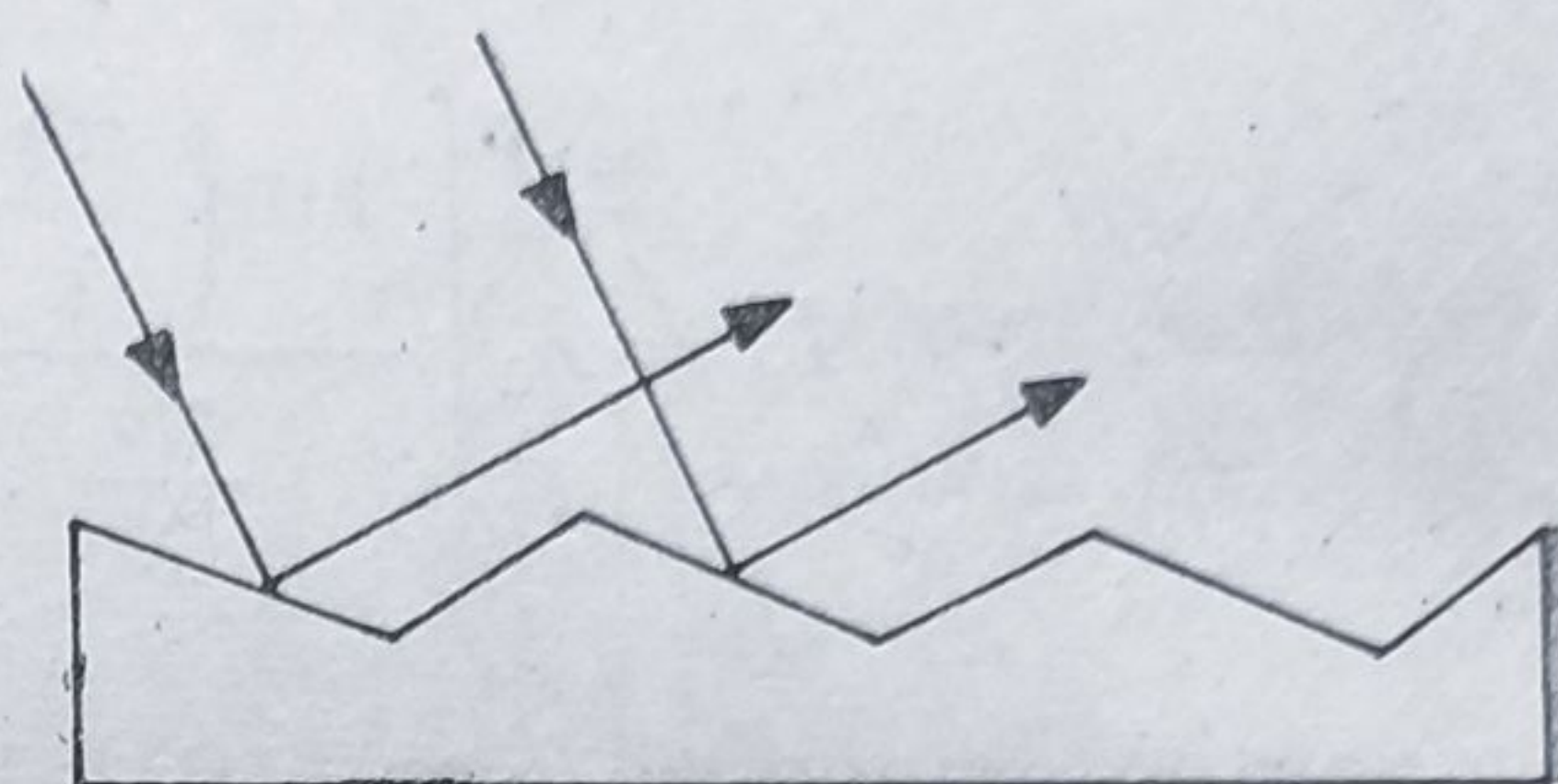


Fig. 7.4.10

ridicat la mare înaltă tehnică de realizare a rețelelor de difracție, ajungându-se la rețele cu  $N = 1200 \div 1700$  fante/mm. Au fost realizate și rețele prin reflexie de pe suprafețe plane sau concave, precum și rețele de fază (sau rețele de profil, vezi fig. 7.4.10), în care fasciculul incident se reflectă pe suprafața dantelată (în dinte de fierăstrău sau în scară) a rețelei. Primele, prezintă avantajul că nu necesită folosirea lentilei  $L$ , iar celelalte, permit mărirea intensității franjelor de difracție a unor ordine superioare ( $m > 1$ ), ceea ce are mare însemnătate în măsurătorile de lungimi de undă  $\lambda$ .

În adevăr, se constată ușor că puterea de separare  $\Delta\lambda$  a două franje (linii) corespunzătoare lungimilor de undă  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  crește odată cu ordinul  $n$  al spectrului. Dacă se admite că cele două radiații se disting între ele atunci când un maxim de ordinul  $n$  al radiației  $\lambda_1$  se suprapune cu minimul de ordin  $n + 1$  al radiației  $\lambda_2$  atunci, pentru o rețea cu  $N$  fante pe unitatea de lungime se poate scrie:

$$d \sin \alpha_1 = n\lambda_1; \quad d \sin \alpha_2 = n\lambda_2 \quad \text{pentru maxim}$$

$$d \sin \alpha_2 = n\lambda_2 + \lambda_2/N \quad \text{pentru minim.}$$

Rezultă

$$n\lambda_1 = n\lambda_2 + \lambda_2/N$$

respectiv, pentru puterea de rezoluție  $r$  (vezi (7.3.38))

$$r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN. \quad (7.4.30)$$

Acest rezultat arată că, cu ajutorul unei rețele cu  $N = 10^4$  fante/mm, s-ar obține în spectrul de ordinul trei ( $n = 3$ ) o rezolvare a liniilor cu



$\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$ , care nu diferă între ele cu mai mult de  $0,02 \text{ \AA}$  ( $\lambda/\Delta\lambda = nN = 10^5$ ). De aceea, rețelele de difracție se folosesc ca elemente „dispersive” în spectroscopie optice.

c) **Difracția radiațiilor X.** Acest tip de difracție a început să fie studiat după ce în anul 1912 Max von Laue propune metoda difracției radiațiilor X pe structuri cristaline naturale, ca pe o metodă care să ateste natura ondulatorie (electromagnetică) a acestor radiații. Experiențele efectuate au dovedit într-adevăr acest lucru, dar metoda difracției radiațiilor X a rămas ca o eficiență cale de investigare a simetriilor interioare ale structurilor cristaline. De aceea, studiul difracției radiațiilor X (radiații electromagnetice cu  $\lambda = 0,3 \div 300 \text{ \AA}$ ) prezintă nu numai o importanță principială, ci și una practică. Dar un astfel de studiu se poate aborda prin analogie cu difracția luminii pe rețele, aici rolul rețelei de difracție jucându-l rețeaua cristalină (pentru detalii, vezi vol. II al prezentei lucrări).

În figura 7.4.11 este prezentată o celulă dintr-o astfel de rețea (colțurile celulei fiind nodurile rețelei) și două raze  $I_1$  și  $I_2$  care se difractă pe nodurile  $O$  și  $O'$  ale acesteia. Dacă prin  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{e}_2$  se notează versorii razelor incidente, respectiv a celor difractate și prin  $\mathbf{r} = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}$  vectorul de poziție al nodului  $O'$  în raport cu  $O$  ( $n_1, n_2, n_3$  fiind în general trei numere întregi, egale cu 1 în cazul de față, iar  $a, b, c$  constantele rețelei), atunci se vede că „diferența de drum” dintre cele două raze  $I_1$  și  $I_2$  va fi dată de

$$\Delta = OB - O'A = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \quad (7.4.31)$$

Acestei diferențe de drum îi va corespunde o diferență de fază

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) \quad (7.4.32)$$

și prin analogie cu condiția (7.3.12), se vor obține maxime pentru

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) = 2\pi n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

respectiv

$$\varphi_a = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) = 2\pi h; \quad \varphi_b = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) = 2\pi k; \quad \varphi_c = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) = 2\pi l \quad (7.4.33)$$

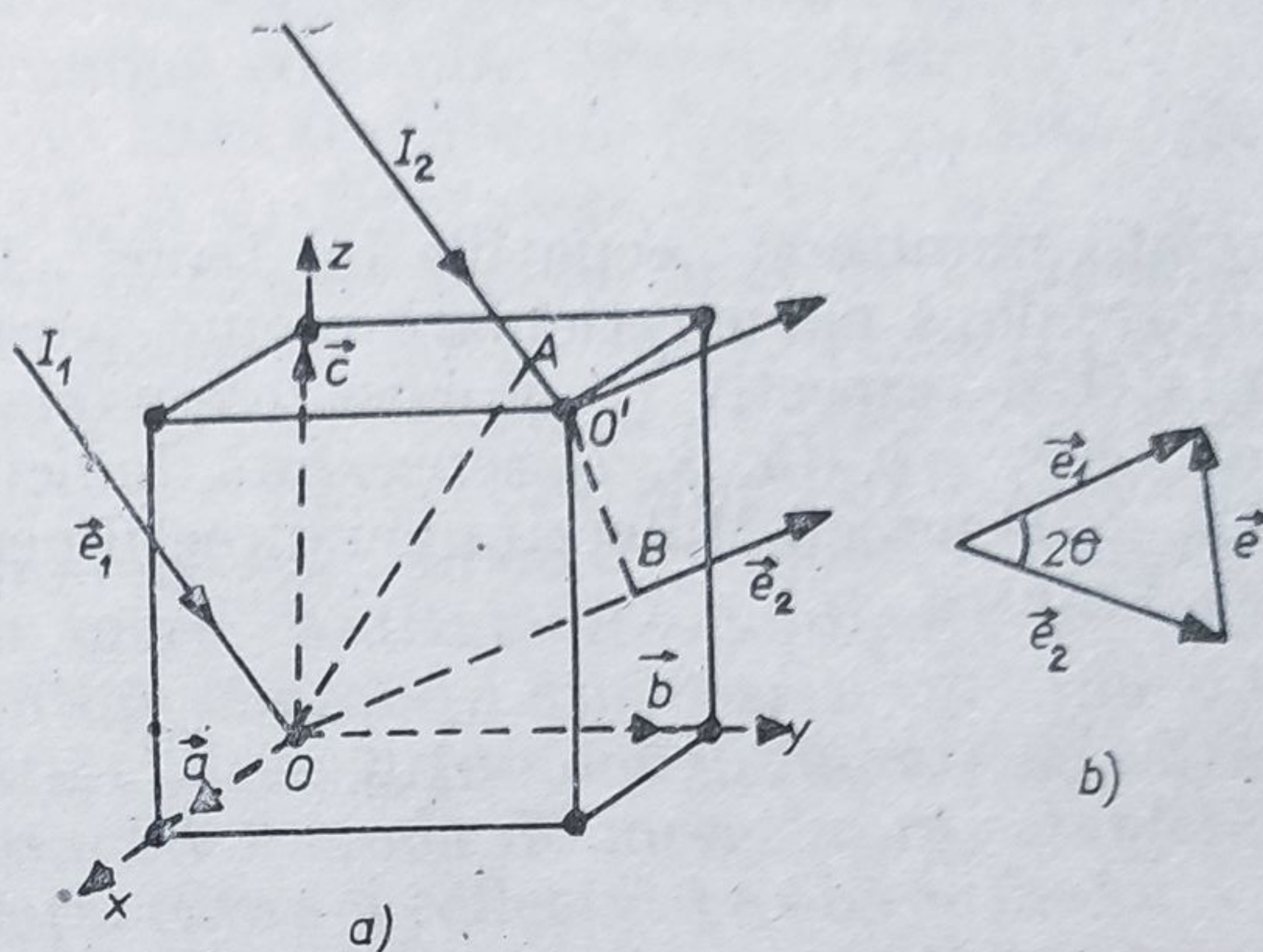


Fig. 7.4.11



unde  $(h, k, l)$  sînt trei numere întregi (numite indici Miller ai direcției  $\mathbf{r}$ ). Notînd cu  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  cosinușii directori ai versorului  $\mathbf{e}$  față de axele cristalografice  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  și cu  $2\theta$ , unghiul dintre  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{e}_2$  (fig. 7.4.1, b), atunci putem scrie

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 2a\alpha \sin\theta = h\lambda; \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = 2b\beta \sin\theta = k\lambda; \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 2c\gamma \sin\theta = l\lambda \quad (7.4.34)$$

relații numite și „ecuațiile lui Laue”. Dacă se notează prin  $d_{(hkl)}$  distanța dintre două plane reticulare vecine, paralele între ele, care conțin și nodurile  $O$  și respectiv  $O'$  și care taie axele cristaline în puncte de coordonate  $a/k$ ,  $b/k$ ,  $c/k$  ( $(h, k, l)$  reprezintă indicii Miller ai planului respectiv, iar  $[h, k, l]$  indicii Miller ai unei direcții perpendiculare pe acest plan), atunci se vede că

$$d_{(hkl)} = \frac{a\alpha}{h} = \frac{b\beta}{k} = \frac{c\gamma}{l} \quad (7.4.35)$$

ceea ce înseamnă că expresiile (7.4.34), împreună cu (7.4.32), pot fi reduse la forma

$$2d_{(hkl)}\sin\theta = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4.36)$$

Această relație este cunoscută sub denumirea de „formula lui Bragg”. Întrucît cosinușii directori  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  satisfac condiția evidentă

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (7.4.37)$$

atunci

$$d_{(hkl)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}} \quad (7.4.38)$$

și deci condiția de maxim (7.4.36) primește forma

$$2\sin\theta = \lambda n \sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4.39)$$

Pentru o anumită lungime de undă  $\lambda$  și o anumită direcție incidentă a radiațiilor  $X$ , relația (7.4.39) determină direcția în care se formează maximele de difracție pe diverse plane reticulare  $(hkl)$ . Pe un ecran fluorescent (sau placă fotografică) se va capta o imagine de difracție (lauegramă), formată dintr-un sistem de puncte (pete) așezate într-o anumită simetrie, corespunzătoare simetriei structurii cristaline respective. De notat că și lungimea de undă  $\lambda$  trebuie să satisfacă o anumită condiție, care se obține din (7.4.36)



deoarece  $\sin \theta \leq 1$ ;  $1/n \leq 1$  și  $d \leq a$  ( $a$  fiind cea mai mare valoare dintre constantele cristalinografice  $a$ ,  $b$  și  $c$ ). Această condiție este

$$\lambda \leq 2a. \quad (7.4.40)$$

**d) Noțiuni de holografie.** Holografia este o metodă interesantă de înregistrare și apoi de reconstituire a imaginilor optice ale obiectelor, bazată pe difracția fasciculelor de lumină coerentă. Această metodă a fost propusă de către Denis Gábor în anul 1948 și realizată practic cu fascicule laser în anul 1962 de către E. Leith și J. Upatnieks.

Principiul holografiei constă în utilizarea a două fascicule de lumină coerente, unul reflectat pe o oglindă plană  $O_1$ , iar celălalt difractat pe conturul obiectului  $O_2$  (fig. 7.4.12), care prin suprapunere interferează cu producerea de franje de interferență. Aceste franje sînt înregistrate pe placa fotografică  $E$ , obținîndu-se astfel o *hologramă*, adică o complicată imagine de interferență, care va deține o mare cantitate de informație despre obiect, pentru că holograma va conține informații atît despre variațiile de fază, cît și despre cele ale intensității undelor de lumină difractate de către obiect. De aceea, holografia reprezintă o metodă de înregistrare completă a informației pe care o poartă radiația care s-a reflectat pe obiect (holos = întreg, graphos = înregistrare, în greaca veche). Am putea spune că spre deosebire de fotografia obișnuită, care ne dă informații numai asupra variațiilor intensității undelor luminoase reflectate de către obiect, holograma conține și informații asupra fazelor acestor unde. Toate aceste informații pot fi valorificate prin reconstituirea imaginii obiectului cu ajutorul hologramei. În acest scop, holograma se expune în calea unui fascicul paralel de radiații monocromatice (raze laser) care se va difracta pe imaginea de interferență înregistrată în hologramă și va reconstitui „în relief” imaginea obiectului (fig. 7.4.13). În realitate, lentila convergentă  $L$  suprapune razele fascicului transmis de către hologramă, în așa fel încît acestea reproduc forma (imaginea) spațială a obiectului. Se poate demonstra că se for-

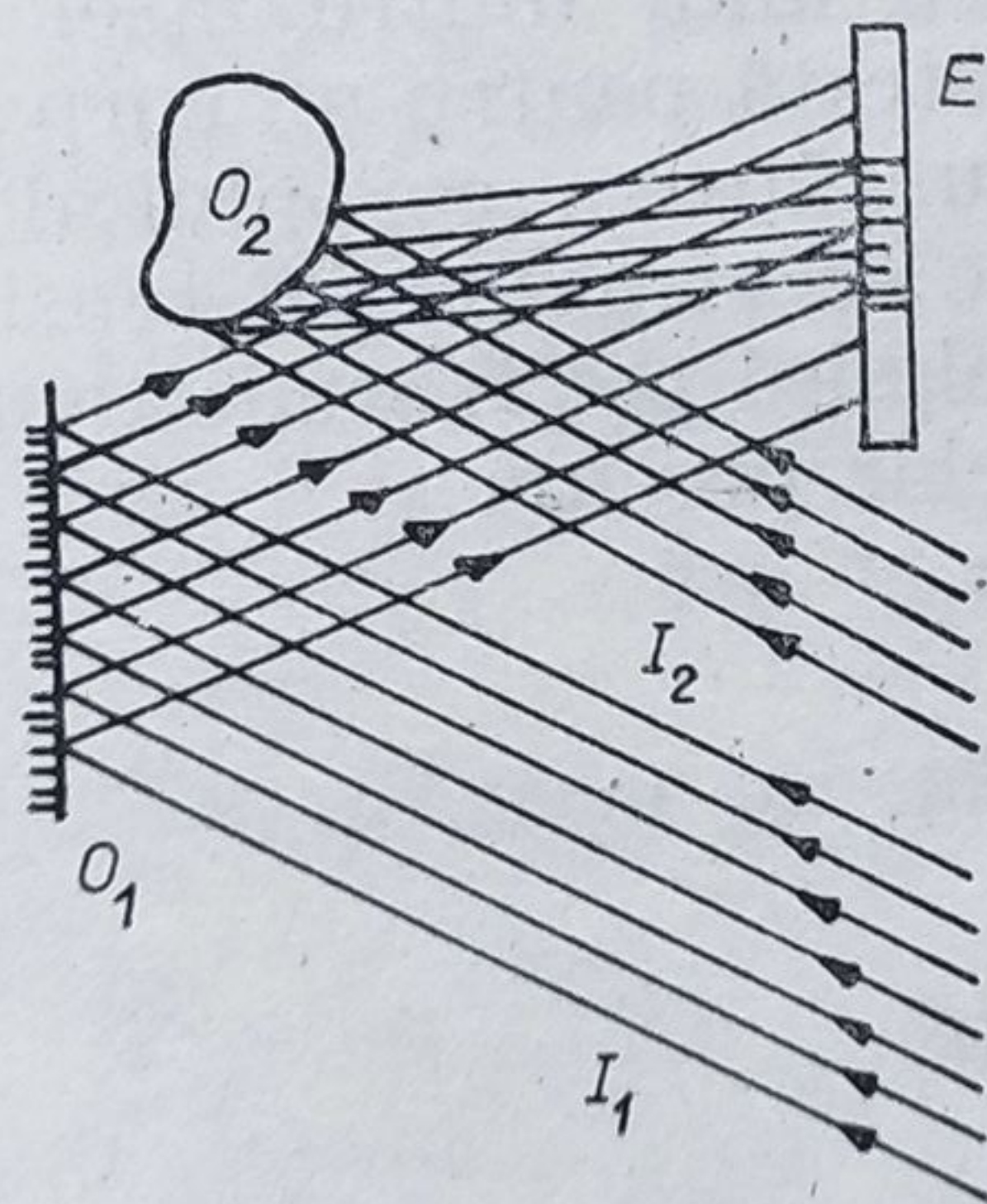


Fig. 7.4.12

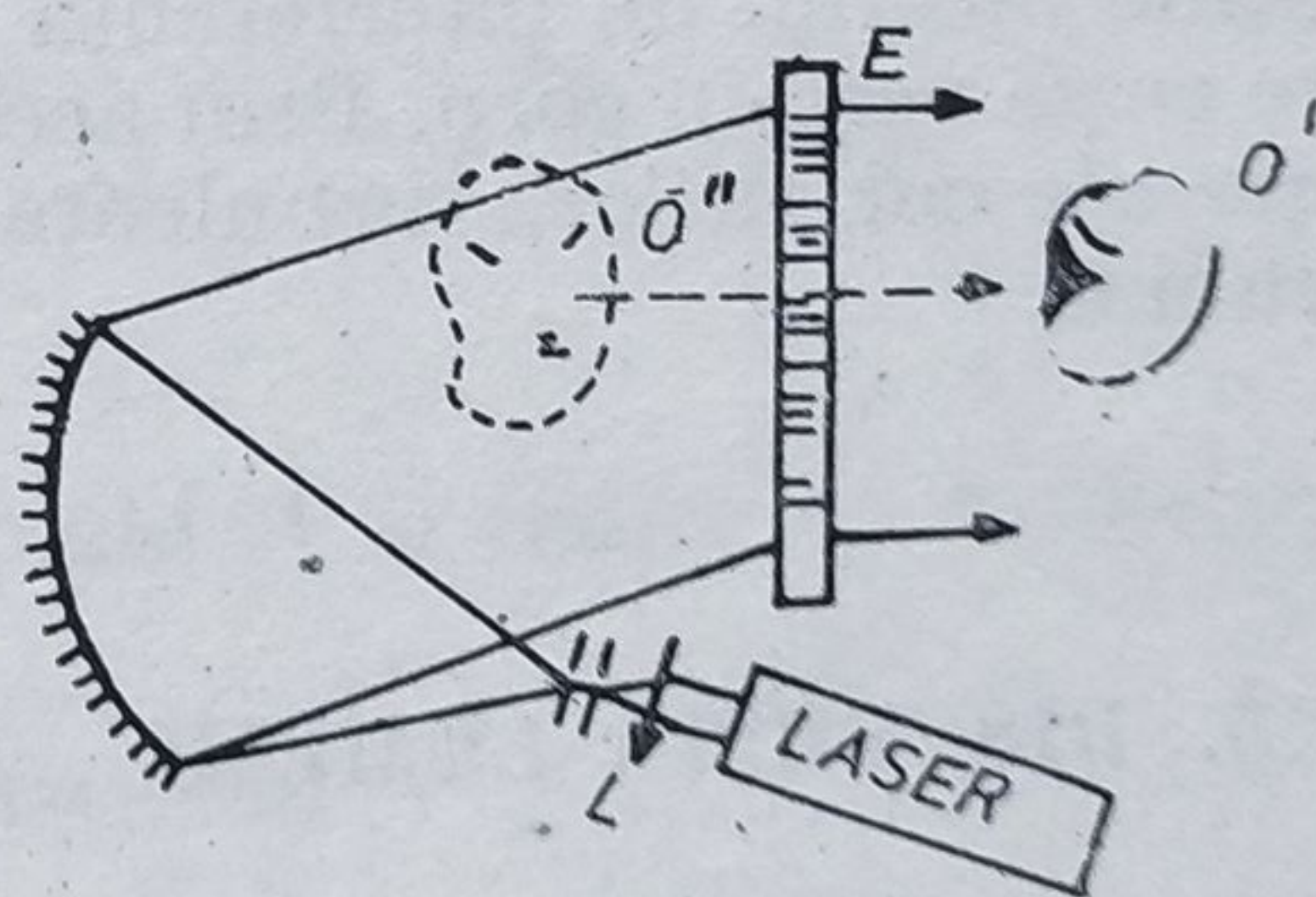


Fig. 7.4.13

mează atît o imagine reală  $O'$ , cît și una virtuală  $O''$ , iar pentru a putea fi observate (fără a se interpune una în fața celeilalte) Leith și Upatnieks înregistrează holograme cu fascicule ce cad oblic pe placa  $E$ . Aceste fasci-



cule sînt obținute de la aceeași sursă laser, prin despărțirea fasciculului incident în cele două fascicule  $I_1$  și  $I_2$ .

Astăzi holografia reprezintă o tehnică proprie pentru înmagazinarea, păstrarea și redarea unei mari cantități de informație, pentru că fiecare

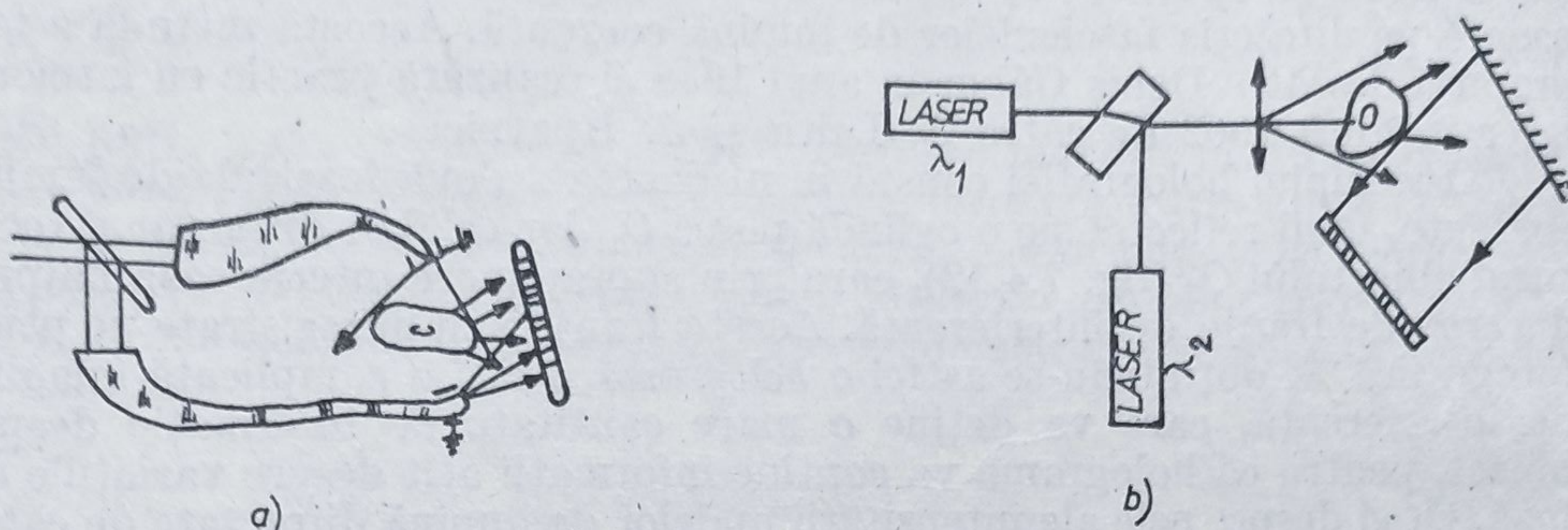


Fig. 7.4.14

parte din hologramă conține informații complete despre obiect. Au fost realizate o mare varietate de aranjamente experimentale pentru a obține holograme atât în lumină monocromatică, cât și holograme color. În figura 7.4.14 sînt schițate două astfel de montaje. În primul montaj se obține o hologramă monocromatică, cele două fascicule laser putînd fi conduse prin tuburi de sticlă, care reprezintă de fapt niște „conductoare de lumină”, iar în cel de al doilea se folosesc două fascicule laser cu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , care vor da o hologramă cu posibilități de reconstituire a imaginii colorate a obiectului.

De notat că metoda holografică poate fi utilizată cu succes în studiul unor procese și fenomene de importanță tehnică. De exemplu, folosind metoda interferometriei holografice, în care unul dintre fasciculele de lumină este trecut printr-o hologramă înregistrată pentru un corp nedefor-  
mat, iar al doilea prin holograma corespunzătoare corpului deformat, se vor obține imagini de interferență în care se vizualizează tensiunile de deformare ce se nasc în corp. Prin această tehnică pot fi studiate mișcările de vibrație ale corpurilor, turbulența fluidelor precum și o serie de alte procese rapide.

## § 7.5. DISPERSIA LUMINII

Dispersia luminii apare în așa numitele medii dispersive în care viteza de propagare a luminii depinde de lungimea ei de undă  $\lambda$ . Așa cum se știe, fenomenul de dispersie a luminii a fost descoperit de către Newton, la trecerea unui fascicul de lumină albă prin două prisme de sticlă încruci-



șate și a stat la baza teoriei newtoniene a culorilor. Potrivit acestei teorii, fiecare radiație luminoasă monocromatică produce senzații de culoare diferite, funcție de lungimea ei de undă  $\lambda$ . Au fost definite șapte culori de bază care formează spectrul *rogvaiv* (roșu, oranj, galben, verde, albastru, indigo și violet), un corp putînd apărea colorat prin reflexie sau transmisie, după cum este reflectată sau transmisă selectiv radiația cu o anumită lungime de undă  $\lambda$  (culorile fiind în acest caz complementare).

Mai tîrziu Cauchy stabilește că pentru mediile dispersive normale indicele de refracție depinde de lungimea de undă conform relației

$$n_{\lambda}^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (7.5.1)$$

cunoscută sub denumirea de „formula lui Cauchy”. În această formulă,  $A$  și  $B$  sînt două constante specifice mediului dispersiv respectiv ( $A > B$ ).

Prin urmare, un mediu optic cu dispersie normală este caracterizabil printr-un indice de refracție a cărui valoare scade odată cu creșterea lui  $\lambda$ . Această variație reprezintă curba de dispersie (fig. 7.5.1, a). Ulterior s-a constatat că există și substanțe (cum sînt soluțiile de iod, cianină, fuxină etc.) pentru care curbele de dispersie posedă maxime și minime (fig. 7.5.1, b). Aceste cazuri de dispersie au fost numite „anomale”.

De notat că în caracterizarea cantitativă a fenomenului de dispersie se folosesc cîteva mărimi ce intervin la dispersia razelor de lumină printr-o prismă optică (fig. 7.5.2). Astfel, avîndu-se în vedere că deviația minimă

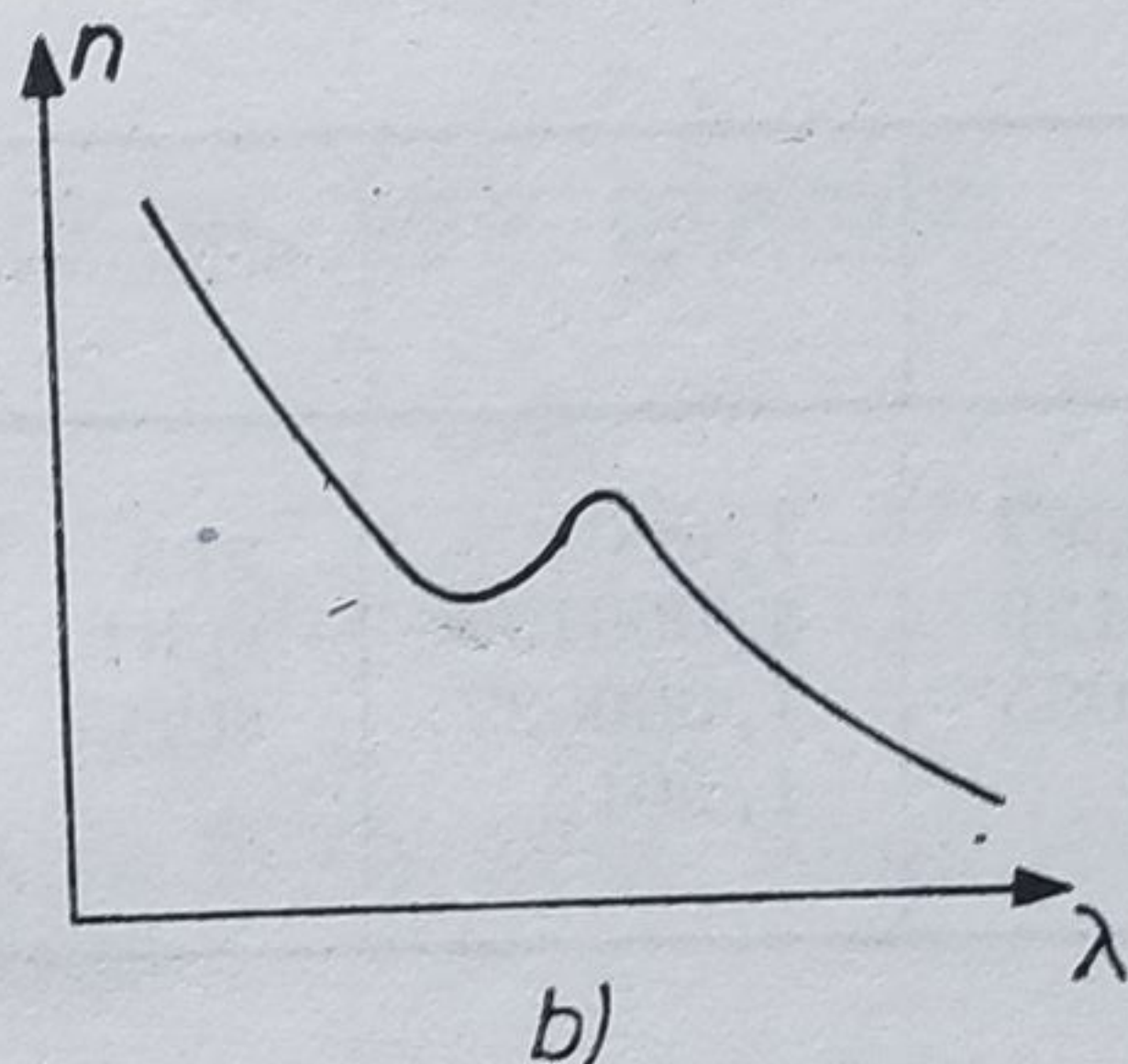
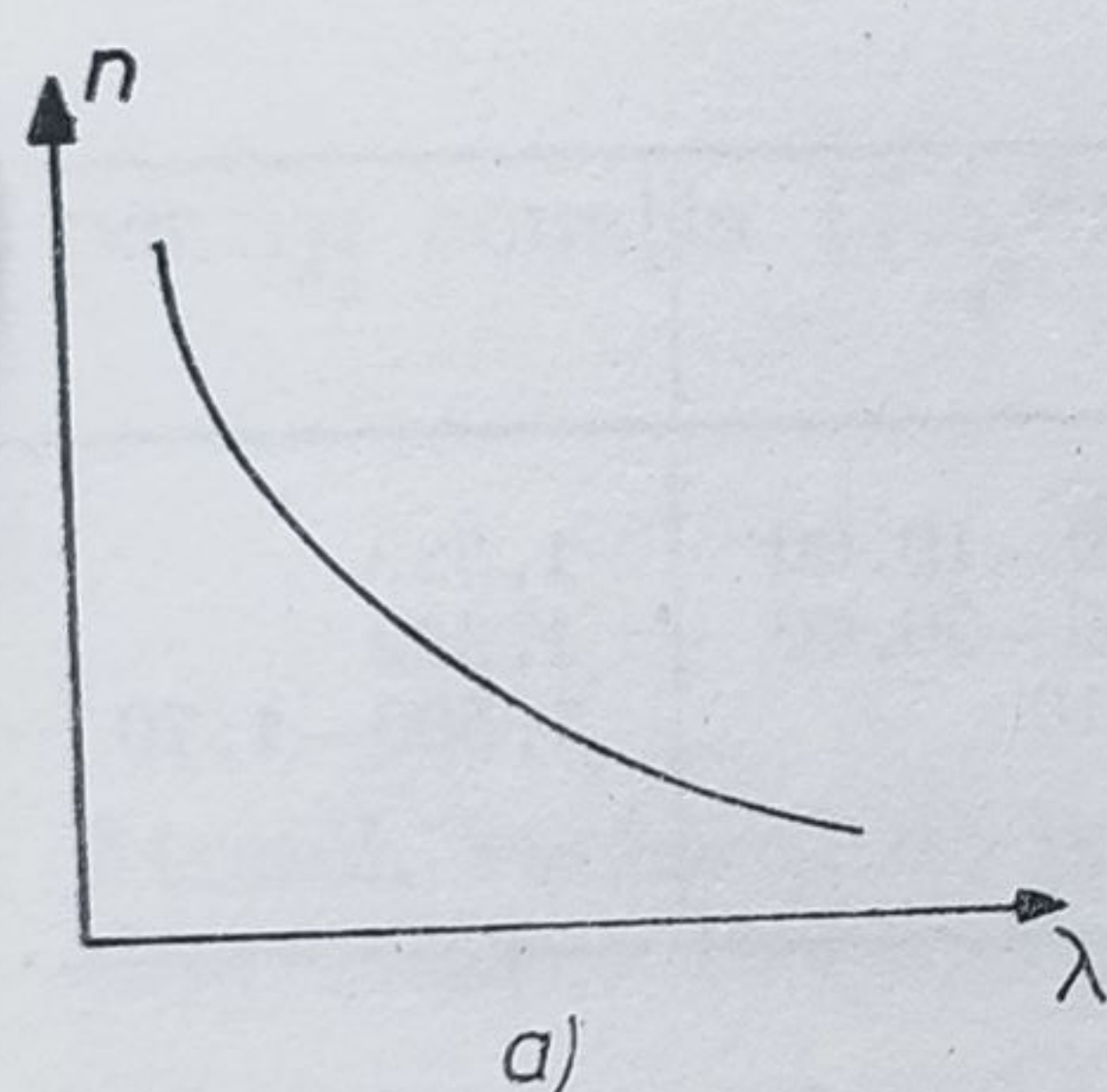


Fig. 7.5.1

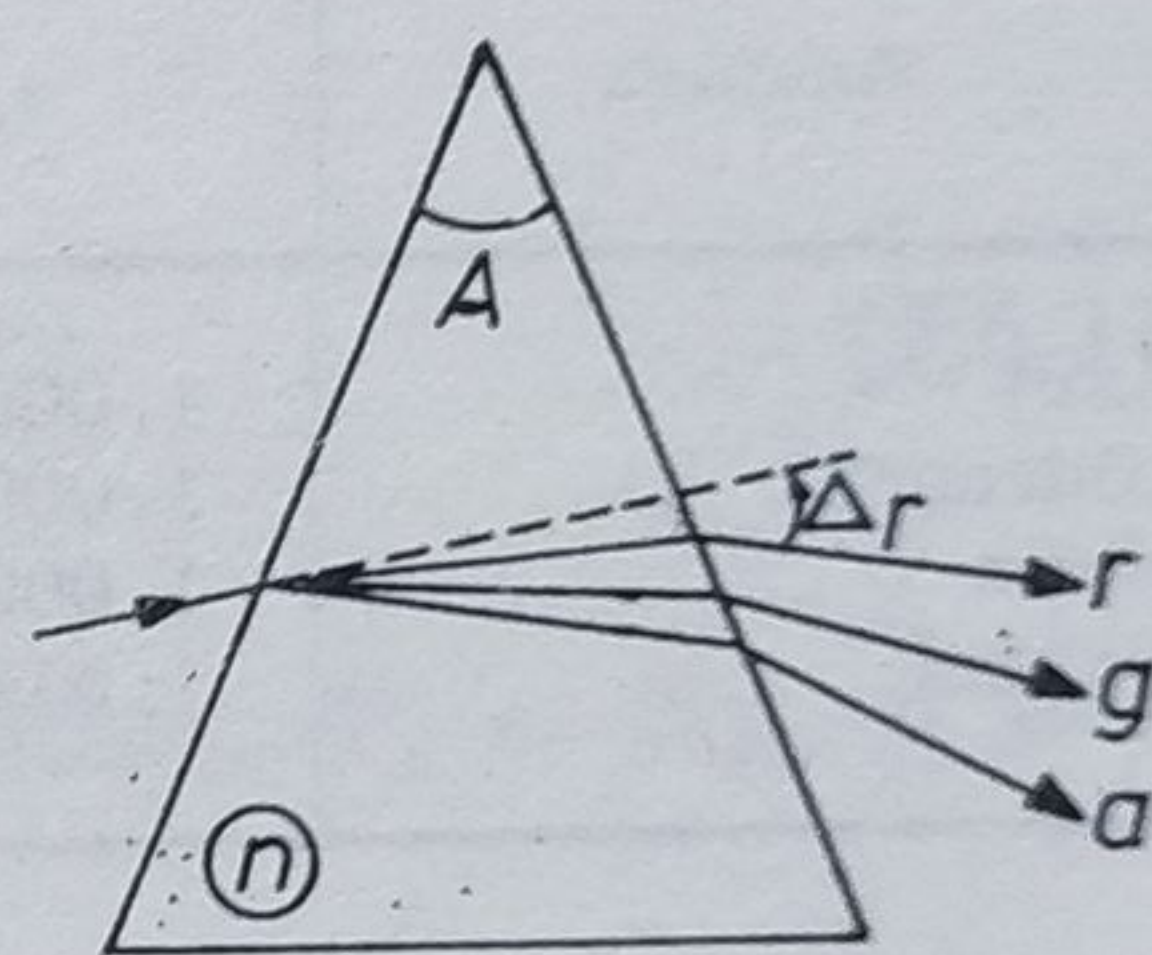


Fig. 7.5.2

$\Delta_m$  a unei raze printr-o prismă de unghi  $A$  și indice de refracție  $n$  este dată de

$$\Delta_m = A(n - 1) \quad [(7.5.2)]$$

s-a definit puterea de dispersie  $P$  prin formula

$$P = \frac{\Delta_F - \Delta_C}{\Delta_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (7.5.3)$$



în care  $n_F$ ,  $n_C$ ,  $n_D$  sînt indici de refracție absoluți ai prisme, corespunzători radiațiilor cu  $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$ ;  $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$  (din spectrul hidrogenului) și  $\lambda_D = 5893 \text{ \AA}$  (din spectrul natriului).

Inversul puterii de dispersie

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (7.5.4)$$

reprezintă „numărul lui Abbe”, putînd fi determinat experimental cu ajutorul refractometrelor. Funcție de valorile pe care le au aceste mărimi, sticlele optice au fost împărțite în două clase: *sticle crown* sau sticle slab dispersive ( $\nu = 50 \div 60$ ;  $P = 0,02$ ;  $n_D = 1,3 \div 1,7$ ) și *sticle flint* sau puternic dispersive ( $\nu = 30 \div 40$ ;  $P \simeq 0,033$ ;  $n_D = 1,7 \div 1,9$ ).

Pentru explicarea proprietăților dispersive ale mediilor optice în cadrul teoriei electromagnetice a luminii s-a folosit legea care leagă indicii de refracție de constantele electromagnetice de material  $\epsilon$  și  $\mu$ , adică formula (6.10.39). Pentru medii nemagnetice ( $\mu_r = 1$ ), această relație se reduce la forma

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (7.5.5)$$

și permite obținerea unor valori corecte pentru  $n$ , din valorile constantei dielectrice relative  $\epsilon_r$  pentru o serie de substanțe (vezi tabelul de mai jos), dar nu pentru toate. La apă, spirt și o serie de corpuri solide cum sînt sticlele optice, se vede că  $n^2 < \epsilon_r$

Substanța	$\epsilon_r$	$n^2$	Substanța	$\epsilon_r$	$n^2$
Azot	1,000307	1,000299	apă	78,00—10,00	1,333
Hidrogen	1,000139	1,000139	spirt	25,00—20,00	1,362
Helium	1,000035	1,000037	sticlă	4—10	1,500—1,70
Benzol	1,511	1,501			

Explicarea acestor diferențe, inclusiv a fenomenelor de dispersie normală și anomală s-a putut face în cadrul unei „teorii electronice” a propagării undelor de lumină prin diverse medii. Drude și Lorentz, de exemplu, dezvoltă această teorie pentru mediile dielectrice, plecînd de la următoarele premise: mediile optice dielectrice nemagnetice se polarizează în prezența undelor de lumină, datorită acțiunii vectorului optic  $E$  al unde care antrenează electronii din mediu (electronii legați în cadrul atomilor sau a moleculelor) într-o mișcare de oscilație. Această polarizare determină o modificare constantei dielectrice  $\epsilon_r$  și deci și indicelui de refracție  $n$ .

Pentru a arăta că intervin variații care depind de lungimea de undă, se va admite că unda de lumină este monocromatică, vectorul ei electric



variind armonic în timp

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (7.5.6)$$

Prin urmare, electronii din mediu vor fi antrenati într-o mișcare oscilatorie armonică în jurul pozițiilor de echilibru (ale atomilor sau moleculelor), aceste mișcări generând dipoli elementari oscilanți de forma

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}. \quad (7.5.7)$$

Amplitudinea  $\mathbf{p}_0$  a acestor dipoli este determinată de forțele ce acționează asupra electronilor în cursul mișcării, respectiv de forța electrică  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}$ , de forța elastică  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$  și de forța de frecare  $\mathbf{F}_f = -\delta\dot{\mathbf{x}}$ . Se va obține o ecuație de mișcare de forma

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} - k\mathbf{x} \quad \text{dacă } \mathbf{F}_f \simeq 0 \quad (7.5.8)$$

respectiv

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (7.5.9)$$

unde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  reprezintă pulsația proprie de oscilație a electronilor. Cu o soluție de forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t} \quad (7.5.10)$$

pentru ecuația (7.5.9), se obține ușor expresia

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m_0(\omega_0^2 - \omega^2)} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t} \quad (7.5.11)$$

Atunci, vectorul de polarizație  $\mathbf{P}$  va avea amplitudinea  $\mathbf{P}_0 = N\mathbf{p}_0$  și folosind relația (6.6.129), rezultă

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{P_0}{\epsilon_0 E_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}. \quad (7.5.12)$$

Aici  $N_j$  reprezintă numărul de electroni pe atom (moleculă) aflați în starea  $j$ . Admițând că pentru mediile dispersive normale  $\omega_j \gg \omega$ , se poate scrie

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right) \simeq 1 + \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} + \frac{\omega^4}{\omega_{0j}^4} + \dots \right) \quad (7.5.13)$$



care, cu  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , trece într-o relație de tip Cauchy generalizată

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (7.5.14)$$

Calcululele de mai sus au fost efectuate în aproximația în care [cîmpul Lorentz  $\mathbf{E}_L = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$  (vezi § 6.6.4) poate fi neglijat în comparație cu cîmpul electric  $\mathbf{E}$  al undei luminoase. În general, însă, cînd această aproximație nu este valabilă, ecuația (7.5.9) trebuie înlocuită cu

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}} + m_0 \omega_0^2 \mathbf{x} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (7.5.15)$$

și prin calcule analoge celor efectuate în § 6.6.5, se obține o lege de dispersie de forma

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}. \quad (7.5.16)$$

De remarcat că pentru un mediu optic de masă molară  $M$  și densitatea  $\rho$ , întrucît  $N = N_A \rho / M$ , pentru  $\omega = \text{const.}$  se poate scrie

$$R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho N_A} = rM. \quad (7.5.17)$$

Mărimea  $R$  se numește *refracție molară*, iar relația (7.5.17) este cunoscută sub numele de *formula lui Lorentz*. Refracția molară este o mărime aditivă ( $R = \sum_j x_j r_j$ ;  $x_j$  fiind fracțiile molare ale componentelor), așa încît determinarea ei oferă informații asupra compoziției mediului respectiv.

Din studiul prezentat mai sus se poate intui că dispersia anomală apare în acele medii pentru care  $\omega_0 \simeq \omega$ . În aceste condiții, se vor obține rezonanțe însoțite de absorbție. Absorbția este dată de forțele de frecare  $\mathbf{F}_f = -\delta \dot{\mathbf{x}}$ , ce intervin. În aceste condiții, ecuația de mișcare a electronului ia forma

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E} \quad (7.5.18)$$

iar pentru indicele de refracție se obține o expresie complexă de forma (vezi și § 6.6.5)

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2 + i\gamma_j \omega - \omega^2} \quad (7.5.19)$$



unde s-a notat  $n_0^2 = 1$  pentru vid. Folosind, pentru domenii de frecvențe restrânse (în jurul lui  $\omega_{0j}$ ), aproximația

$$\omega_{0j}^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_{0j}(\omega_{0j} - \omega) \quad (7.5.20)$$

și separînd în (7.5.19) părțile reale  $n_r$  și imaginare  $n_i$  ale indicelui de refracție, se obțin expresiile

$$n_r = \text{Re}\{\tilde{n}\} = \left[ \sum_j \frac{Ne^2}{2m_0 \varepsilon_0 \omega_{0j}} \cdot \frac{N_j}{4(\omega_{0j} - \omega)^2 + \gamma_j^2} \right]^{1/2} \quad (7.5.21)$$

și

$$n_i = \text{Im}\{\tilde{n}\} = \left[ 1 + \sum_j \frac{Ne^2}{m_0 \varepsilon_0 \omega_{0j}} \cdot \frac{N_j(\omega_{0j} - \omega)}{4(\omega_{0j} - \omega)^2 + \gamma_j^2} \right]^{1/2}. \quad (7.5.22)$$

Reprezentarea grafică a acestor funcții este dată în figura 7.5.3 și se vede că  $n_i(\omega)$  descrie fenomenul de dispersie anomală, în timp ce  $n_r(\omega)$  descrie o absorbție de rezonanță.

Studiul de mai sus poate fi extins și asupra mediilor conductoare, în care caz răspunzători de fenomenele de dispersie și absorbție sînt în deosebi electronii de conducție [19]. Acest studiu explică de ce metalele sînt transparente doar în domeniile infraroșu ale spectrului luminos.

Fenomenul de dispersie prezintă și un deosebit interes practic, deoarece mediile optice dispersive sînt folosite în realizarea instrumentelor optice (a acromatelor, de exemplu). Un domeniu important de utilizare a dispersiei este cel al *spectroscopiei optice* care vizează obținerea și studiul spectrelor de lumină (de emisie sau de absorbție). Aparatele optice folosite în acest scop poartă numele generic de *spectroscoape* (spectrografe — dacă spectrul se înregistrează pe o placă fotografică, spectrometre — dacă se înregis-

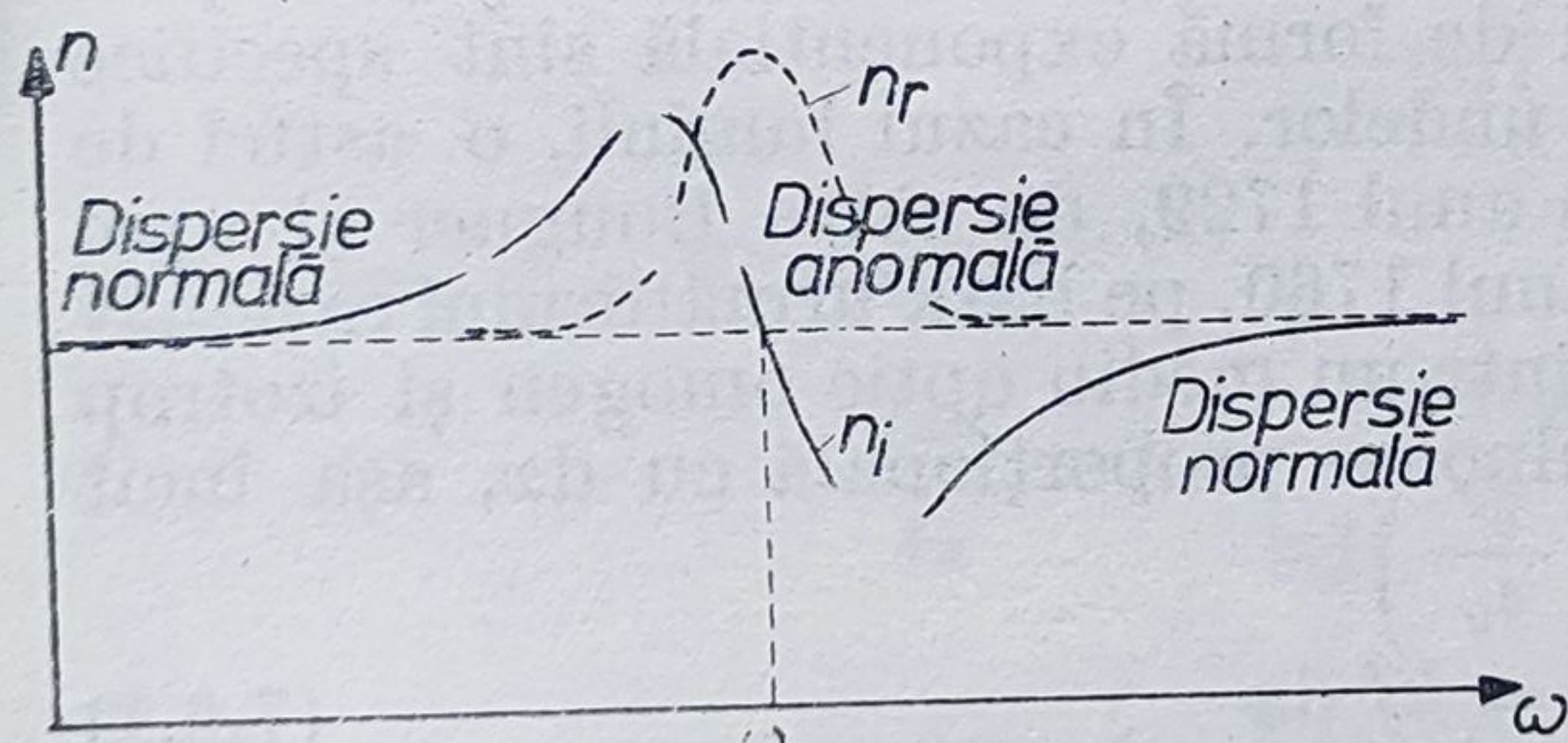


Fig. 7.5.3

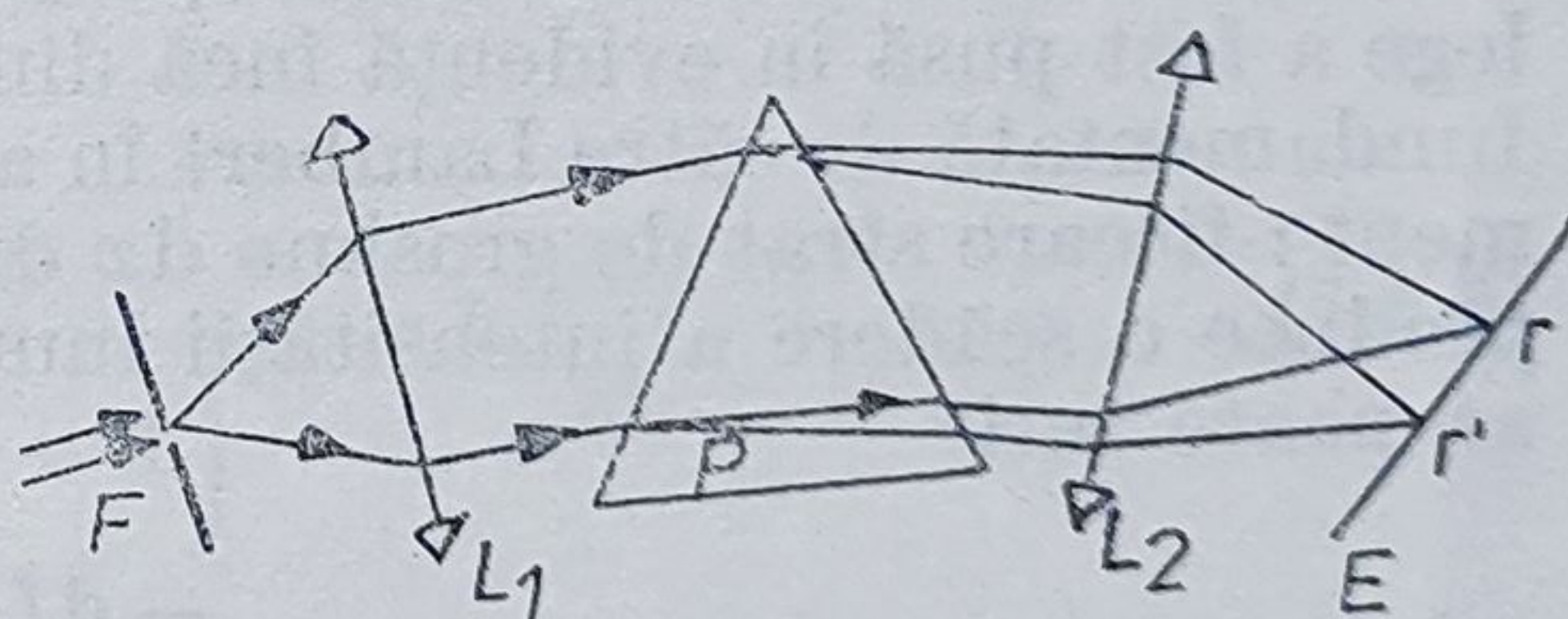


Fig. 7.5.4

trează cu mijloace electronice). Toate spectroscopiele folosesc medii dispersive (prisme sau rețele de difracție) care descompun lumina în componentele sale spectrale. În figura 7.5.4 este prezentată schița unui spectroscop cu prismă. Radiația luminoasă pătrunde în spectroscop printr-o fantă liniară  $F$ , este colimată apoi cu ajutorul lentilei  $L_1$ , în așa fel încît străbate



sub formă de fascicul paralel prisma  $P$ . În aceasta se produce dispersia și apoi fasciculul este focalizat de către lentila  $L_2$  (numită și lentilă de cameră) pe ecranul  $E$ , pe care se înregistrează spectrul respectiv. Acest spectru este format dintr-o serie de imagini liniare distincte ale fantei  $F$ , date de către fiecare componentă spectrală  $\lambda$  din fasciculul incident, fiind deci un spectru de linii.

Desigur că în acest caz se impun cerințe privitoare la vizibilitatea spectrului. Dacă se are în vedere aceeași condiție de vizibilitate a spectrului ca și în cazul difracției prin rețele, adică maximum pentru  $\lambda$  să se suprapună cel puțin peste minimumul pentru  $\lambda - d\lambda$ , atunci puterea de rezoluție a prisme este dată de [19]

$$r = b \left( \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (7.5.23)$$

$b$  fiind baza prisme. În general se obțin puteri de rezoluție mai mici decât în cazul rețelelor (prisme optice se obțin însă mai ușor decât rețelele de difracție), dar suficient de bune pentru analiza calitativă și cantitativă a intensității și lungimii de undă ale liniilor spectrale. Din această analiză spectrală se obțin informații cu privire la tipul și cantitatea de atomi (molecule) care au emis spectrul respectiv.

## § 7.6. ABSORBȚIA ȘI DIFUZIA LUMINII

În § 6.10.5 s-a arătat că dacă în propagarea unei unde electromagnetice intervine absorbția, atunci vectorul ei electric  $\mathbf{E}$  (respectiv cel magnetic  $\mathbf{H}$ ) va prezenta o scădere exponențială în lungul direcției de propagare. Experiența a arătat că legi de formă exponențială sînt specifice tuturor fenomenelor de absorbție a undelor. În cazul luminii, o astfel de lege a fost pusă în evidență încă din anul 1729, de către Bouguer și apoi fundamentată de către Lambert în anul 1760, pe baza următorului raționament: fiecare strat de grosime  $dx$  dintr-un mediu optic omogen și izotrop produce o scădere a intensității luminoase proporțională cu  $dx$ , așa încît se poate scrie

$$-dI = kI dx \quad (7.6.1)$$

respectiv prin integrare

$$I = I_0 e^{-kx}. \quad (7.6.2)$$

În anul 1852, Beer demonstrează experimental că absorbția luminii într-un mediu omogen este proporțională cu concentrația  $c$  a moleculelor



din respectivul mediu. Deci

$$I = I_0 e^{-\epsilon_0 c x} \quad (7.6.3)$$

Ulterior s-a constatat că această lege este valabilă numai pentru medii gazoase rarefiate, respectiv pentru soluții lichide diluate, când coeficienții de extincție  $\epsilon_0$  sînt constanți. În astfel de cazuri, pe baza legii lui Beer (7.6.3) se pot determina concentrațiile soluțiilor, făcîndu-se măsurători de absorbție a luminii. În acest gen de măsurători trebuie să se țină însă seama și de prezența unui alt fenomen care contribuie la diminuarea intensității  $I$  a fluxului luminos transmis de soluție. Este vorba de fenomenul de *împrăștiere sau de difuzie a luminii* pe impuritățile existente în medii, respectiv pe fluctuațiile concentrației sau ale densității acestora. Din această cauză, măsurătorile de absorbție ale luminii în soluții se fac prin compararea intensităților transmise prin două cuve transparente identice, una conținînd solventul, iar cealaltă soluția de studiat.

Experiența arată că difuzia luminii albe se face diferențiat (spectral), funcție de mărimea particulelor difuzante. Astfel, odată cu scăderea dimensiunilor geometrice ale acestor particule crește împrăștierea undelor cu lungimi de undă mici. Pe baza acestui efect, Tyndall explică culoarea albastră a cerului senin. Tot radiațiile cu lungimi de undă mici sînt absorbite mai puternic în atmosfera ce conține praf și fum, ceea ce explică culoarea roșie pe care o capătă orizontul la răsăritul și apusul Soarelui.

Teoria clasică a difuziei luminii a fost creată de către Rayleigh. El admite ca surse ale difuziei, variațiile locale (oscilațiile) ale vectorului polarizare  $\mathbf{P}$ , ce apar în mediul respectiv în prezența unei luminoase. Aceste oscilații ale lui  $\mathbf{P}$  retransmit difuzant (în toate direcțiile) unda luminoasă incidentă. Admitînd că intensitatea luminii difuzate este proporțională cu patratul amplitudinii și al frecvenței de oscilație a lui  $\mathbf{P}$ , atunci pe baza expresiei (7.5.11) se poate scrie

$$I_{dif} = k \frac{Ne^4 E_0^2}{m_0^2 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2} \quad (7.6.4)$$

și întrucît  $I_0 \sim E_0^2$  rezultă

$$\frac{I_{dif}}{I_0} = k_1 \frac{Ne^4}{m_0^2 \left( \frac{\nu_0^2}{\nu^2} - 1 \right)^2} = k_2 \frac{N}{\lambda^4} \quad (7.6.5)$$

(unde s-a presupus  $\nu_0^2 \gg \nu^2$ ). Această ultimă relație confirmă ipoteza lui Tyndall.

Pentru particule difuzante de dimensiuni mai mari, teoria a fost creată de către Mie, care obține o relație de forma

$$\frac{I_{dif}}{I_0} = k' \frac{N}{\lambda^3} \quad (7.6.6)$$



Se găsește în același timp că intensitatea luminii difuzate depinde de unghiul de difuzie  $\theta$  (unghiul făcut de raza difuzată și raza incidentă conform relației

$$I_{dif}^0 = I_{dif}^{\pi/2}(1 + \cos^2 \theta). \quad (7.6.7)$$

Un caz interesant de difuzie intensivă a luminii este „opalescența critică”, în care difuzia se produce pe fluctuațiile densității mediului, devenite maxime în starea critică.

Analizându-se structura luminii difuzate (structura spectrală și gradul ei de polarizare), s-au găsit o serie de aspecte interesante cu privire la compoziția spectrală și la starea de polarizare a acesteia. Astfel, s-a constatat că lumina difuzată este parțial polarizată, iar în spectrul ei apar și linii spectrale inexistente în lumina incidentă. Aceste linii au o frecvență ce se poate obține din compunerea frecvențelor radiației incidente cu frecvențele proprii de vibrație ale moleculelor. De aceea, fenomenul a primit denumirea de „difuzie combinată” sau *difuzie Raman* și el constituie în același timp o tehnică utilă în studiul spectrelor moleculare [64].

## § 7.7. POLARIZAREA LUMINII

Transversalitatea undelor luminoase trebuie să se evidențieze și prin lipsa simetriei axiale a intensității lor. Multă vreme însă, un astfel de efect nu a putut fi obținut din cauză că în fasciculele de lumină naturală intervin o mulțime de unde ale căror vectori luminoși au faze și direcții de vibrație arbitrare (vibrațiile fiind perpendiculare la direcția de propagare a fasciculului). În schimb, dacă un astfel de fascicul este trecut printr-un mediu optic care transmite selectiv undele ale căror vibrații luminoase sînt conținute într-un singur plan, atunci fasciculul transmis ar trebuie să prezinte o asimetrie axială. Un astfel de efect a fost observat pentru prima dată de către Huygens (în anul 1790) la razele ordinară și extraordinară ce se obțin prin dublă refracție pe o lamelă de spat de Islanda, dar el nu a putut fi explicat decît după anul 1808, cînd Malus introduce noțiunea de polarizare, iar Arago și Fresnel leagă această noțiune de transversalitatea undelor de lumină.

În § 6.10.5 s-a arătat că există trei tipuri de polarizare a undelor electromagnetice și anume: polarizare liniară sau plană, polarizare eliptică și polarizare circulară. O undă este *polarizată liniar* dacă vectorul ei electric vibrează mereu într-un singur plan ce conține și direcția de propagare a undei, numit *plan de vibrație*. Planul perpendicular pe cel de vibrație și care conține vibrațiile vectorului magnetic al undei poartă numele de *plan de polarizare*. Înseamnă că în cazul unei unde liniar polarizate amplitudinile  $E_0$  și  $H_0$  sînt vectori reali și constanți în timp.



Pentru a obține lumină liniar polarizată, dintr-un fascicul de lumină naturală (nepolarizată) va trebui, deci, să selectăm cu ajutorul unui dispozitiv de polarizare, toate undele ale căror vectori luminoși vibrează în același plan. Un astfel de dispozitiv se numește *polarizor*, el putînd fi utilizat și în calitate de *analizator*, cu scopul de a studia variația axială a intensității fasciculelor polarizate. Dacă direcția de transmisie a analizatorului face un unghi  $\theta$  cu planul de vibrație al undei incidente, atunci întrucît pentru unda transmisă

$$E_t = E_i \cos \theta \quad (7.7.1)$$

intensitatea luminoasă a undei transmise va fi legată de intensitatea undei incidente prin intermediul relației

$$I_t = I_0 \cos^2 \theta, \quad (7.7.2)$$

relație care constituie *legea lui Malus*. Se constată astfel că la rotirea analizatorului în jurul direcției de propagare a fasciculului cu  $2\pi$ , intensitatea undei transmise de către acesta variază între valorile maximă  $I_{\max} = I_0$  și minimă  $I_{\min} = 0$ . Mărimea

$$\mathcal{P} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (7.7.3)$$

poartă numele de *grad de polarizare*. Pentru fascicule liniar polarizate  $\mathcal{P} = 1$ , iar pentru cele naturale  $\mathcal{P} = 0$ . Dacă  $0 < \mathcal{P} < 1$  pentru un anumit fascicul luminos, atunci acest fascicul va fi parțial polarizat.

*Polarizarea eliptică și circulară* apar în urma interferenței a două unde liniar polarizate în plane reciproc perpendiculare. De exemplu, dacă între cele două unde există o diferență de fază constantă  $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}$ , (vibrațiile lor luminoase făcîndu-se în lungul axelor  $Ox$ , respectiv  $Oy$ ), atunci pentru unda rezultantă se va putea scrie

$$\mathbf{E} = E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} + E_{0y} e^{i(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2})} = (E_{0x} + iE_{0y}) e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (7.7.4)$$

Aici mărimea

$$E_0 = E_{0x} \pm iE_{0y} \quad (7.7.5)$$

reprezintă amplitudinea complexă a undei rezultante. Se poate verifica ușor că expresia (7.7.4) reprezintă o soluție pentru ecuația diferențială a undelor. Ea descrie însă o undă pentru care vectorul luminos se rotește în jurul direcției de propagare (în sens orar pentru semnul  $(-)$  în (7.7.5) sau anti-orar pentru semnul  $(+)$ ), față de un observator care privește în sensul lu-



k), extremitatea lui descriind o elipsă, dacă  $E_{0x} \neq E_{0y}$ , respectiv un cerc, dacă  $E_{0x} = E_{0y}$ . În primul caz, spunem că raza este polarizată eliptic (levogir pentru (+) și dextrogir pentru (-)), iar în al doilea, că este polarizată circular.

De notat că exprimarea sub formă complexă a amplitudinii undelor de lumină oferă posibilitatea unei descrieri matriceale a stării lor de polarizare. Într-adevăr, luând în locul lui (7.7.5) o expresie mai generală, de forma

$$\mathbf{E}_0 \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{0x} \\ \mathcal{E}_{0y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{Bmatrix} \quad (7.7.6)$$

care aici este prezentată sub formă de „matrice unicoloră” și împărțind acest vector cu suma patratelor valorilor absolute ale celor două componente se vor obține vectori care au componente egale cu  $\pm 1$  sau 0. Aceste matrice sînt cunoscute sub numele de „matrice Jones” [19]. Pentru o undă liniar polarizată (de exemplu în planul  $yOz$  pentru care  $\mathcal{E}_{0x} = E_{0x}$ ;  $E_{0y} = 0$ ), matricea Jones va fi de forma  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , iar pentru o rază polarizată

circular la dreapta, de forma  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ . Avantajul unei astfel de reprezentări

constă în aceea că prin calcul matriceal se pot stabili ușor stările de polarizare ale unei unde care rezultă din suprapunerea altor două unde. De exemplu, dacă se compun două unde polarizate circular, una dextrogir, iar cealaltă levogir se va obține o undă rezultantă polarizată liniar, pentru că

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.7.7)$$

Mai jos se va vedea că și mediile care schimbă starea de polarizare pot fi reprezentate prin matrice pătrate, tratarea completă a acestei probleme fiind dată de către O. Gherman [25].

a) **Polarizarea prin reflexie și refracție.** În § 6.10.5 s-a arătat că la reflexia razelor de lumină sub incidență brewsteriană ( $\text{tg } i_B = n$ ), raza reflectată este liniar polarizată în planul de incidență (planul determinat de raza incidentă și de normala la suprafața de separație dintre cele două medii, în punctul de incidență), respectiv vectorul ei luminos vibrează numai perpendicular pe planul de incidență (fig. 7.1.1). De asemenea, raza refractată va fi parțial polarizată, în sensul că vibrațiile vectorului  $\mathbf{E}$ , se fac preponderent în planul de incidență. Prin refracții multiple gradul de polarizare al razelor refractate poate fi mărit pînă la  $\mathcal{P} \leq 1$ .

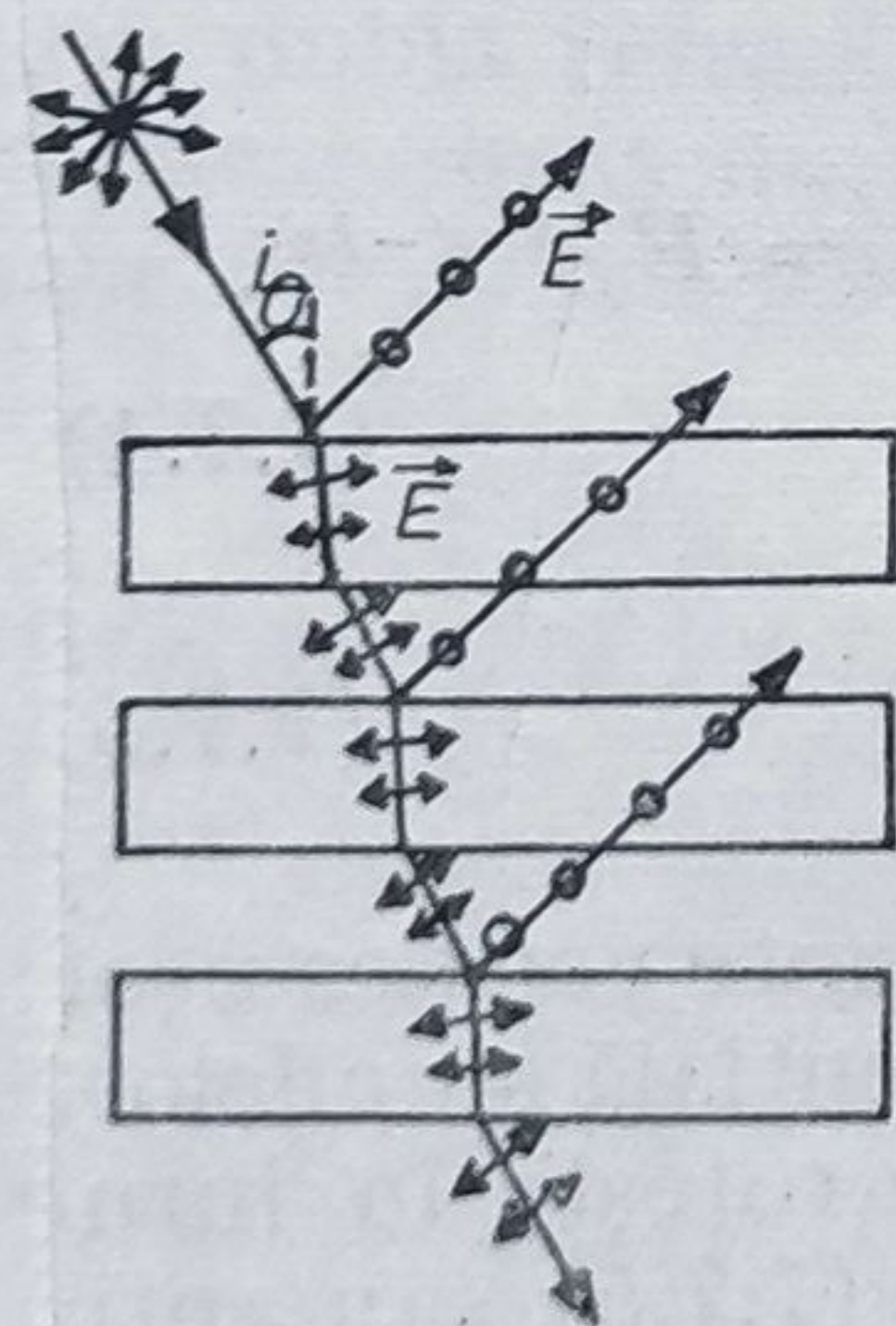


Fig. 7.1.1

b) **Polarizarea prin dublă refracție.** Experiența arată că la propagarea luminii prin medii optice anizotrope, cum sînt monocristalele, apar particularități funcție de direcția după care se propagă unda în ra-



port cu axele cristalografice. Aceste particularități sînt determinate de influența reciprocă dintre cîmpul electric al undei și cîmpul cristalin.

Într-adevăr, sub influența cîmpului electric al undei luminoase, în cristal se vor induce dipoli electronici oscilanți, ale căror direcții de vibrație și amplitudini depind atît de direcția de vibrație a cîmpului electric al undei luminoase, cît și de simetria și intensitatea cîmpului cristalin. Din aceste motive, constanta dielectrică a cristalului va avea valori diferite pe direcții diferite în cristal, devenind astfel o mărime tensorială (vezi § 6.6), iar vectorul inducție electrică  $\mathbf{D}$  nu va mai fi, în general, coliniar cu vectorul cîmp electric  $\mathbf{E}$ .

Pentru cristalele uniaxe (cristale care posedă o singură axă de simetrie maximă) există trei direcții în cristal, în lungul cărora cei doi vectori  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$  rămîn reciproc paraleli. Pentru aceste direcții, notate cu  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  și numite „axe principale”, constanta dielectrică  $\epsilon$  prezintă valori extreme (maximă, minimă și staționar-mijlocie), putîndu-se scrie relațiile

$$D_x = \epsilon_x E_x; \quad D_y = \epsilon_y E_y; \quad D_z = \epsilon_z E_z. \quad (7.7.8)$$

Dacă într-un astfel de cristal pătrunde o undă luminoasă, atunci în el se vor obține vibrații ale vectorului  $\mathbf{D}$  în două plane reciproc perpendiculare. Aceste vibrații se propagă în cristal cu viteze diferite, deoarece pe cele două direcții constanta dielectrică  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  are valori diferite, iar conform relației (6.10.39), pentru cristale nemagnetice  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ . Aspectul calitativ a

acestui proces de propagare poate fi prezentat cu ajutorul suprafețelor de undă (care în acest caz nu mai sînt suprafețe sferice) sau al elipsoidului constantelor dielectrice [16]. Raportat la axele sale principale, acest elipsoid va fi dat de ecuația

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \quad (7.7.9)$$

De notat că pentru cristalele uniaxe  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ , așa încît elipsoidul constantelor dielectrice devine un elipsoid de rotație (fig. 7.7.2). Va exista deci o singură direcție în cristal (direcția  $oz$ ) în lungul căreia cele două vibrații reciproc perpendiculare (cele ce se produc pe direcțiile  $Ox$  și  $Oy$ ) se vor propaga cu aceeași viteză, direcție numită *axă optică principală* a cristalului.

Întrucît  $v_x = c/\sqrt{\epsilon_x}$ ;  $v_y = c/\sqrt{\epsilon_y}$ ;  $v_z = c/\sqrt{\epsilon_z}$ , înseamnă că pentru a afla vitezele de propagare ale undei în lungul unei anumite direcții din cristal, este suficient să aflăm secțiunea pe care o determină în elipsoidul constantelor dielectrice un plan perpendicular la direcția de propagare a undei. Se va exemplifica această tehnică pentru cristalele uniaxe. Din această clasă face parte și spatul de Islanda, o varietate de calcit ( $\text{CaCO}_3$ ), care cristalizează în sistemul romboedric (fig. 7.7.3). Acest cristal posedă o singură axă  $C_3$  și orice direcție paralelă cu ea reprezintă axa optică principală a cristalului.



Se numește *plan al secțiunii principale* prin cristalul uniax, planul determinat de axa optică principală și de normala la suprafața sa în punctul de incidență. Este evident că o vibrație luminoasă perpendiculară la acest plan va fi în același timp și perpendiculară pe axa optică principală.

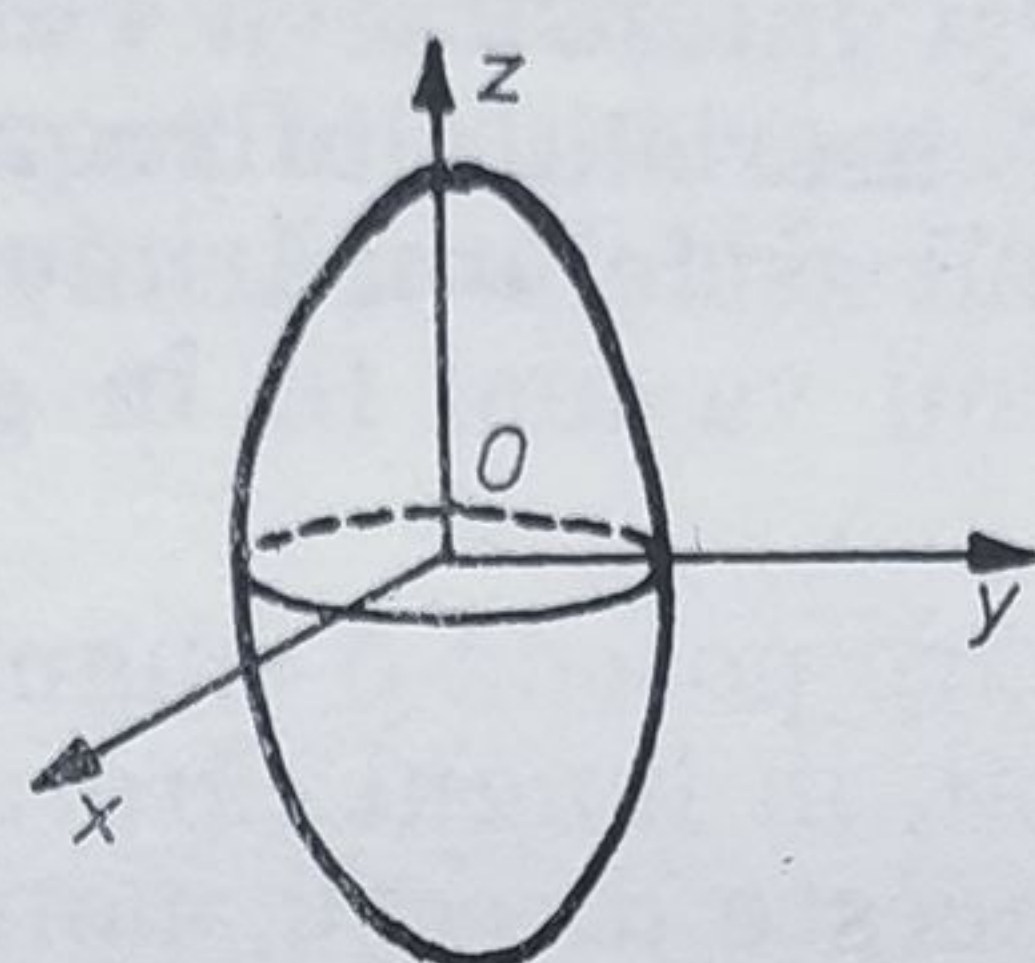


Fig. 7.7.2

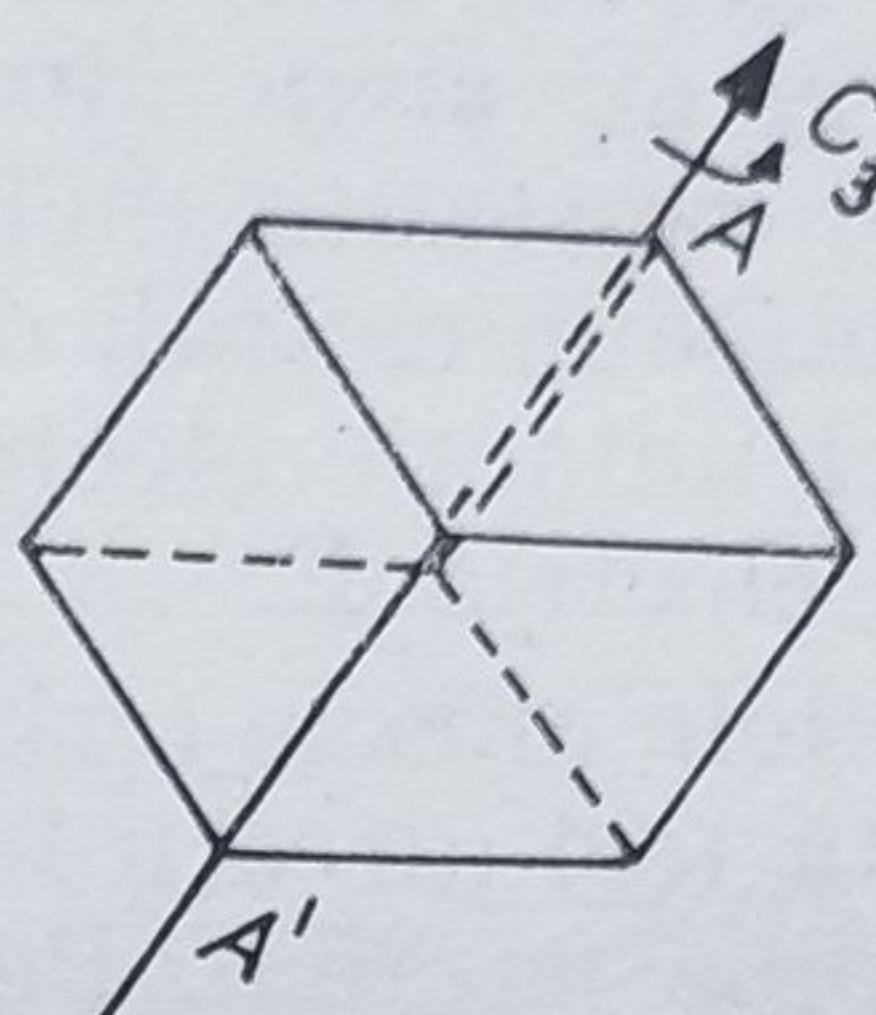


Fig. 7.7.3

Deci, ea se va propaga mereu cu aceeași viteză, indiferent de direcția razei prin cristal. În schimb, vibrațiile luminoase ce se fac în planul secțiunii principale se vor propaga cu viteze diferite, funcție de direcția razei față de axa optică principală a cristalului (fig. 7.7.4). Datorită refracției, aceste două raze se separă una de alta, formînd o așa zisă *rază ordinară* ( $o$ ), ale cărei vibrații luminoase se fac perpendicular pe planul secțiunii principale și o *rază extraordinară* ( $e$ ), ale cărei vibrații luminoase se produc în planul secțiunii principale.

Se constată ușor că în cazul cristalelor uniaxe există două direcții în lungul cărora, la incidență normală, cele două raze nu se mai separă una de alta : una dintre ele este orientată pe direcția axei optice principale (direcție pentru care cele două unde au aceeași viteză de propagare  $v_o = v_e$ ), iar cealaltă este orientată perpendicular la axa optică (vitezele de propagare fiind diferite  $v_o \neq v_e$ , dar razele nu se refractă). Prezența celor două direcții se poate desprinde și din schița suprafețelor de undă ale celor două unde, prezentate în fig. 7.7.5. În figura 7.7.5, a sînt prezentate

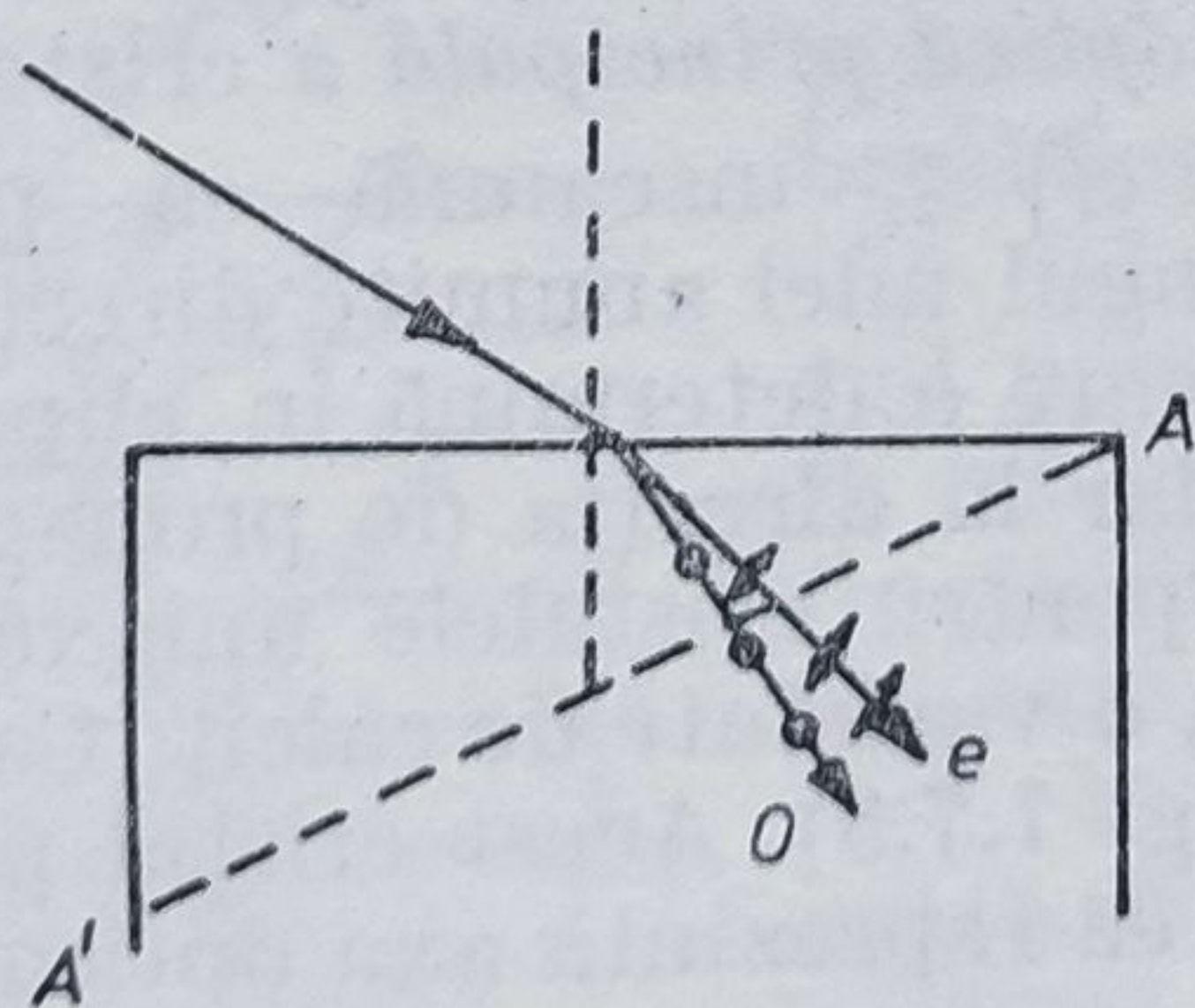


Fig. 7.7.4

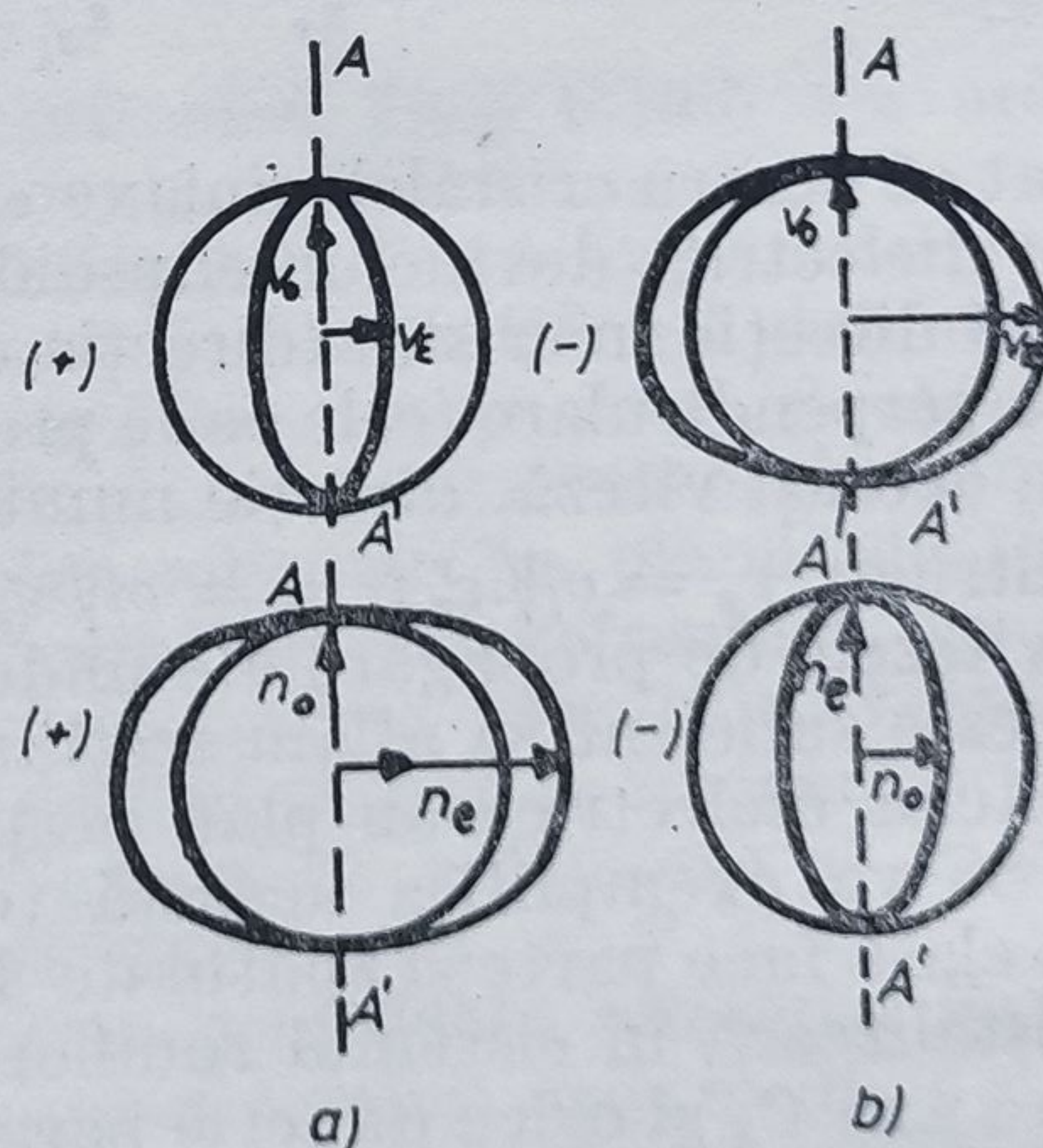


Fig. 7.7.5



cele două suprafețe de undă, pentru un cristal uniax pozitiv ( $v_o > v_e$ ), iar în fig. 7.7.5, b, pentru un cristal negativ ( $v_o < v_e$ ). De exemplu, în cazul spatului de Islanda,  $n_o = 1,658$  și  $n_e = 1,485$  pentru  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ , așa încât acesta este un cristal uniax negativ.

Polarizarea prin dublă refracție constă deci, în separarea celor două raze, ambele fiind polarizate liniar, în plane reciproc perpendiculare. În

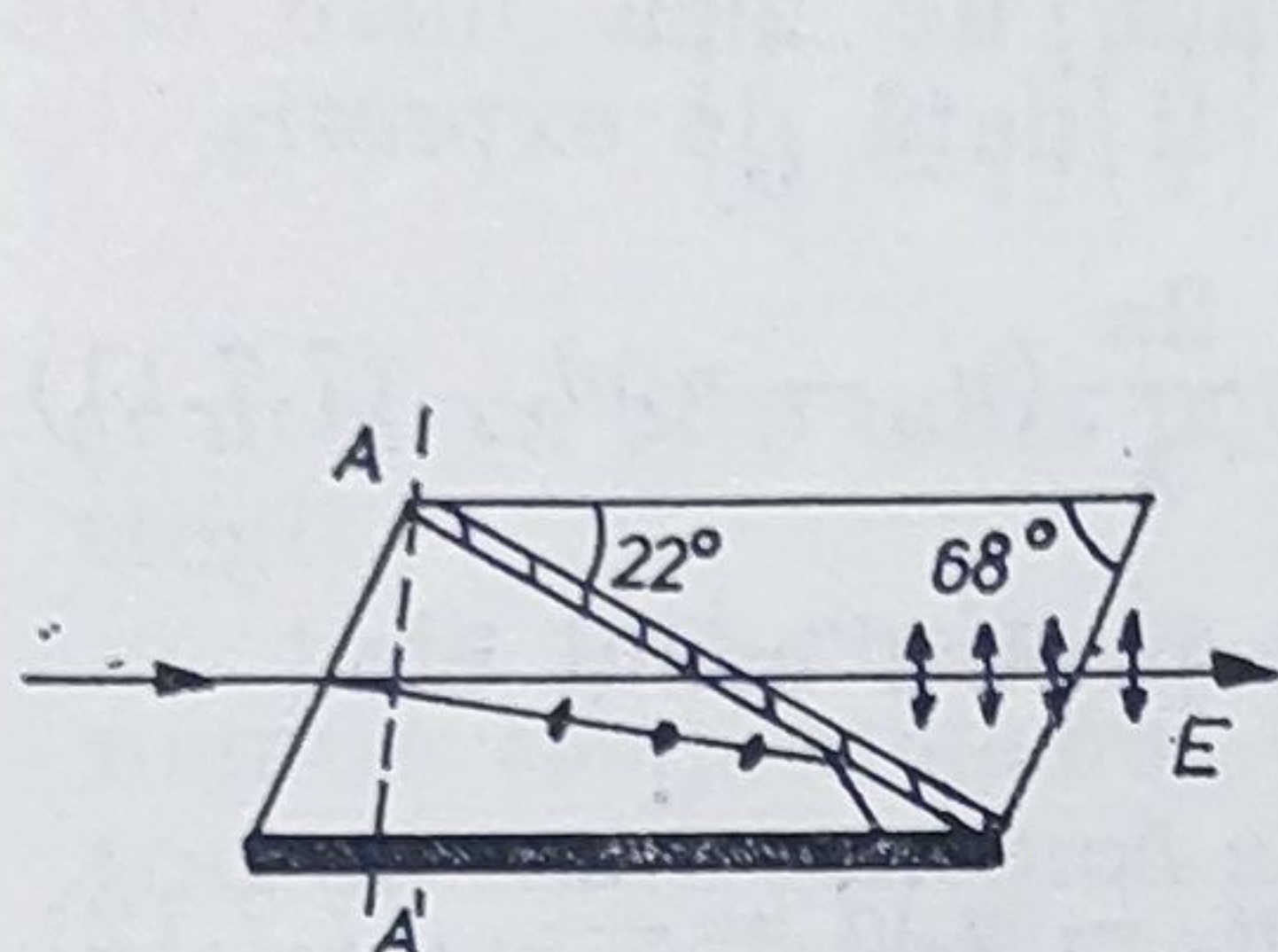
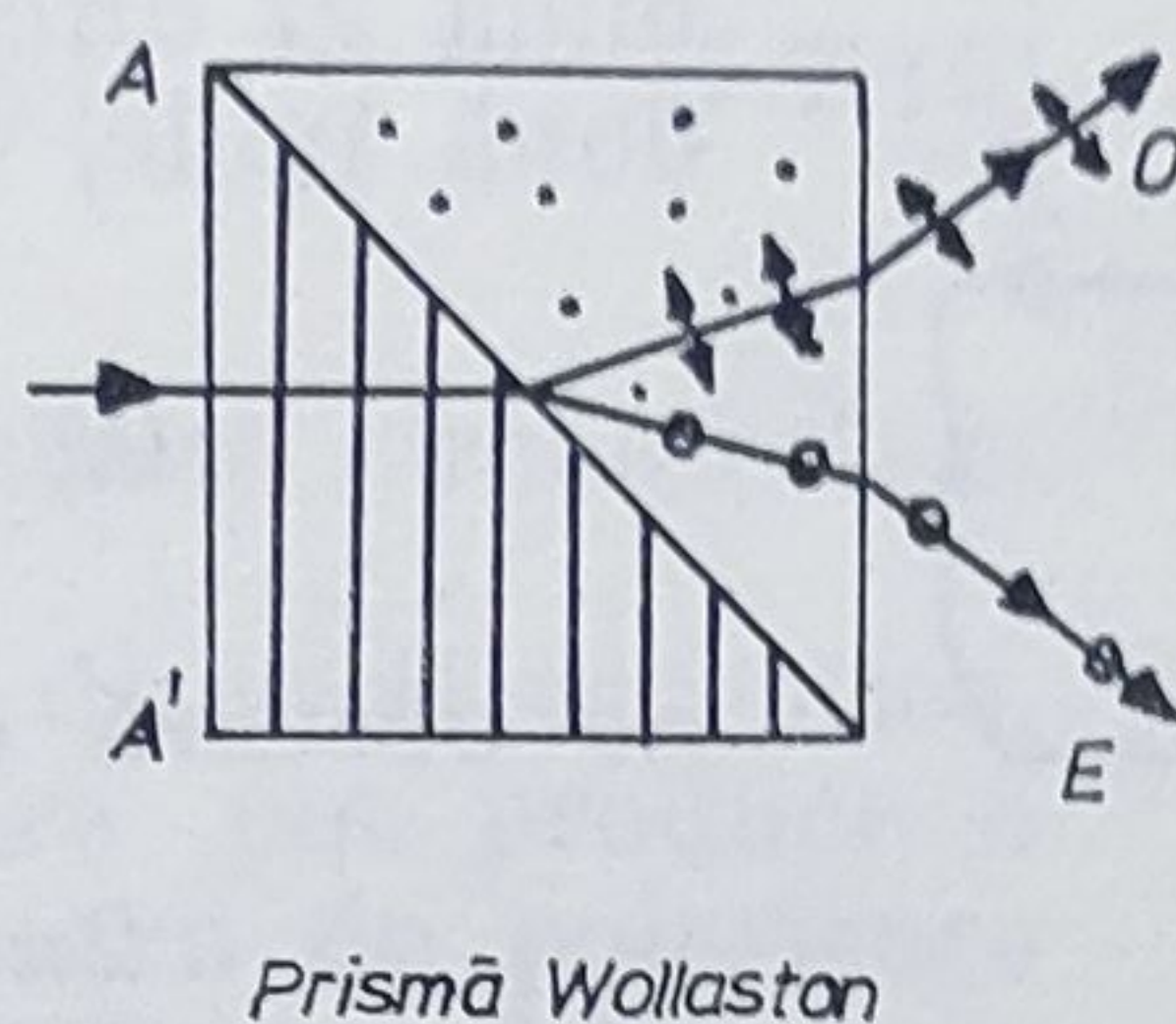
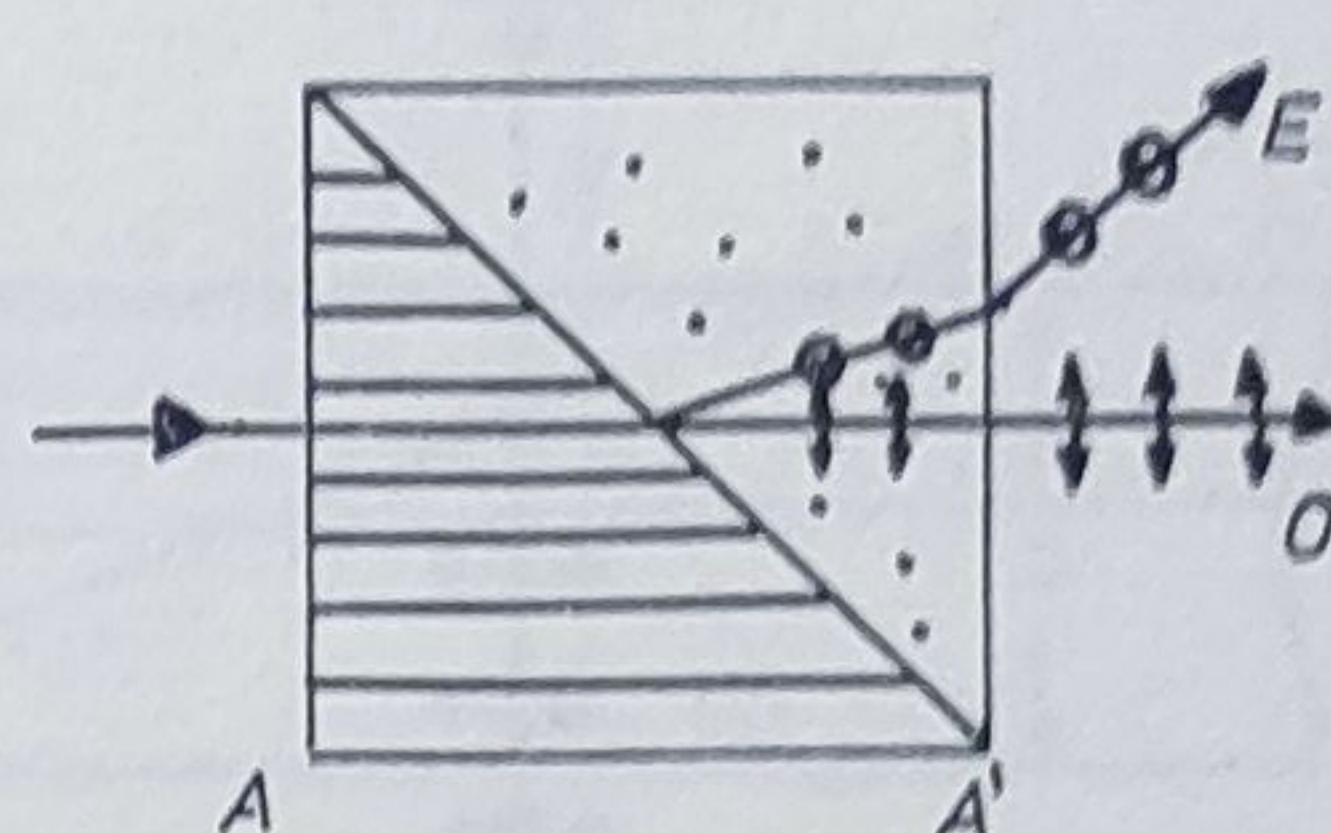


Fig. 7.7,6



Prismă Wollaston



Prismă Rochon

Fig. 7.7.7

anul 1828, cristalograful W. Nicol realizează un dispozitiv simplu de polarizare — *nicolul* — format din două prisme de spat de Islanda, lipite între ele cu balsam de Canada (o rășină naturală transparentă cu  $n_b = 1,550$ ). Unghiurile prismelor de spat sînt astfel alese, încît, la limita de separație dintre spat și balsam, raza ordinară se reflectă total (fig. 7.7.6), fiind absorbită de baza înegrită a nicolului, iar raza extraordinară este transmisă de nicol. Astfel, nicolul poate juca rol atît de polarizor, cît și de analizor.

Deoarece balsamul de Canada este puternic absorbant în ultraviolet, au fost construite dispozitive de polarizare și pentru această porțiune a spectrului luminos, două dintre ele fiind schițate în fig. 7.7.7. Cele două prisme sînt realizate din cuarț monocristalin și lipite între ele prin contact optic.

De notat că unele cristale, cum este turmalina, au pe lîngă capacitatea de birefrigență și pe aceea de a absorbi puternic una dintre raze. De regulă, această absorbție se face selectiv, funcție de lungimea de undă a radiației, ceea ce determină o anumită colorație cristalului respectiv. Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *dicroism*. În ultima vreme, s-a dezvoltat tehnica preparării unor cristale birefringente artificiale, din rîndul cărora se disting „polaroizii”. Un polaroid este format dintr-un ansamblu de cristalite de herapatită (periodat de sulfat de chinină), înglobate ordonat într-o masă plastică transparentă.

c) **Polarizarea eliptică și circulară.** Acest tip de polarizare se poate obține cu ajutorul plăcilor cristaline uniace care introduc diferențe de fază  $\Delta\varphi$  constante între undele ordinare și extraordinare, așa încît în urma interferenței lor rezultă o undă, la care extremitatea vectorului luminos descrie o curbă exprimată prin ecuația (vezi și § 6.10.5)

$$\frac{x^2}{a_o^2} + \frac{y^2}{a_e^2} - \frac{2xy}{a_o a_e} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi \quad (7.7.10)$$



Aici  $a_o$  și  $a_e$  reprezintă amplitudinile undelor ordinare, respectiv extraordinare. Firește, interferența celor două unde se produce numai dacă ele se propagă pe aceeași direcție, caz ce se realizează atunci când razele cad normal pe suprafața plană a lamelei de cristal uniax, avînd axa optică

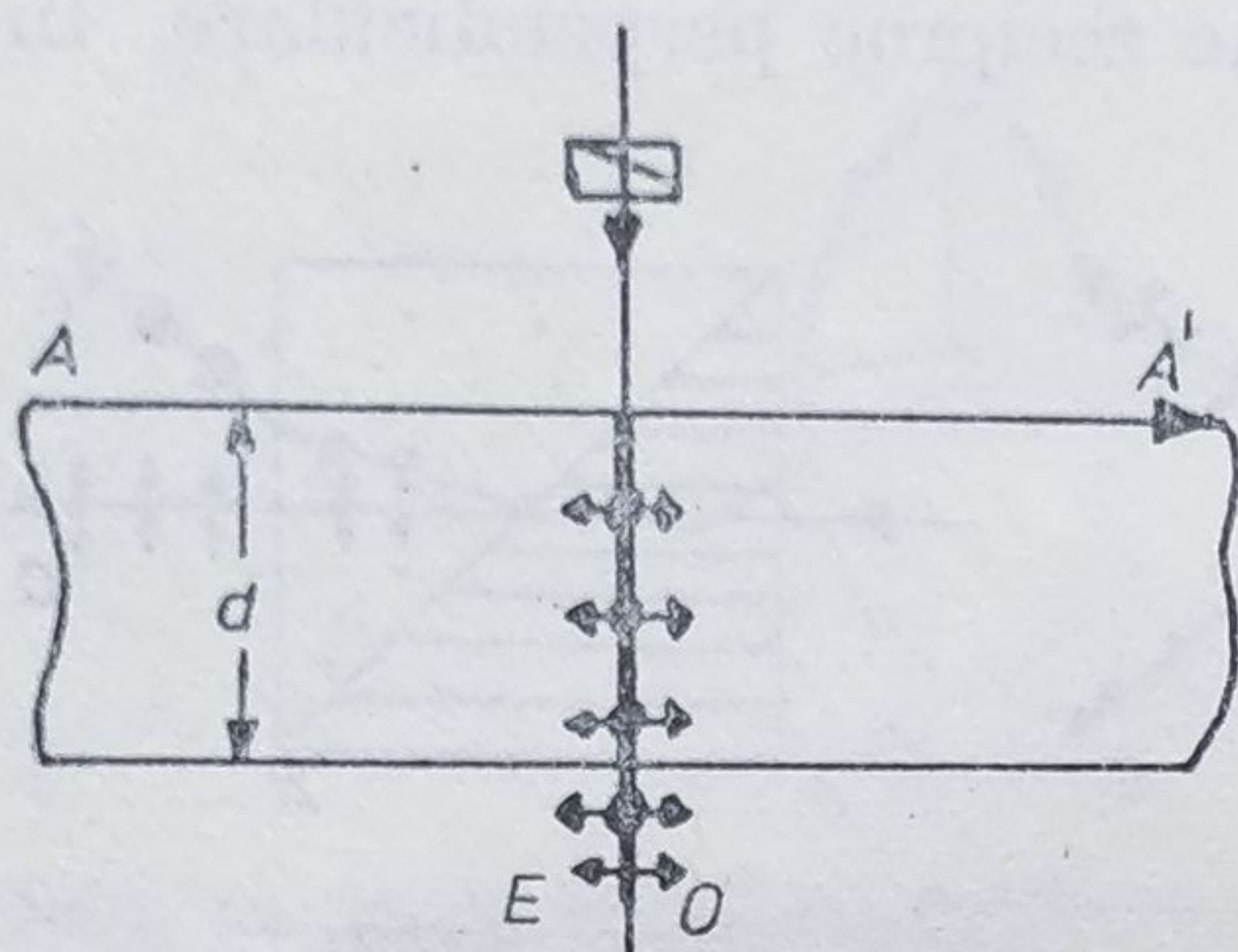


Fig. 7.7.8

principală conținută în acest plan (fig. 7.7.8). Pentru o lamelă de grosime  $d$  și radiații luminoase cu lungimea de undă  $\lambda$ , diferența de fază între cele două unde va fi dată de expresia

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d. \quad (7.7.11)$$

Se observă că pentru cazul când

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = \frac{\pi}{2} \quad (7.7.12)$$

ecuația (7.7.10) se reduce la ecuația unei elipse (respectiv a unui cerc, dacă  $a_o = a_e$ ) și prin urmare, unda transmisă de lamelă va fi polarizată eliptic (sau circular). De asemenea, pentru cazul când

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = \pi \quad (7.7.13)$$

ecuația (7.7.10) se reduce la ecuația unei drepte și deci, unda transmisă de lamelă va fi polarizată liniar. Deoarece în primul caz lamela introduce, între cele două unde, o diferență de drum optic  $(n_o - n_e)d = \lambda/4$ , ea se numește *lamelă sfert de undă*, iar în al doilea caz  $(n_o - n_e)d = \lambda/2$ , lamela va fi o *lamelă semiundă*. Deci, lamela semiundă convertește o undă polarizată liniar într-o undă polarizată eliptic (circular), dacă planul ei de polarizare nu coincide cu planul secțiunii principale a lamelei. Această proprietate a lamelei (și în general a elementelor optice), de a modifica starea de polarizare a unei incidente poate fi exprimată cu ajutorul matricelor Jones. Astfel, dacă  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  este matricea unicoloră care descrie starea de polarizare a unei incidente, atunci starea de polarizare a unei transmise va fi dată de expresia

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (7.7.14)$$

matricea pătrată  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — fiind specifică elementului optic respectiv. De exemplu, în cazul lamelei sfert de undă, cu axa principală conținută



în planul lamelei, matricea Jones are forma  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ . Înseamnă că, dacă pe o astfel de lamelă este trimisă o undă liniar polarizată, într-un plan înclinat cu  $\frac{\pi}{4}$  față de planul secțiunii principale a lamelei, unda transmisă va avea o stare de polarizare dată de expresia :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (7.7.15)$$

și deci va fi o undă polarizată circular dextrogir.

Au fost realizate și dispozitive optice, numite *compensatoare*, care pot produce o transformare continuă a stării de polarizare a undelor ce le străbat. În figura 7.7.9 este schițat compensatorul lui Babinet, realizat din două prisme de spat cu axe optice reciproc perpendiculare, ce pot glisa una peste cealaltă. În felul acesta se obține o variație continuă a grosimii  $d = d_1 + d_2$  a compensatorului și respectiv a diferenței de fază între cele două unde

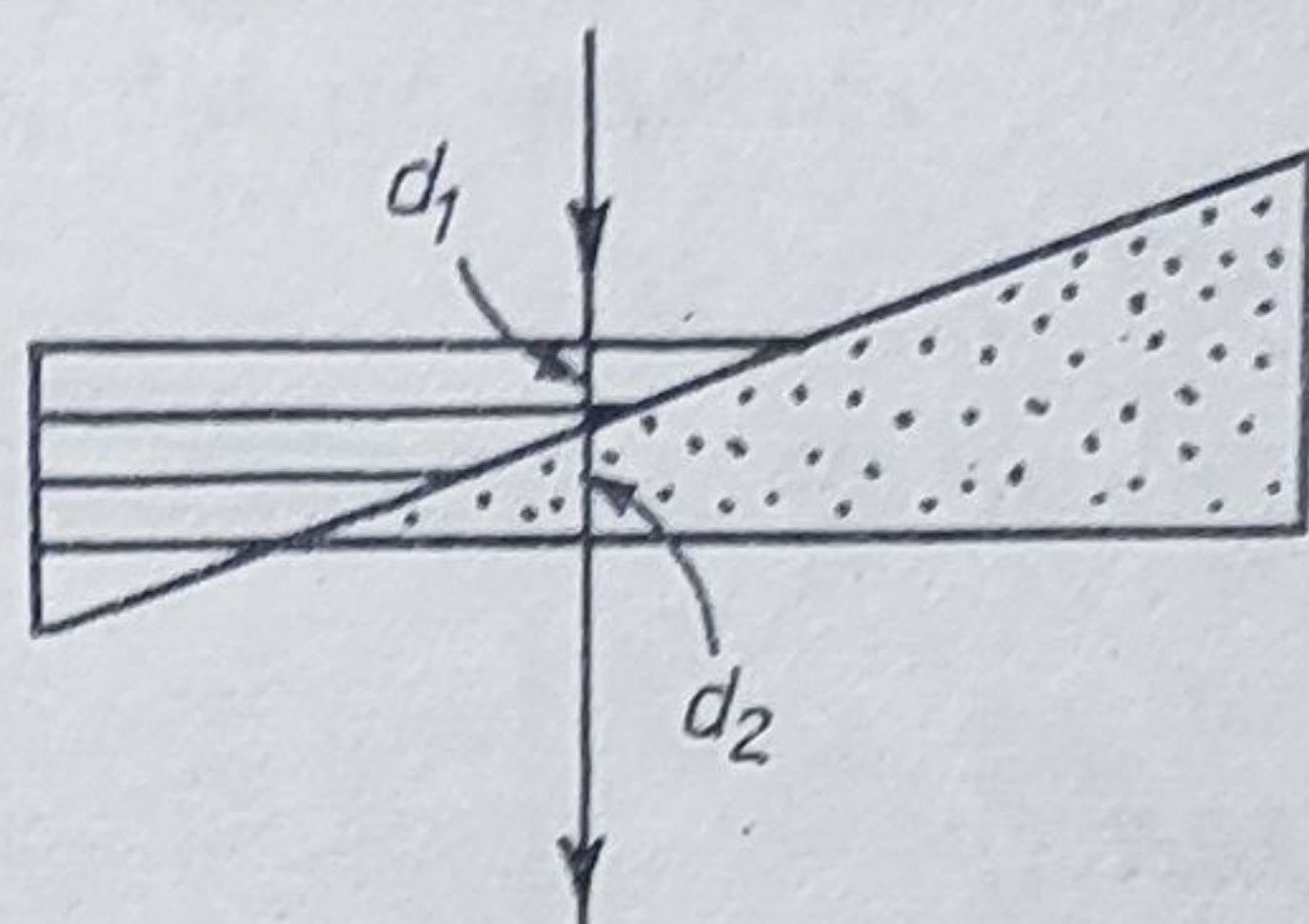


Fig. 7.7.9

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [(n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2)] = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)(d_1 - d_2). \quad (7.7.16)$$

d) **Polarizarea prin birefrință accidentală.** S-a constatat experimental că mediile optice izotrope devin anizotrope dacă asupra lor se exercită acțiuni exterioare. Direcția acțiunii devine axă optică principală a mediului, iar la trecerea unei raze de lumină se va produce fenomenul de birefrință.

*Birefrința mecanică* apare în mediile solide izotrop-transparente, care sînt supuse acțiunii unor tensiuni elastice (fig. 7.7.10). O undă liniar polarizată ce străbate transversal un astfel de mediu va fi transformată într-o undă polarizată eliptic, fapt evidențiat de trecerea luminii prin cei doi nicoli în cruce.

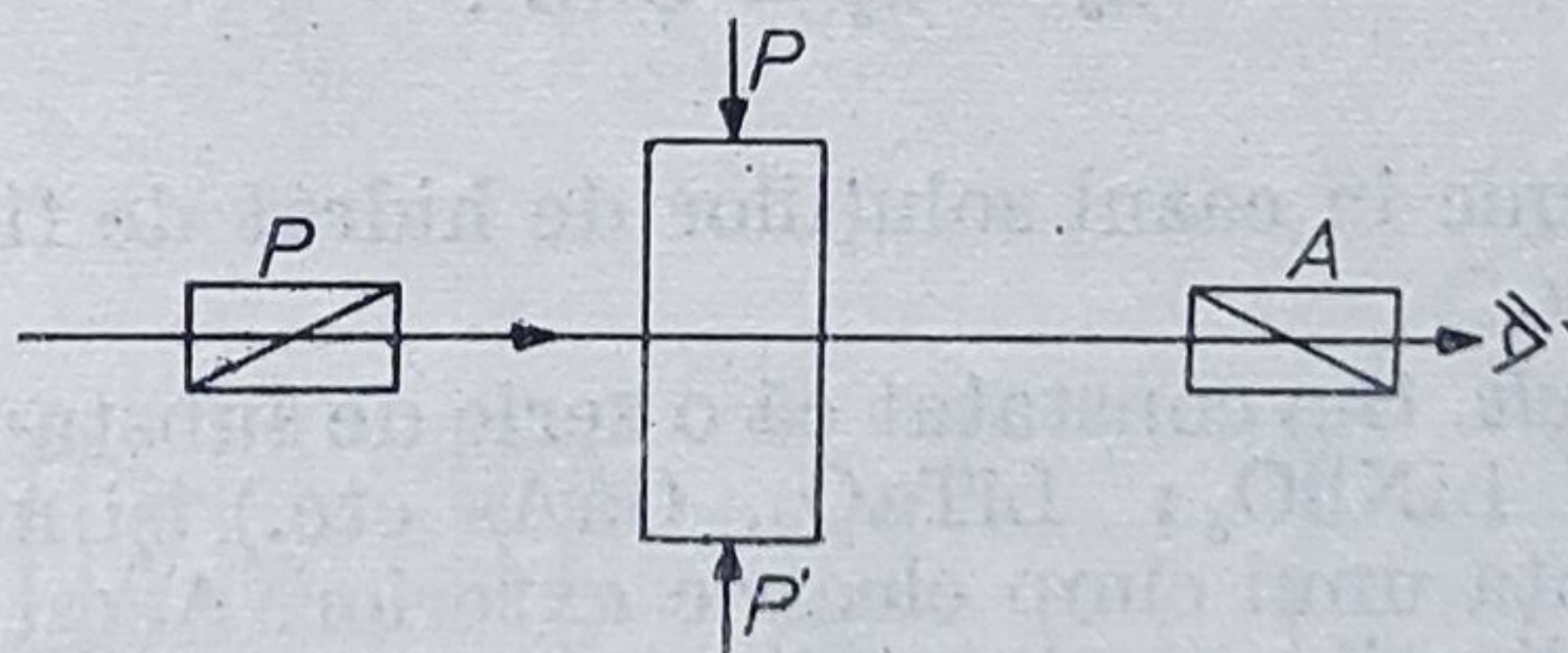


Fig. 7.7.10

Acest fenomen, cunoscut sub numele de *fotoelasticitate*, este utilizabil în explorarea optică a tensiunilor elastice din corpurile transparente, studiu ce se face cu ajutorul polariscoapelor.



*Birefringența electrică (efectul Kerr)* este descoperită în anul 1875 de către J. Kerr și constă în inducerea unei axe optice într-un mediu izotrop, supus acțiunii unui câmp electric  $E$  (fig. 7.7.11). Se constată că

$$n_o - n_e = K\lambda E^2 \quad (7.7.17)$$

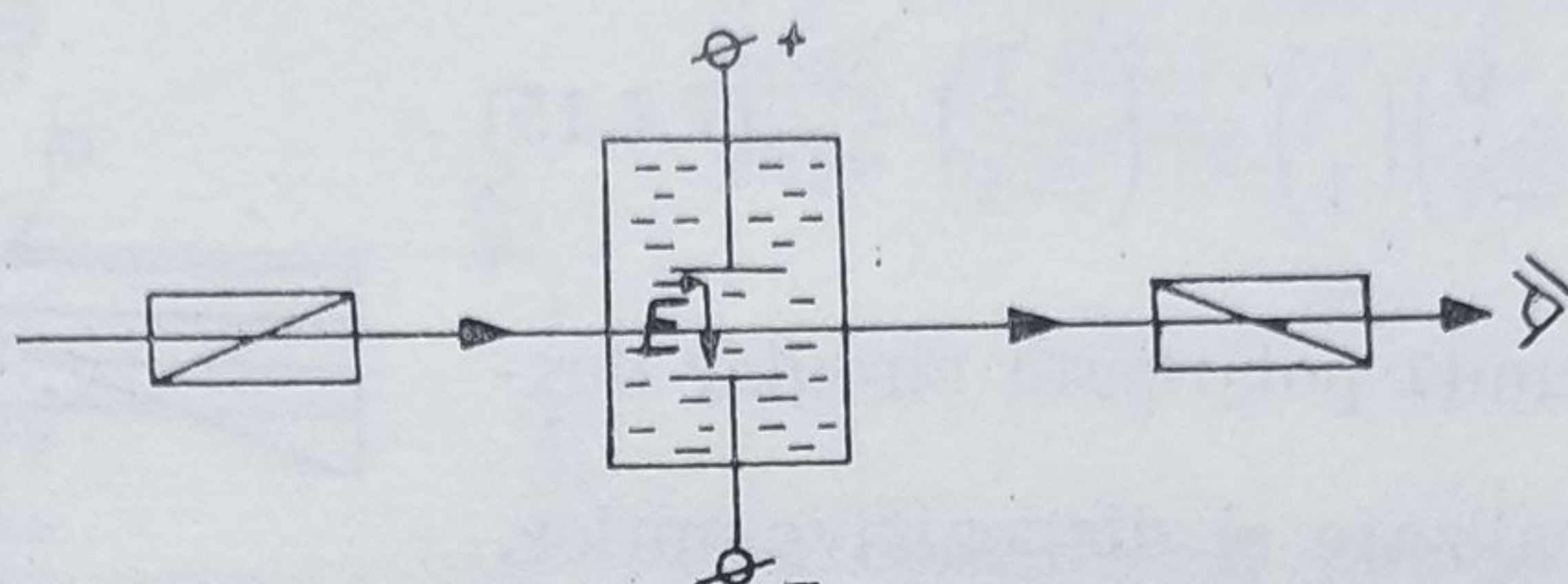


Fig. 7.7.11

unde constanta  $K$  este de ordinul lui  $10^{-14} \text{m/V}^2$ , putînd fi atît pozitivă, cît și negativă. Se observă că efectul nu depinde de sensul câmpului  $E$ . Și în acest caz, efectul se pune în evidență prin trecerea luminii prin cei doi nicoli în cruce, în prezența câmpului electric  $E$ . De aceea, sistemul respectiv, numit și „celula Kerr”, poate juca rol de obturator de lumină. Se folosesc în deosebi celule Kerr cu medii lichide (nitrobenzen, bisulfid de carbon etc.) în care efectul se produce în intervale de timp foarte scurte ( $\Delta t < 10^{-9} \text{s}$ ), existînd astfel posibilitatea realizării unor obturatoare care funcționează practic fără inerție.

De notat că există și un efect Kerr magnetooptic, care constă în modificarea stării de polarizare a undelor reflectate pe suprafețele metalelor magnetice. La o incidență aproape normală, unda reflectată este polarizată eliptic.

*Birefringența magnetică (efectul Cotton-Moutton)* este asemănătoare birefringenței electrice (dar mai slabă decît aceasta) și apare sub acțiunea unui câmp magnetic  $B$ . Și în acest caz

$$n_o - n_e = C\lambda B^2. \quad (7.7.18)$$

Efectul este puternic în cazul soluțiilor de hidrat de fier, purtînd numele de *efect Majorana*.

*Efectul Pockels*. S-a constatat că o serie de substanțe cristaline transparente ( $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{LiNbO}_3$ ;  $\text{LiTaO}_3$ ,  $\text{GaAs}$  etc.) își modifică indicele de refracție în prezența unui câmp electric exterior. Acest efect, numit efect Pockels, oferă aplicații practice interesante ca modulator de frecvență și redresor optic.

*Efectul Faraday (polarizarea rotatorie magnetică)*. Acest efect apare într-un câmp magnetic longitudinal, aplicat unui mediu izotrop (fig. 7.7.12), și constă într-o rotire a planului de polarizare a luminii ce străbate un astfel



de sistem. Unghiul de rotire  $\varphi$  este dat de relația

$$\varphi = V l B \quad (7.7.19)$$

$V$  fiind *constantă lui Verdet*, care depinde de lungimea de undă a radiației respective.

De altfel, fenomene de rotire a planului de polarizare a luminii sînt cunoscute încă din anul 1811, cînd Arago constată că la trecerea unei unde liniar polarizate, în lungul axei optice a unei plăcuțe de cuarț, apare o rotire a planului de polarizare cu un unghi  $\alpha$ , dat de expresia

$$\alpha = [\alpha]_{\lambda}^t l \quad (7.7.20)$$

Aici  $[\alpha]_{\lambda}^t$  este un coeficient, numit *putere rotatorie specifică*. El depinde de lungimea de undă  $\lambda$ , conform relației

$$[\alpha]_{\lambda}^t = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (7.7.21)$$

și de temperatură. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *activitate optică*, fiind întîlnit la o serie de substanțe, numite *optic-active* (NaCl, zahăr monocristalin sau în soluție, cuarț, sulfat de stricnină etc.). Unele dintre aceste substanțe rotesc planul de polarizare spre dreapta (dextro-gir), altele spre stînga (levogir).

La soluții de zahăr, spre exemplu, se constată că

$$\alpha = [\alpha]_{\lambda}^t \cdot C \cdot l \quad (7.7.22)$$

$C$  fiind concentrația substanței optic active. Pe baza relației (7.7.22) se poate determina concentrația  $C$ , măsurînd unghiul de rotație  $\alpha$ , cu ajutorul polarimetrelor.

Activitatea optică este determinată de structura nesimetrică axială a moleculelor mediului optic activ. Calitativ, se poate considera că unda polarizată plan este rezultatul interferenței a două unde polarizate circular (una dextrogir și alta levogir). Dacă vitezele de rotație ale vectorului luminos în mediu optic activ sînt diferite, atunci va rezulta o rotire a planului de polarizare (fig. 7.7.13).

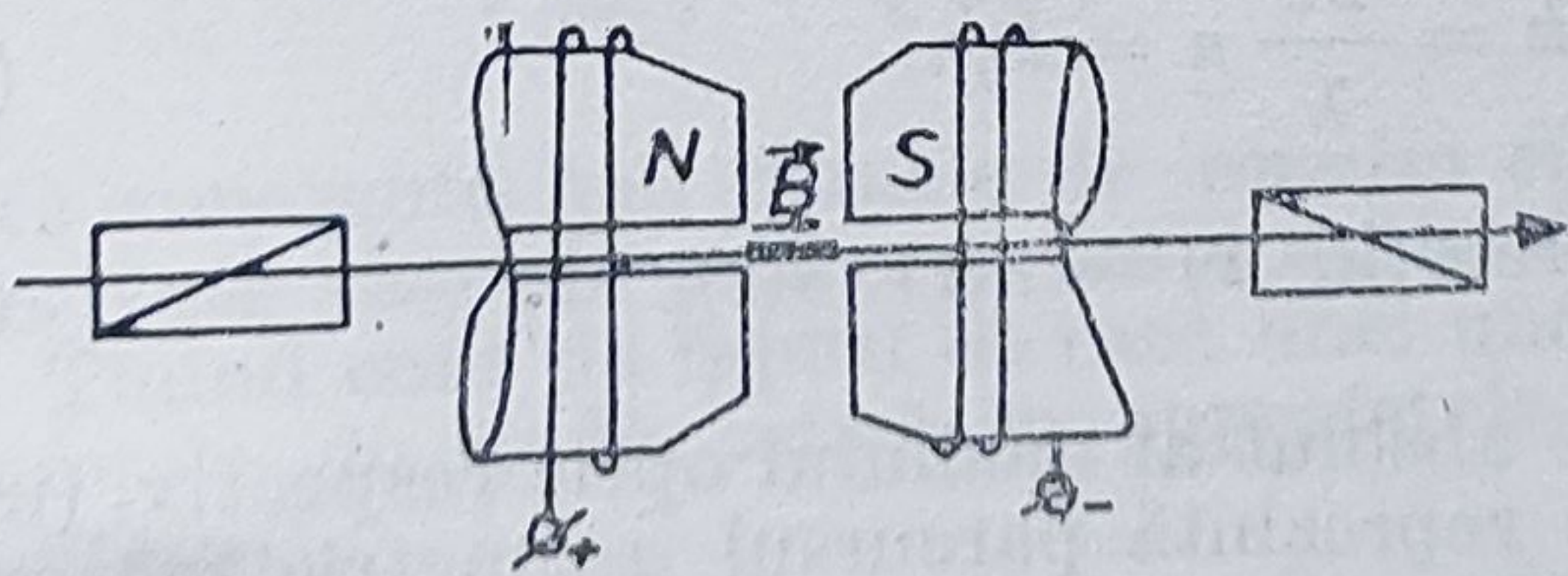


Fig. 7.7.12

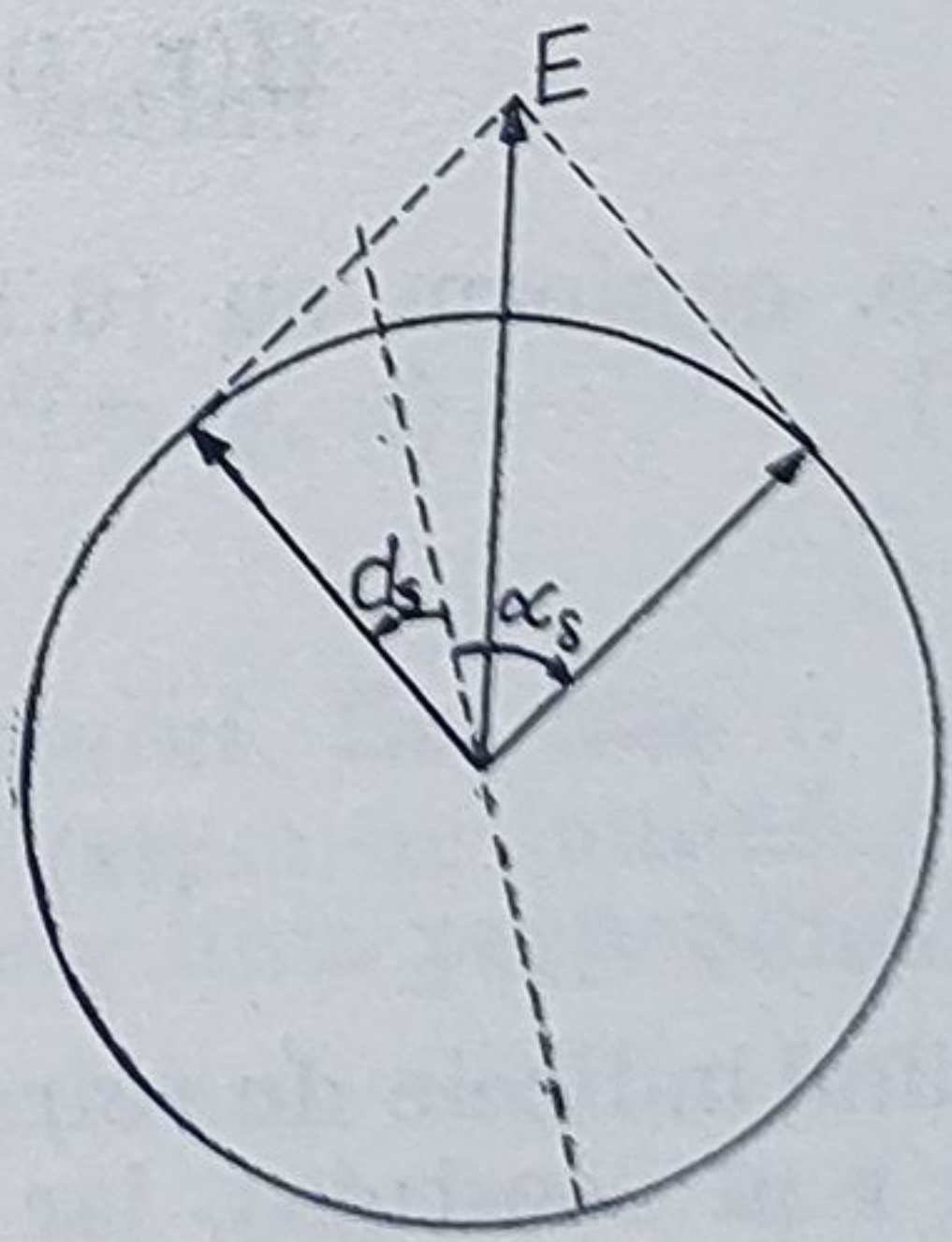


Fig. 7.7.13



## § 7.8. ELEMENTE DE OPTICĂ GEOMETRICĂ

a) **Noțiunea de rază de lumină.** În § 6.10.4. s-a arătat că pentru unde electromagnetice cu lungimi de undă foarte scurte ( $\lambda \rightarrow 0$ ) se poate introduce noțiunea de rază, prin care se evidențiază direcția și sensul de propagare a energiei undei respective. În medii omogene, aceste raze sînt linii drepte, definite de altfel și de teoria ondulatorie (vezi § 2.5), ca linii perpendiculare la suprafețele de undă. Este de remarcă însă faptul că prin introducerea noțiunii de rază în aproximația  $\lambda \rightarrow 0$  se scoate în evidență posibilitatea neglijării fenomenelor de difracție (și în general a altor fenomene specifice ondulatorii) într-o serie de cazuri de interes practic, cum sînt cele legate de obținerea imaginilor optice ale corpurilor iluminate — problemă studiată de optica geometrică.

Optica geometrică, sau optica razelor de lumină studiază propagarea razelor de lumină prin diverse medii transparente, numite *medii optice* folosind în acest scop un limbaj geometric bazat pe legile reflexiei și refracției luminii. Desigur că aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ , în care sînt studiate fenomenele din optica geometrică poate fi extinsă și la alte fascicule de particule utilizate în obținerea de imagini ale corpurilor, cum sînt fasciculele de electroni, neutroni etc., existînd deci o optică geometrică electronică, neutrionică etc.

Pentru a construi o descriere matematică a noțiunii de rază de lumină și a găsi legile care guvernează propagarea acesteia prin diverse medii optice se va presupune o undă luminoasă monocromatică plană în care vectorii electric  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  și magnetic  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , variază în timp și spațiu, conform expresiilor

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (7.8.1)$$

iar în ecuațiile care descriu această undă se va face aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ . Se observă că expresiile (7.8.1) se pot transcrie sub forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad \text{unde} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})} = \mathbf{E}_0 e^{-ik_0 l(\mathbf{r})} \quad (7.8.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 e^{-ik_0 l(\mathbf{r})} \quad (7.8.3)$$

în care, conform cu (6.10.40), sau folosit notațiile

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n = k_0 n \quad (7.8.4)$$

$$l(\mathbf{r}) = n r \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \cdot s(\mathbf{r}) \quad (7.8.5)$$

$n(\mathbf{r})$  fiind indicele de refracție absolut al mediului optic respectiv (într-un punct  $\mathbf{r}$  al acestuia), iar  $s(\mathbf{r})$  reprezintă parcursul geometric măsurat pe raza unei (fig. 7.8.1).



Funcția scalară  $l(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \cdot s(\mathbf{r})$ , dată de produsul dintre indicele de refracție al unui mediu optic și parcursul geometric al razei de lumină în acel mediu poartă numele de *drum optic*. Drumul optic reprezintă, așa cum se va vedea în continuare, mărimea fizică principală cu ajutorul căreia se pot descrie complet proprietățile razelor de lumină. Într-adevăr, prin introducerea expresiilor (7.8.2) și (7.8.3) în ecuațiile lui Maxwell, scrise în forma (6.10.34) și (6.10.35) și luând în considerație faptul că  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  și  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , respectiv că se pot face transformări de forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= [\nabla \times \mathbf{H}_0 - ik_0 \mathbf{H}_0 \times \nabla l(\mathbf{r})] e^{-ik_0 l(\mathbf{r})} = \\ &= -ik_0 \mathbf{H} \times \nabla l \end{aligned} \quad (7.8.6)$$

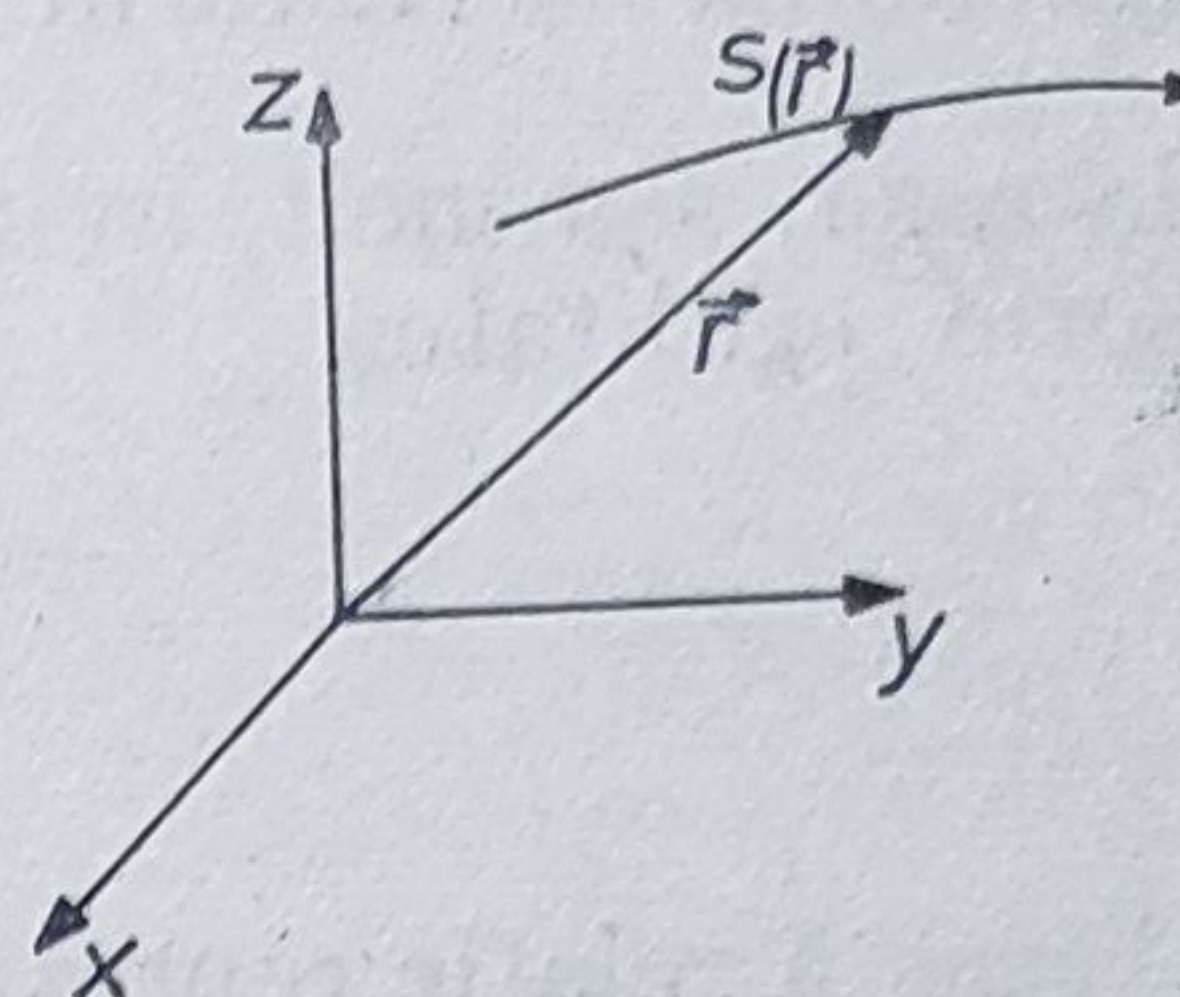


Fig. 7.8.1

după calcule simple se obțin ecuațiile

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \nabla l(\mathbf{r}) - c\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \nabla l(\mathbf{r}) + c\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0] \quad (7.8.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \nabla l(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla l(\mathbf{r}) = 0.$$

Eliminând din primele două ecuații pe  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  și particularizînd rezultatul obținut pentru medii optice nemagnetice ( $\mu = \mu_0$ ;  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 n^2$ , vezi 6.10.39), rezultă

$$-\frac{1}{c\varepsilon} (\mathbf{H} \times \nabla l) \times \nabla l - c\mu_0 \mathbf{H} = 0 \quad (7.8.8)$$

sau

$$\nabla l \cdot (\mathbf{H} \cdot \nabla l) - \mathbf{H}(\nabla l)^2 - c^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{H} = 0$$

respectiv

$$(\nabla l)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (7.8.9)$$

În coordonate carteziene, această ecuație are forma

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (7.8.10)$$

și este cunoscută sub numele de *ecuația eiconalului*. Ea este o ecuație cu derivate parțiale pentru drumul optic  $l(\mathbf{r})$  al razei de lumină.

Ținînd cont de faptul că raza unei unde este linia perpendiculară la suprafețele de undă, adică la suprafețele

$$l(x, y, z) = \text{const.} \quad (7.8.11)$$



înseamnă că cunoașterea lui  $l(\mathbf{r})$  ne va permite să scriem o ecuație pentru raza de lumină. În acest scop, se va lua în considerație proprietatea vectorului gradient  $\nabla l(\mathbf{r})$  de a fi perpendicular pe planul tangent la suprafața de undă  $l(\mathbf{r}) = \text{const.}$ , în punctul  $\mathbf{r}$ , deci tangent la raza undei. Aceasta înseamnă că vectorul  $\nabla l(\mathbf{r})$  este paralel cu versorul  $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  al tangentei la rază, așa încît, avînd în vedere ecuația eiconalului (7.8.10), se poate scrie egalitatea

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla l(\mathbf{r}) \quad (7.8.12)$$

Această relație reprezintă *ecuația vectorială a razei*. În general, este util să scriem ecuația (7.8.12) și sub altă formă, care se obține prin derivarea în raport cu  $s$  a acestei ecuații. Prin transformări simple, în care se va ține seama de ecuația eiconalului rezultă

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla l) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}} (\nabla l) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \nabla (\nabla l)$$

sau

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} \nabla l \cdot \nabla (\nabla l) = \frac{1}{2n} \nabla [(\nabla l)^2] = \nabla n(\mathbf{r})$$

deci

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{r}). \quad (7.8.13)$$

Din această ecuație imediat rezultă că în mediile optice omogene, pentru care  $n(\mathbf{r}) = \text{const.}$ , raza de lumină este rectilie. Într-adevăr, întrucît în acest caz  $\nabla n = 0$ , din (7.8.13) se obține ecuația

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0 \quad (7.8.14)$$

ale cărei soluții sînt dreptele

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 \cdot s + \mathbf{a}_2 \quad (7.8.15)$$

$\mathbf{a}_1$  și  $\mathbf{a}_2$  fiind vectori constanți, determinați de condițiile inițiale ale problemei.

Este de asemenea ușor de arătat că raza de lumină reprezintă în același timp și direcția de propagare a energiei luminoase; cu alte cuvinte că vectorul intensitate luminoasă  $\mathbf{I}$  este mereu tangent la raza de lumină.



Deci, în aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ , energia luminoasă se propagă în lungul razei de lumină.

Într-adevăr, ținând cont că vectorul intensitate energetică  $\mathbf{I}_e$  al unei unde este dat de media în timp a vectorului Poynting  $\mathbf{S}_P$ , pentru unda plană luată în considerație se va putea scrie

$$\mathbf{I}_e = \langle \mathbf{S}_P \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*. \quad (7.8.16)$$

Dar, din prima ecuație (7.8.8) rezultă

$$\mathbf{H}_0^* = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_0^* \times \nabla l(\mathbf{r}) \quad (7.8.17)$$

și deci

$$\mathbf{I}_e = \frac{1}{2c\mu_0} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{E}_0^* \times \nabla l) = \frac{1}{2c\mu_0} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \cdot \nabla l. \quad (7.8.18)$$

Potrivit relației (6.3.16), mărimea

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (7.8.19)$$

reprezintă densitatea volumetrică a energiei electrice, așa încît dacă se ia în considerație și energia magnetică  $\langle w_B \rangle$  a undei \*, expresia (7.8.18) va primi forma

$$\mathbf{I}_e = \frac{1}{c\mu_0 \varepsilon_0} \langle w_E \rangle \cdot \nabla l = \frac{c}{n^2} \langle w_E \rangle \cdot \nabla l. \quad (7.8.20)$$

Înlocuind aici

$$n = |\nabla l|; \quad \boldsymbol{\tau} = \nabla l / |\nabla l| \quad (7.8.21)$$

se obține

$$\mathbf{I}_e = \frac{c}{n} \langle w_E \rangle \boldsymbol{\tau} = v \langle w_E \rangle \boldsymbol{\tau} = I_e \boldsymbol{\tau} \quad (7.8.22)$$

unde

$$I_e = v \langle w_E \rangle \quad (7.8.23)$$

reprezintă intensitatea energetică definită în sens fotometric (vezi § 7.2.)  
Rezultatul de mai sus (7.8.23) ne arată că la suprapunerea într-un punct a două raze de lumină, acțiunile lor luminoase se cumulează și deci

$$I = I_1 + I_2. \quad (7.8.24)$$

\* Se arată ușor că în aproximația  $\lambda \rightarrow 0$ ;  $\langle w_E \rangle = \langle w_B \rangle$ .



Această concluzie reprezintă o lege fundamentală a opticii geometrice și este cunoscuta lege a independenței razelor de lumină.

b) **Principiul lui Fermat.** Este interesant de remarcat că legile opticii geometrice pot fi deduse dintr-un principiu variațional, la fel cum legile mecanicii clasice derivă din astfel de principii (principiul minimei acțiuni (1.6.11), de exemplu). Acest fapt dezvăluie analogia dintre optica geometrică și mecanica clasică, fapt remarcat de altfel și § 1.6.

Pentru a înțelege semnificația și importanța deosebită a principiului lui Fermat, să observăm că din ecuația razei de lumină (7.8.12) rezultă o consecință importantă cu privire la drumul optic  $l(\mathbf{r})$ . Astfel, prin înmulțirea vectorială la stînga cu operatorul  $\nabla$  a acestei ecuații și luarea în seamă a faptului că  $\nabla \times (\nabla l) \equiv 0$ , se obține

$$\nabla \times \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla \times (n\boldsymbol{\tau}) = 0. \quad (7.8.25)$$

Pe baza teoremei lui Stokes însă, se poate scrie

$$\iint \nabla \times (n\boldsymbol{\tau}) \cdot d\mathbf{S} = \oint n ds = 0 \quad (7.8.26)$$

din care rezultă

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = l(P_2) - l(P_1) \quad (7.8.27)$$

ceea ce înseamnă că valoarea drumului optic între două puncte  $P_1$  și  $P_2$  ale unui mediu optic nu depinde de lungimea drumului geometric dintre aceste puncte (drumul optic este o diferențială totală exactă în raport cu coordonatele de poziție).

Potrivit principiului lui Fermat, raza de lumină străbate însă acel drum geometric, căruia îi corespunde un drum optic minim. De aceea, acest principiu este cunoscut și sub numele de *principiul drumului optic minim*, importanța lui pentru optica geometrică fiind analoagă celei pe care o are principiul minimei acțiuni pentru mecanica clasică.

Matematic, principiul lui Fermat se poate scrie sub următoarea formă variațională

$$\delta \left[ \int_{P_1}^{P_2} n ds \right] = 0 \quad (7.8.28)$$

din care rezultă de fapt că pentru raza de lumină, drumul optic are o valoare extremă (minimă, maximă sau staționară).

Valorile extreme ale drumului optic se obțin din condițiile

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial z} = 0. \quad (7.8.29)$$



Aplicarea acestor condiții în studiul unor fenomene de optică geometrică (reflexie, refracție) devine un simplu exercițiu de calcul. Spre exemplificare, se expune în continuare tratarea refracției razelor de lumină cu ajutorul principiului lui Fermat.

Fie  $P_1(0, y_1, z_1)$  punctul în care o rază de lumină incidentă (fig. 7.8.2) intersectează planul  $yOz$ , se refractă apoi la limita plană de separație dintre două medii (planul  $xOy$ ) în punctul  $P(x, y, 0)$  și intersectează din nou planul  $xOz$ , în  $P_2(0, y_2, z_2)$ . Atunci, admitînd că cele două medii sînt izotrope ( $n_1 = \text{const.}$ ,  $n_2 = \text{const.}$ ) avem

$$\begin{aligned} l(x, y) &= n_1 s_1 + n_2 s_2 = \\ &= n_1 \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2} + \\ &+ n_2 \sqrt{x^2 + (y_2 - y)^2 + z_2^2} \end{aligned} \quad (7.8.30)$$

și deci

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{n_1 x}{s_1} + \frac{n_2 x}{s_2} = x \left[ \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} \right] = 0; \Rightarrow x = 0 \quad (7.8.31)$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = n_1 \frac{y - y_1}{s_1} - n_2 \frac{y_2 - y}{s_2}. \quad (7.8.32)$$

Prima condiție (7.8.31) arată că dacă raza incidentă și raza refractată întrepătrund planul  $yOz$  atunci ele se vor găsi în întregime în acest plan, adică vor fi coplanare cu normala la planul de separație în punctul de incidență. A doua condiție (7.8.32) ne conduce la cunoscuta lege a refracției

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r. \quad (7.8.33)$$

În mod analog se pot obține și legile reflexiei. De notat, însă, că dacă se are în vedere că la reflexie unghiul de incidență este egal cu cel de reflexie și se privește reflexia ca un caz particular al refracției, cînd  $\angle r = \pi - \angle i$  (fig. 7.8.2), atunci din (7.8.33) rezultă că pentru reflexie trebuie să luăm în această lege

$$n_1 = -n_2 \quad (7.8.34)$$

c) **Teorema Malus-Dupin.** Este o consecință directă a principiului lui Fermat și stabilește că razele unui fascicul homocentric divergent (fascicul de raze ce pleacă dintr-un singur punct obiect  $O$ ; fig. 7.8.3), care sînt

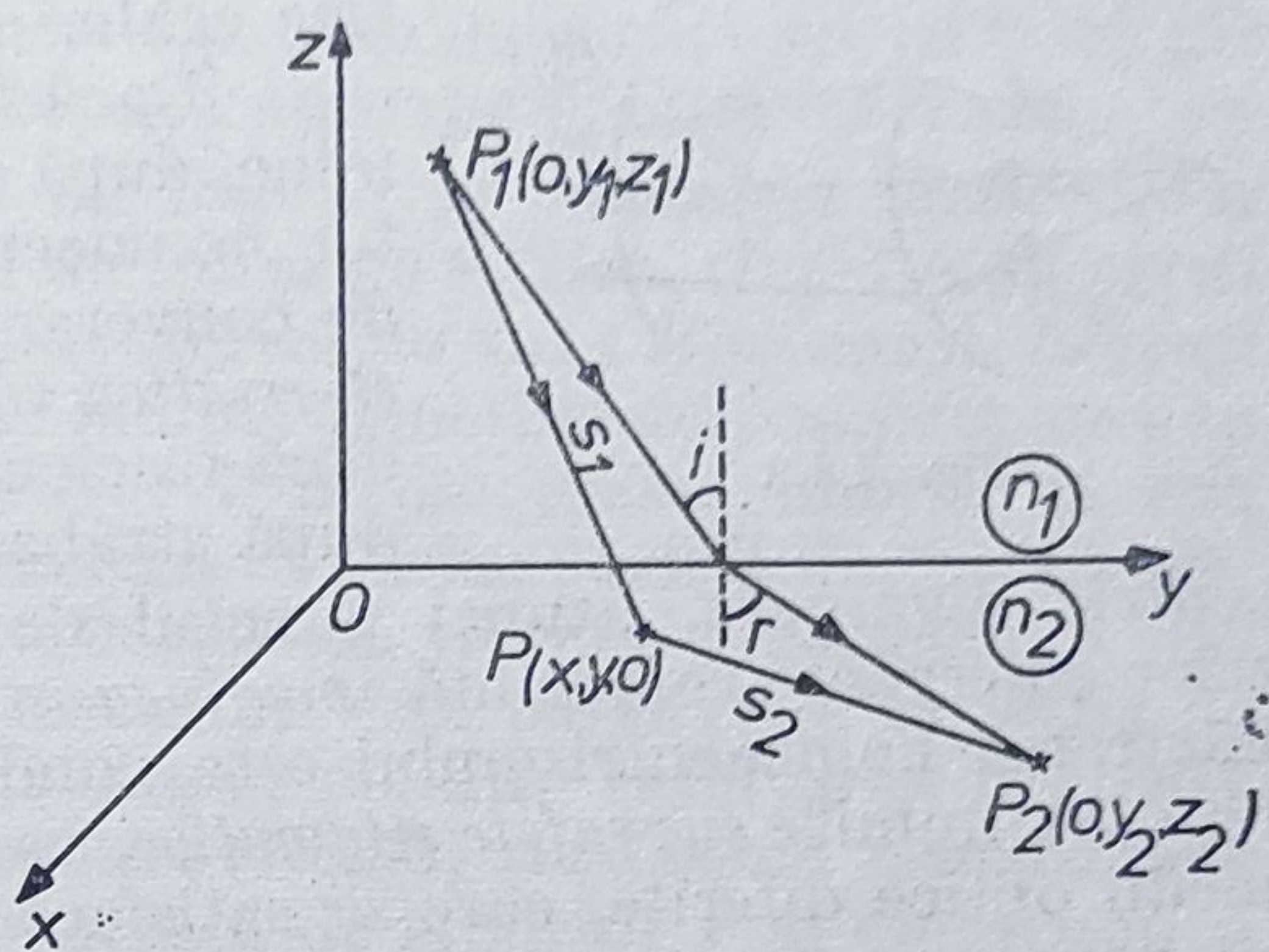


Fig. 7.8.2



normale la o suprafață sferică ( $S_0$ ) cu centrul în  $O$  și deci care formează o congruență normală își păstrează această congruență și după un anumit număr de reflexii și refracții, adică rămâne normal la o anumită suprafață ( $S_i$ ). De fapt, aceste suprafețe ( $S_i$ ) sînt suprafețele de undă și deci teorema

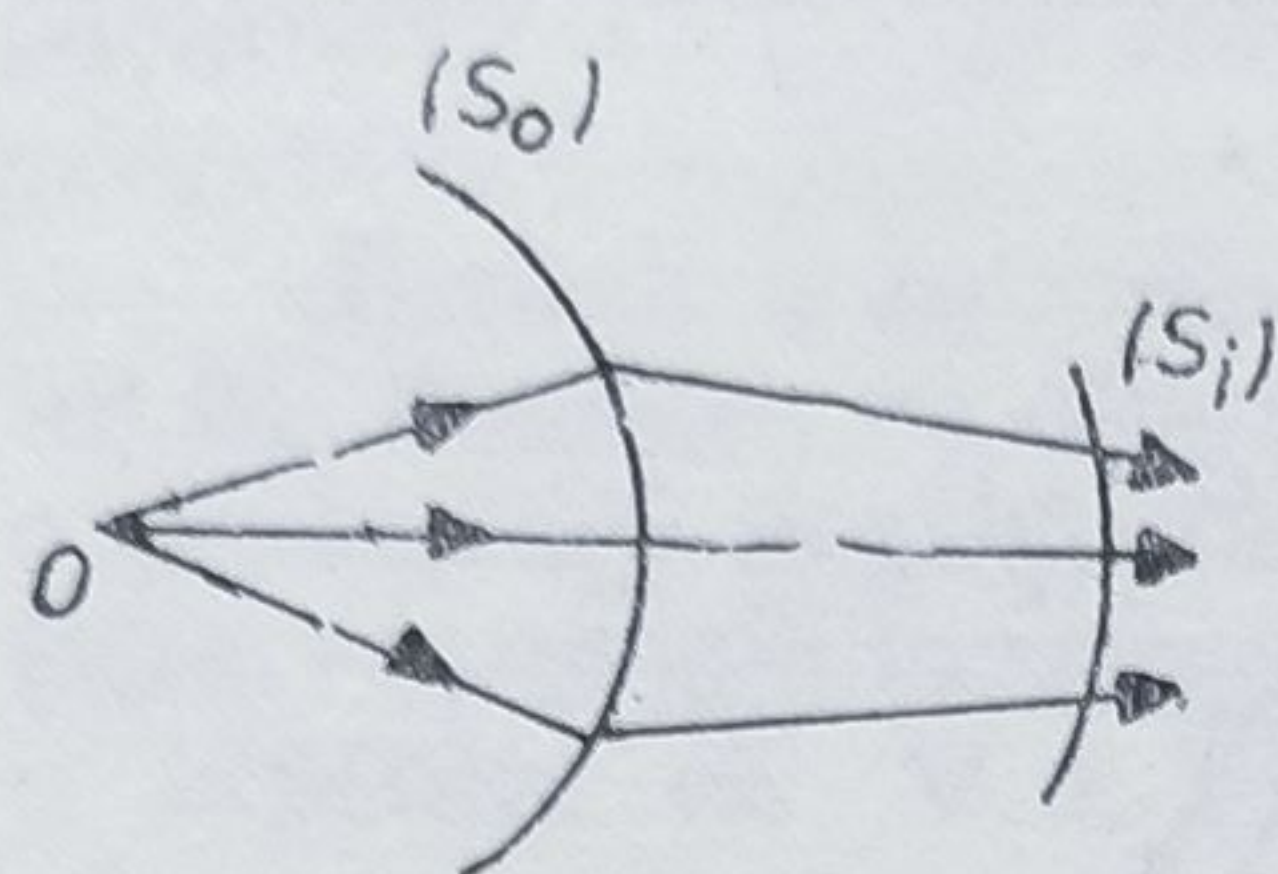


Fig. 7.8.3

lui Malus-Dupin ne arată că între două suprafețe de undă, razele de lumină străbat drumuri optice egale.

Dacă fasciculul homocentric divergent rămîne, după străbaterea mai multor medii optice, tot homocentric dar convergent, atunci punctul de convergență  $I$  al razelor, reprezintă *imaginea stigmatică reală* a obiectului  $O$  (fig. 7.8.4), iar dacă fasciculul homocentric divergent rămîne după străbaterea mediilor optice tot homo-

centric divergent, atunci punctul de convergență  $I'$  al prelungirilor razelor emergente reprezintă *imaginea stigmatică virtuală* a obiectului  $O$ . Păstrarea homocentrismului este condiționată de prezența unor suprafețe ( $S$ ), numite *suprafețe stigmatice*, ca limite de separație dintre două medii optice diferite, care să satisfacă teoremei lui Malus-Dupin, adică să păstreze congruența fascicului. De exemplu, pentru cazul a două medii izotrope de indici de refracție  $n_1$  și  $n_2$  (fig. 7.8.5), suprafața de separație ( $S_i$ ) va fi stigmatică, dacă satisface condiția

$$n_1 \cdot OA + n_2 \cdot AI = \text{const.} \quad (7.8.35)$$

oricare ar fi poziția punctului  $A$  pe ( $S_i$ ).

Suprafețele de separație a două medii optice care satisfac condiția (7.8.35) sînt cunoscute sub denumirea de „ovale ale lui Descartes”. Ele au în general forme geometrice complicate, greu de realizat practic. Mediile optice (sticlele optice de exemplu) se delimitează de regulă prin suprafețe ( $S$ ) mai simple, de formă plană, sferică, parabolică etc. Aceste medii însă nu mai păstrează homocentrismul fascicului de raze emergente, deci

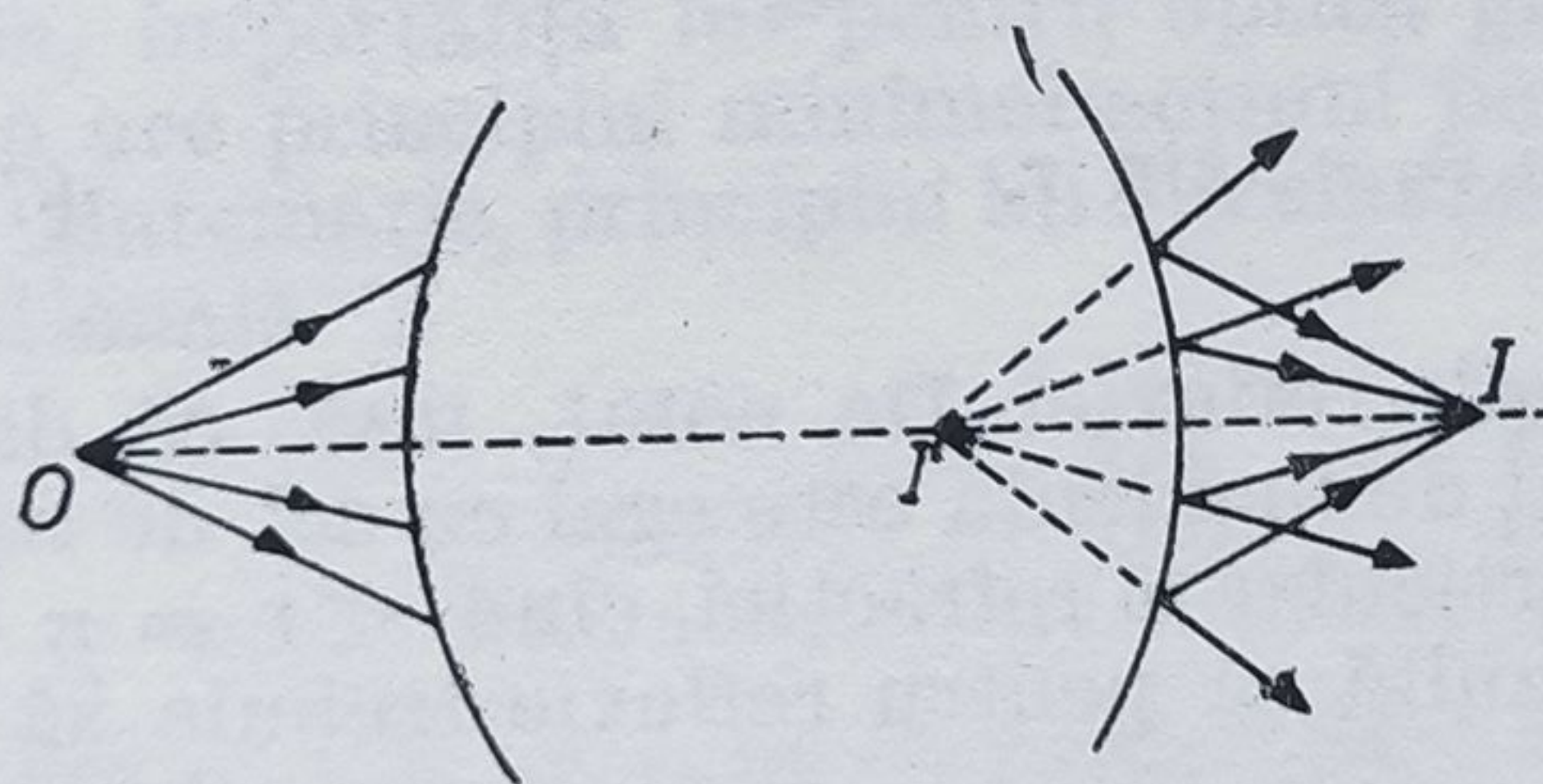


Fig. 7.8.4

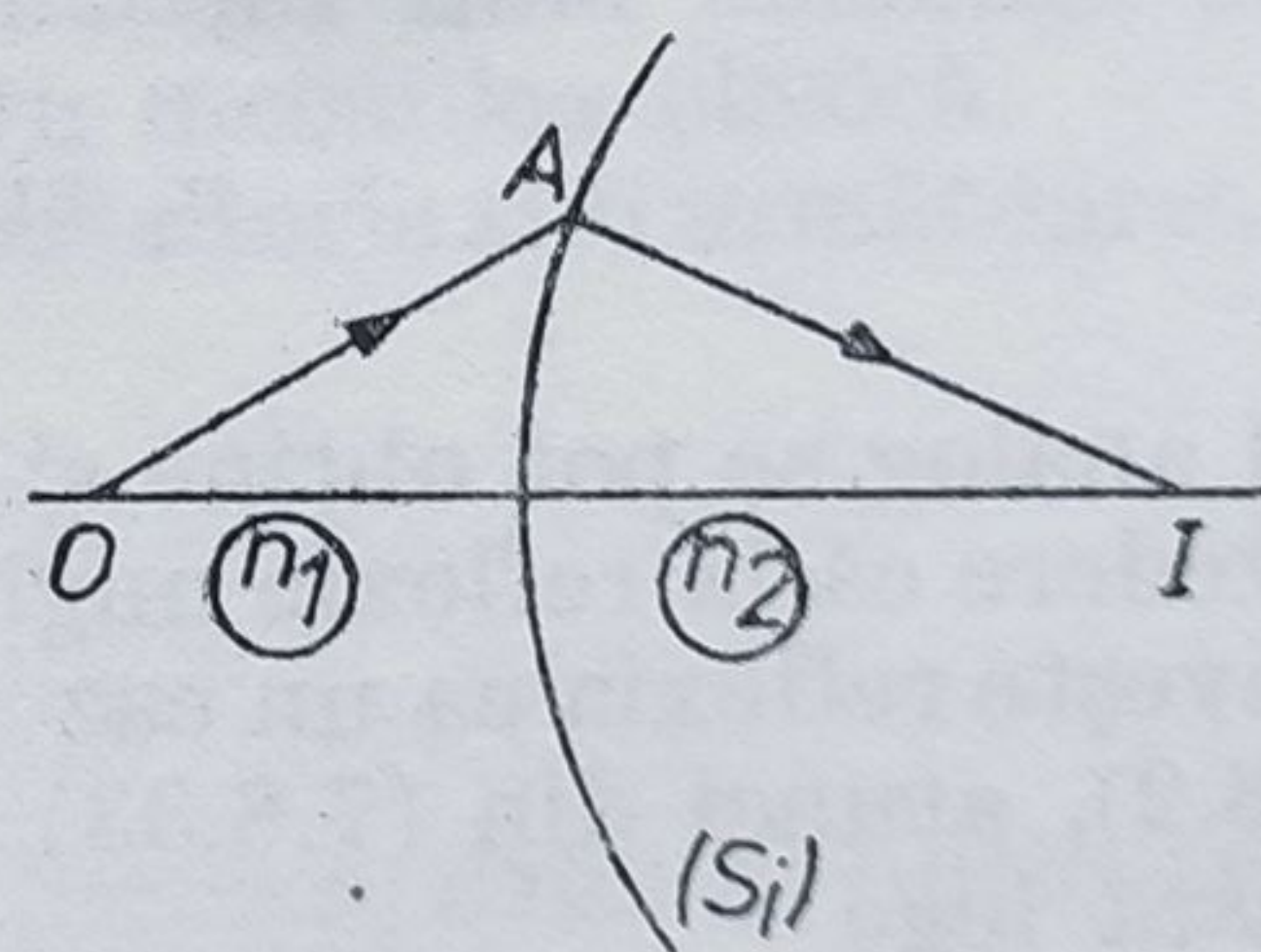


Fig. 7.8.5

aceste suprafețe nu mai sînt riguros stigmatice. Înseamnă că cu astfel de suprafețe, despre un obiect punctual  $O$  nu se va mai obține o imagine punctuală  $I$ , ci una volumetrică, sistemul numindu-se în acest caz astigmatic. Se poate demonstra geometric că dacă se iau în considerație separat razele



incidente ale unui fascicul homocentric, conținute în secțiunile principale ale suprafeței ( $S$ ), atunci razele emergente se vor reîntîlni după două linii drepte  $F_1$  și  $F_2$  (normale una pe alta), numite *focalele lui Sturm*, imaginea lui  $O$ , ocupînd practic volumul dintre aceste focale.

De multe ori însă este satisfăcător din punctul de vedere al calității imaginii și un sistem *aproximativ stigmatic*, în care caz imaginea volumetrică  $I$  este de dimensiuni foarte reduse. Așa stau lucrurile pentru fascicule puțin divergente, în care razele se propagă aproape paralel între ele.

d) **Reflexia și refracția razelor de lumină pe suprafețe sferice.** Fie două medii optice izotrope, de indici de refracție  $n_1$  și  $n_2$  (fig. 7.8.6), separate între ele printr-o suprafață (calotă) sferică de rază  $R = \text{const.}$  (sistem numit *dioptru sferic*) și fie  $O$  sursa de lumină punctiformă, așezată pe axa care unește centrul  $C$  al sferei cu vîrful  $V$  al dioptrului, numită și *axă optică principală a dioptrului*. Vom încerca să găsim poziția imaginii aproximativ stigmatice  $I$ , dată de dioptru în ipoteza că razele fasciculului sînt puțin înclinate față de axa optică (fasciculul este paraaxial). O astfel de aproximație, numită *aproximația lui Gauss*, permite rezolvarea imediată a problemei, plecînd de la legea refracției (7.8.33) și folosind următoarele „reguli ale semnelor”: lungimile se măsoară de la vîrful  $V$  al dioptrului și vor fi pozitive dacă acest sens de măsură coincide cu sensul de propagare al razei și negative în caz contrar; lungimile orientate normal pe axa optică se iau pozitive dacă se găsesc deasupra axei optice și negative în cazul cînd se găsesc sub această axă; unghiurile se măsoară față de axa optică (sau față de normala la ( $S$ )) și sînt pozitive dacă se măsoară în sens orar și negative în caz contrar.

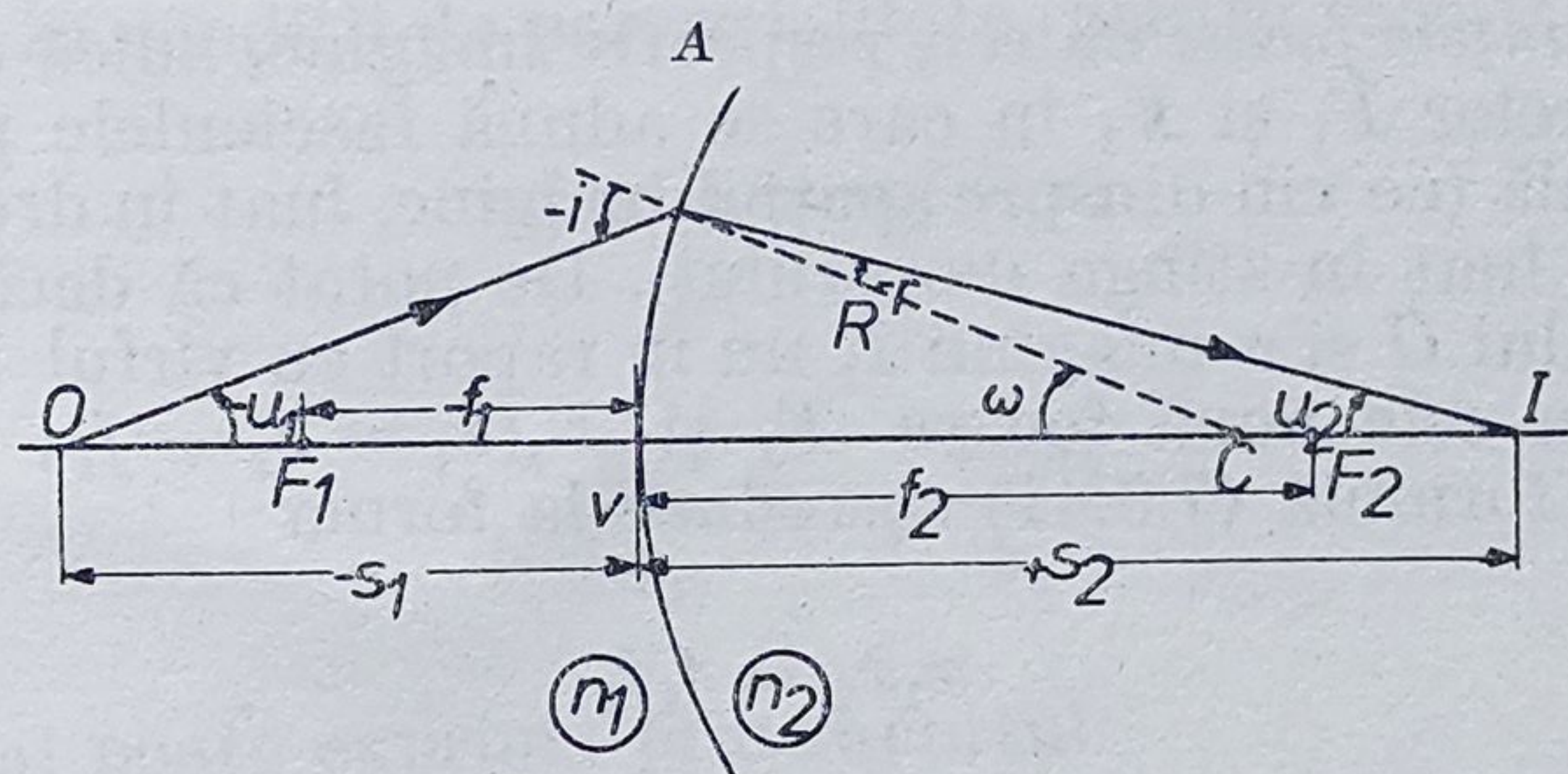


Fig. 7.8.6

Cu condițiile de mai sus și în aproximația fasciculelor paraaxiale, putem scrie relația (7.8.33) sub forma

$$n_1(-i) = n_2(-r). \quad (7.8.36)$$

Dar, din triunghiurile  $OAC$  și  $ACI$  rezultă (fig. 7.3.6)

$$-i = \omega - u_1; \quad -r = \omega - u_2 \quad (7.8.37)$$



și deci

$$n_1(\omega - u_1) = n_2(\omega - u_2). \quad (7.8.38)$$

Cum unghiurile  $\omega$ ,  $u_1$  și  $u_2$  sînt de valori mici, avem

$$\operatorname{tg}(-u_1) \simeq -u_1 = \frac{h}{-s_1}; \quad \operatorname{tg}u_2 \simeq u_2 = \frac{h}{s_2}; \quad \operatorname{tg}\omega \simeq \omega = \frac{h}{R} \quad (7.8.39)$$

aproximații care introduse în (7.8.38) conduc la o expresie invariantă de forma

$$Q = n_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s_1} \right) \equiv n_2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s_2} \right) \quad (7.8.40)$$

numită și *invariant Abbé de ordin zero*.

Se vede că cu (7.8.39), din (7.8.38) rezultă relațiile

$$-\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{sau} \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1 \quad (7.8.41)$$

cunoscute ca *formule ale dioptrului sferic\**. În a doua expresie (7.8.41) mărimile

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2}; \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \quad (7.8.42)$$

reprezintă *distanțele focale* obiect, respectiv imagine, adică depărtările față de  $V$  ale focarelor  $F_1$  și  $F_2$  în care se adună fasciculele paralele cu axa optică principală (ce vin dinspre spațiul imagine, luat în dreapta și dinspre spațiul obiect, luat în stînga dioptrului). De notat că dacă se marchează poziția obiectului  $O$  și a imaginii  $I$ , nu în raport cu vârful  $V$  al dioptrului, ci în raport cu cele două focare  $F_1$  și  $F_2$  ( $x_1 = s_1 - f_1$ ;  $x_2 = s_2 - f_2$ ), atunci a doua formulă (7.8.41) se reduce la forma

$$x_1 x_2 = f_1 f_2 \quad (7.8.43)$$

fiind cunoscută ca *formula lui Newton*.

Trecerea de la dioptrul sferic la oglinda sferică se va face imediat, folosind condiția (7.8.34). Se va obține formula

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad (7.8.44)$$

$f = \frac{R}{2}$  reprezentînd distanța focală a oglinzii.

---

\* Formula dioptrului plan se obține din prima expresie (7.8.41) făcînd  $R \rightarrow \infty$



De remarcat că un dioptru sferic este aproximativ stigmatic nu numai pentru obiecte punctiforme așezate pe axa optică, ci și pentru obiecte luminoase plane, de dimensiuni mici, situate normal la axa optică principală. De exemplu, în cazul unui obiect luminos liniar, de lungime  $h_1$  ( $h_1 \ll R$ ,

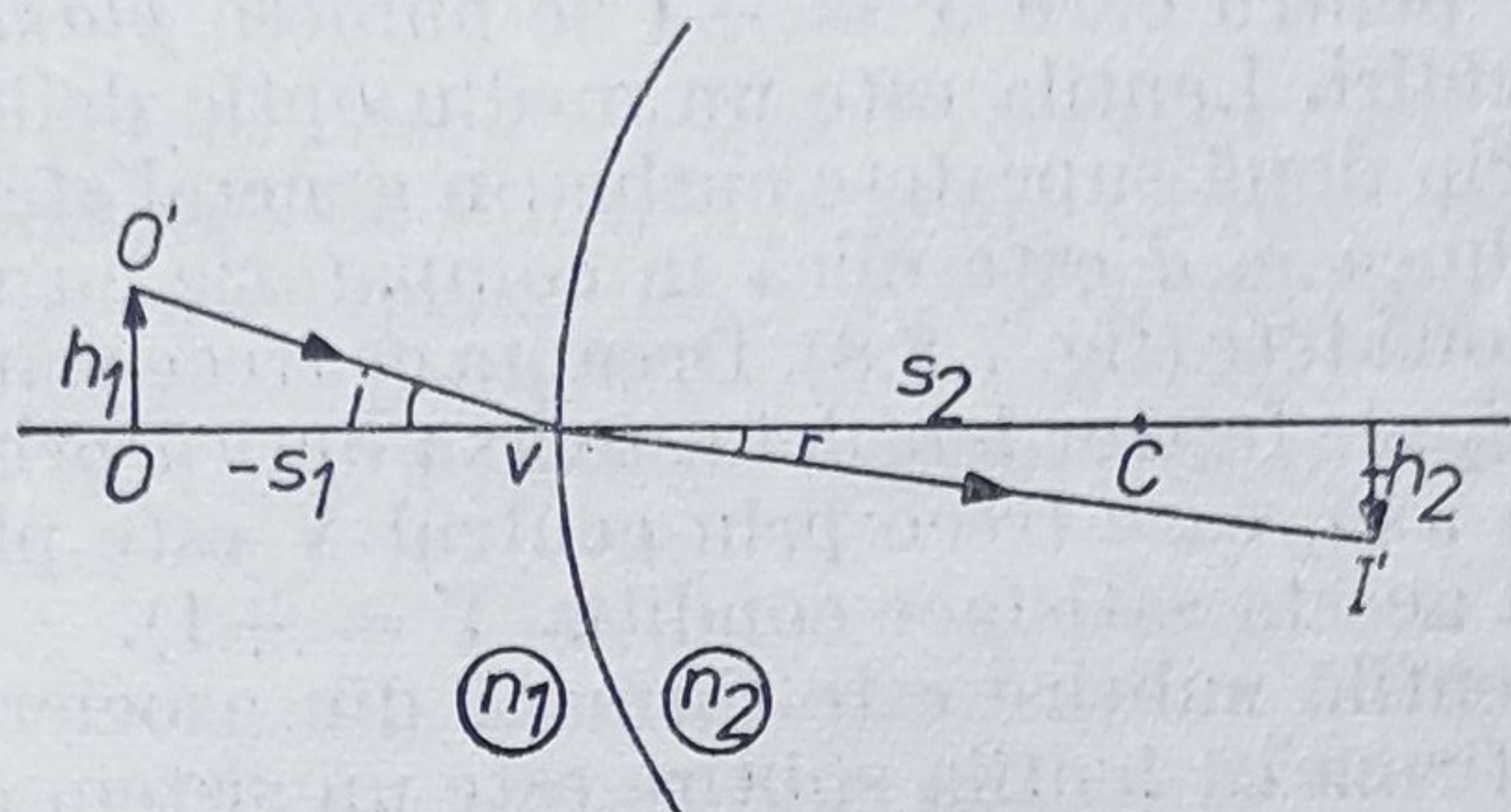


Fig. 7.8.7

$s_1, s_2$ ) se va obține o imagine liniară de lungime  $h_2$  și răsturnată (fig. 7.8.7). Raportul

$$Y = \pm \frac{h_2}{h_1} \quad (7.8.45)$$

poartă numele de *mărire transversală* (pentru  $Y \geq 0$ , imaginea va fi nerăsturnată, respectiv răsturnată). Dacă se ține seama de legea refracției (7.8.33), atunci în condiții de paraaxialitate, pentru raza  $O'VI'$  avem

$$n_1(-i) = n_2(-r)$$

respectiv

$$n_1 \frac{h_1}{-s_1} = n_2 \frac{-h_2}{s_2}$$

și deci  $Y$  se mai poate exprima prin raportul

$$Y = \pm \frac{h_2}{h_1} = \pm \frac{n_1 s_2}{n_2 s_1} \quad (7.8.46)$$

În sfârșit, ținându-se cont de primele două condiții (7.8.39), din (7.8.46) rezultă că astigmatismul aproximativ este realizat dacă este satisfăcută egalitatea

$$n_1 h_1 u_1 = n_2 h_2 u_2. \quad (7.8.47)$$

Acest rezultat este cunoscut sub numele de *teorema Lagrange-Helmholtz*.



Se constată ușor că există o perfectă corespondență între toate punctele din planul obiect  $h_1$  și cele din planul imagine  $h_2$ , cu alte cuvinte planele obiect și imagine, sînt plane conjugate între ele. Aceasta înseamnă că dacă obiectul luminos se plasează în locul imaginii, imaginea se va forma în locul obiectului, existînd o perfectă reversibilitate în mersul razelor de lumină. Planele conjugate pentru care  $Y = +1$  se numesc *plane principale*.

e) **Lentile subțiri.** Lentila este un mediu optic delimitat față de un alt mediu optic prin două suprafețe curbe (în general sferice). Lentila este subțire dacă grosimea ei  $d$  este mică în comparație cu razele de curbură  $R_1$  și  $R_2$  ale celor două fețe (fig. 7.8.8). Dreapta ce trece prin cele două centre de curbură  $C_1$  și  $C_2$  ale fețelor lentilei este axa optică principală iar planul normal la această axă, care trece prin centrul  $V$  este planul principal al lentilei (pentru că acesta satisface condiția  $Y = +1$ ).

Întrucît o lentilă subțire este formată din asocierea a doi dioptrii sferici, se poate afirma că lentila subțire este un sistem aproximativ stigmatic pentru fascicule de lumină paraaxiale. În acest caz, imaginea dată de lentilă poate fi construită admitînd că imaginea  $I'$  dată de primul dioptru reprezintă obiect pentru al doilea, iar imaginea  $I$  dată de către acesta este în același timp imaginea dată de lentilă. Conform expresiei (7.8.41) putem deci scrie

$$-\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}; \quad -\frac{n_2}{s'_2} + \frac{n_1}{s_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (7.8.48)$$

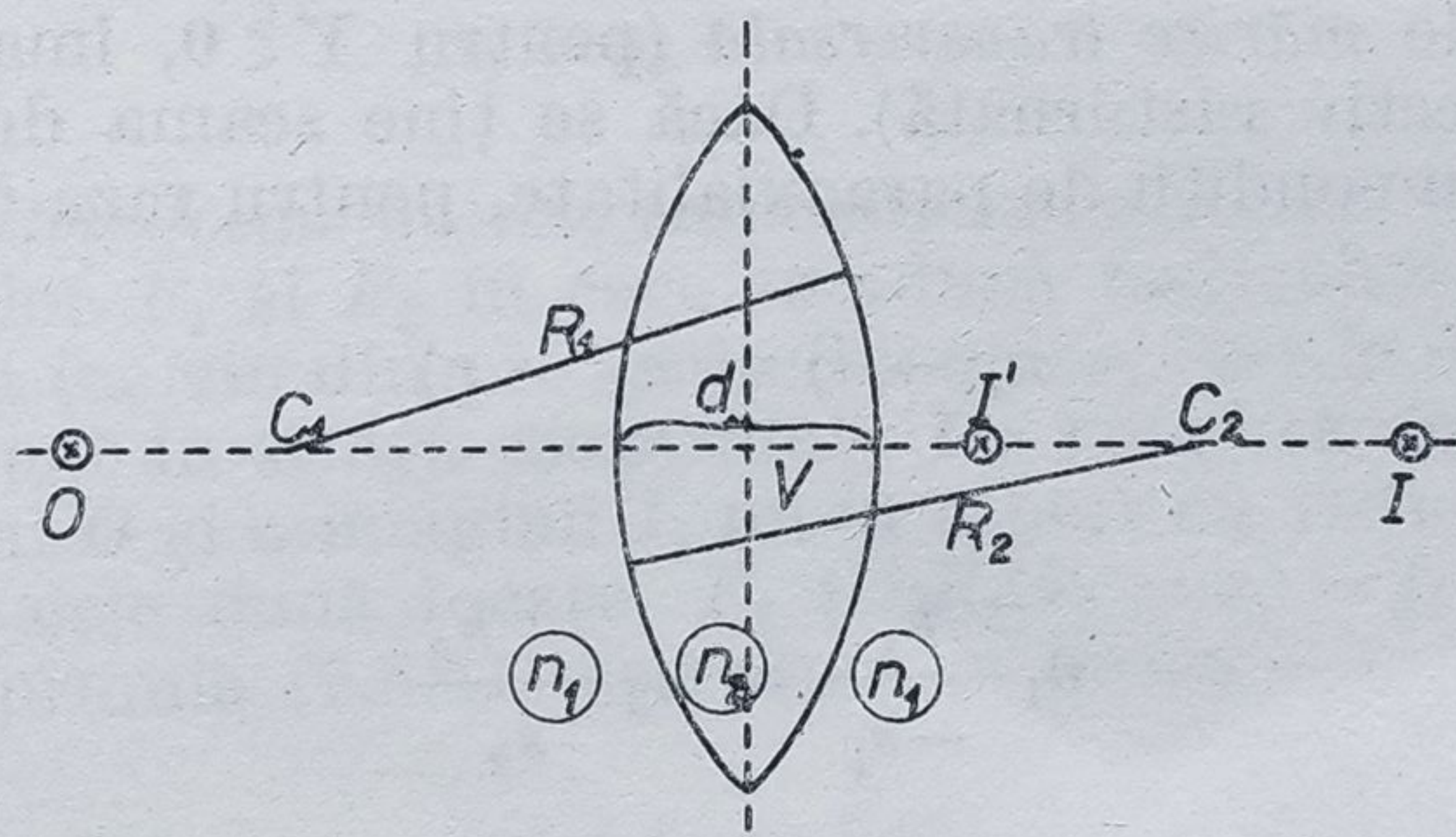


Fig. 7.8.8

Făcînd suma celor două expresii, obținem

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right); \quad n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (7.8.49)$$

expresie care reprezintă *formula lentilelor subțiri*. Din această formulă se observă că pentru un obiect situat la infinit ( $s_1 = -\infty$ ), imaginea se formează în focarul imagine  $F_2$ , situat la distanță focală

$$\frac{1}{f_2} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (7.8.50)$$



În mod analog, pentru un obiect așezat în focarul obiect  $F_1$ , imaginea se va forma la infinit ( $s_2 = \infty$ ), rezultând că în cazul lentilelor subțiri focarele sînt situate echidistant față de lentilă, adică

$$f_1 = f_2 \quad (7.8.51)$$

Lentila este convergentă dacă  $f > 0$  și divergentă dacă  $f < 0$ . Pentru cazul cînd  $n_2 > n_1$ , se observă că sînt convergente lentilele biconvexe, plan convexe și meniscurile convergente ( $R_2 > R_1$ ) și divergente lentilele biconcave, plan concave și meniscurile cu  $R_2 < R_1$ .

Cu (7.8.50) și (7.8.51), formula lentilei (7.8.49) primește forma

$$\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{|f|}. \quad (7.8.52)$$

Mărimea

$$\mathcal{C} = \frac{1}{f} \quad (7.8.53)$$

reprezintă *puterea optică a lentilei* și se exprimă în dioptrii ( $f$  fiind luat în metri).

În instrumentele optice se folosește adesea asociații de lentile subțiri, lipite între ele. Puterea dioptrică a unei astfel de asociații este dată de suma algebrică

$$\mathcal{C} = \sum_i \mathcal{C}_i. \quad (7.8.54)$$

f) **Aparate optice.** Sînt sisteme formate din diverse medii optice (lentile, oglinzi, dioptri etc.), cu ajutorul cărora se obțin imagini plane despre corpuri iluminate. Aproape toate aparatele optice formează imagini mărite în comparație cu obiectul, respectiv unghiul  $u'$  sub care se vede imaginea dată de aparat este mai mare decît unghiul  $u$  sub care se vede obiectul cu ochiul liber.

Mărimea

$$\mathcal{M} = \frac{\operatorname{tgu}'}{\operatorname{tgu}} \quad (7.8.55)$$

se numește *grosismant* sau *putere de mărire* a aparatului. Astăzi există o mare varietate de aparate optice. Majoritatea sînt formate din combinarea a două sisteme optice: un obiectiv și un ocular, montate în tuburi cilindrice care delimitează un anumit fascicul incident de lumină (prin pupila de intrare, vezi fig. 7.8.9).

Principalele clase de aparate optice sînt: telescoapele, microscopurile, aparatele de proiecție și lupele. Telescoapele (inclusiv lunetele),



sînt sisteme la care planul focal imagine al obiectivului coincide cu planul focal obiect al ocularului. Despre obiecte situate la infinit, aceste sisteme dau imagini mărite de

$$\mathcal{M} = \frac{f_1}{f_2} \quad (7.8.56)$$

ori ( $f_1$  fiind distanța focală a obiectivului, iar  $f_2$  a ocularului.)

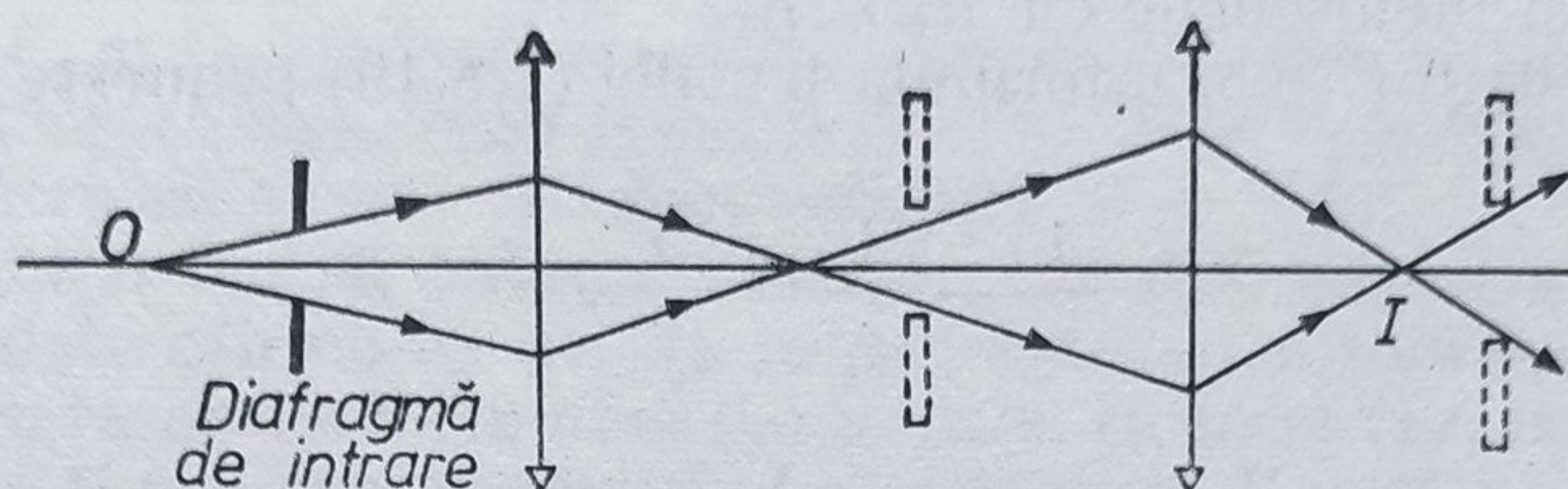


Fig. 7.8.9

Microscoapele sînt de asemenea sisteme formate din obiectiv și ocular, dar la care cele două plane focale sînt distanțate între ele (cu valoarea  $\Delta$ ). Obiectul este plasat lângă planul focal obiect al obiectivului, care va da o imagine reală, mărită și inversată, observabilă prin ocular. Puterea de mărire a microscopului este dată de expresia

$$\mathcal{M} = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{D}{f_2} \quad (7.8.57)$$

$D$  fiind distanța minimă a vederii optime ( $D = 0,25$  m).

Aparatele de proiecție sînt sisteme optice care formează imagini reale mărite (sau micșorate în cazul aparatelor de fotografiat). În sfîrșit, lupele sînt formate din una sau mai multe lentile lipite, cu distanța focală scurtă, care așezate în așa fel încît obiectul de observat să se găsească în planul lor focal, vor da o imagine virtuală și mărită pe retina ochiului observatorului. În acest caz

$$\mathcal{M} = \frac{D}{f}. \quad (7.8.58)$$

Desigur că în studiul aparatelor optice intervin și alte probleme, legate de performanțele acestora (putere de separare, corectarea aberațiilor, luminozitatea etc), care pot fi găsite în tratate de specialitate [41, 64].



## BIBLIOGRAFIE

1. AGÂRBICEANU, I., *Lumina polarizată și aplicațiile ei în știință și tehnică*, Ed. tehnică, București, 1956.
2. AIZERMAN, M. A., *Klasiceskaia Mehanika*, Nauka, Moskva, 1974.
3. ARFKEN, G., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 1965.
4. ASTAHOV, A. V., *Kurs fiziki*, Tom I, Nauka, Moskva, 1977.
5. ARȚIMOVICI, L. A., SAGDEEV, R. E., *Fizica plasmi dlia fizikov*, Nauka, Moskva, 1979.
6. BAZAROV, I. P., *Termodinamica*, Ed. tehnică, București, 1969.
7. BĂDĂRĂU, E., POPESCU, I., *Gaze ionizate*, Ed. tehnică, București, 1963.
8. BALESCU, R., *Equilibrium and Non Equilibrium Statistical Mechanics*, J. Willey, New-York, 1975.
9. BĂRBULESCU, N., *Fizica moleculară și căldura*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
10. BORN, M., WOLF, W., *Osnovî optik*, Nauka, Moskva, 1970.
11. BRĂTESCU, G., *Interferometrie aplicată*, Ed. tehnică, București, 1963.
12. BURZO, E., *Fizica fenomenelor magnetice*, vol. I, Ed. Acad. R.S.R., 1979.
13. CIOBANU, Gh., *Termodinamică și fizică statistică. Partea I : Termodinamica*. Univ. București, 1971.
14. CRISTESCU, C., *Fizica (Electromagnetism, unde electromagnetice, optică)*, Institutul politehnic, București, 1979.
15. BÎKO, L., ș.a., *Tehnica și arta fotografică*, Ed. tehnică, București, 1961.
16. DRĂGAN, M., *Introducere matematică în fizica teoretică modernă*, vol. 1, 2, Ed. tehnică, București, 1957.
17. FEYNMAN, R. P., *Fizica modernă*, vol. 1, 2, 3, Ed. tehnică, București, 1969, 1970.
18. FOCK, V., *Teoria spațiului, timpului și gravitației*. Ed. Acad. R.S.R., București, 1962.
19. FOWLER, J., *Introduction to Modern Optics*, J. Wiley, New York, 1968.
20. GABOȘ, Z., *Termodinamică fenomenologică*. Ed. Acad. R.S.R., București, 1959.
21. GABOȘ, Z., GHERMAN, O., *Termodinamica și fizica statistică*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1967.
22. GABOȘ, Z., MANGERON, D., STAN, I., *Fundamentele mecanicii*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1962.
23. GABOȘ, Z., STAN, I., *Curs de mecanică teoretică*, Univ. „Babeș-Bolyai”, Cluj-Napoca, 1974.
24. GHERMAN, O., SALIU, L., *Fizica statistică*, Ed. tehnică, București, 1976.
25. GHERMAN, O., *Révue d'Optique*, **40**, nr. 11, 1961, 547.
26. GIRIFALCO, L. A., *Statistical Physics of Materials*, J. Wiley, New York, 1973.
27. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Londra, 1951.
28. GOLUBEVA, O. V., *Teoreticeskaia mehanika*, Fizmatgiz, Moskva, 1976.
29. HEGHEDUȘ, E., *Introducere în optică*, vol. I și II, Univ. Timișoara, 1974.
30. IONAȘCU, N., *Fizica*, vol. 1, Univ. Brașov, 1980.
31. IONESCU-PALLAS, N., *Introducere în mecanica teoretică modernă*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1969.
32. INȚA, I., DUMITRU, S., *Fizica*, vol. I., Univ. Brașov, 1978.
33. INȚA, I., *Fizica*, vol. II, Univ. Brașov, 1980.
34. IOVA, I., *Elemente de optică aplicată*, Ed. științifică și enciclopedică, București, 1973.
35. JELUDEV, I. S., *Cristale electrice*, Ed. tehnică, București, 1973.
36. KOMPANEYETS, A. S., *A course of Theoretical Physics*, vol. 1, 2, Mir, Moscow, 1978.
37. KORN, G. A., KORN, T. M., *Mathematical Handbook (For Scientists and Engineers)*, Mc Graw-Hill Book Co., 1968.
38. LANDAU, L. D., LIFȘIȚ, E. M., *Mecanica*, Ed. tehnică, București, 1966.
39. LANDAU, L. D., LIFȘIȚ, E. M., *Electrodinamica mediilor continue*, Ed. tehnică, București, 1968.



40. LANDAU, L. D., LIFȘIȚ, E. M., *Teoria cimpului*, Ed. tehnică, București, 1963.
41. LANDSBERG, G. S., *Optika*, Mir, Moskva, 1976.
42. LEVICI, V. G., VDOVIN, LU. A., MIANLIN, V. A., *Kurs teoreticeskoi fiziki*, Tom II, Moskva, 1962.
43. LUCA, E. și col., *Fizica*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1976.
44. MOISIL, G. G., *Fizica pentru ingineri*, vol. 1 și 2, Ed. tehnică, București, 1967, 1968.
45. MIRDEL, G., *Electrofizika*, Mir, Moskva, 1972.
46. MIRASNIKOV, M. M., *Teoreticeskie osnovi optico-electronik priborov*, Leningrad, 1977.
47. MÜNSTER, A., *Statistical Thermodynamics*, vol. I, II, Springer Verlag, 1969, 1970.
48. MUNTEANU, G., *Curs de Fizică*, vol. I, Inst. Politehnic, Brașov, 1970.
49. MYSKIS, A. D., *Introductory Mathematics for Engineers*, Mir, Moscow, 1975.
50. MYSKIS, A. D., *Advanced Mathematics for Engineers*, Mir, Moscow, 1975.
51. NICULA, AL., *Electricitate și Magnetism*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1973.
52. NOVACU, V., *Electrodinamica*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1966.
53. OLIHOVSKII, I. I., *Kurs teoreticeskoi fiziki dlia fizikov*, Mir, Moskva, 1978.
54. OSTROVSKY, YU. I., *Holography and its Application*, Mir, Moscow, 1977.
55. OUGAROV, *Théorie de la relativité restreinte*, Mir, Moscou, 1974.
56. POPESCU, I. M., *Fizica*, (I), Ed. didactică și pedagogică, București, 1982.
57. POP, I., *Fizica moleculară și termodinamică*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1975.
58. PURCELL, E. M., *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course, vol. 2, Mc Graw Hill Book Co; traducerea în lb. rusă, Moskva, 1976.
59. RUMER, IU. B., RÎVKIN, M. S., *Termodinamika, Statisticeskaia Fizika*, Nauka, Moskva, 1977.
60. PUZÎREV, V. A., *Tonkie feromagnitnye plenki v radiotekhnicheskikh tsepiakh*, Nauka, Moskva, 1974.
61. SÎCEV, V. V., *Slojnye termodinamicheskie sistemy*, Moskva, 1970.
62. TAMM, I. E., *Osnovy teorii elektrichstva*, Nauka, Moskva, 1976.
63. TAREEV, B., *Physics of dielectric materials*, Mir, Moskva, 1975.
64. ȚINTEA, H., *Optică și Spectroscopie*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1972.
65. ȚIȚEICA, R., POPESCU, I., *Fizica generală*, vol. 1, 2, 3. Ed. tehnică, București, 1971, 1973, 1975.
66. ȚIȚEICA, Ș., *Elemente de fizică statistică*, Ed. tehnică, București, 1956.
67. ȚIȚEICA, Ș., *Curs de mecanică teoretică*, Univ. București, 1975.
68. ȚIȚEICA, Ș., *Curs de termodinamică*, Univ. București, 1976.
69. ULIU, F., *Optică și spectroscopie*, Univ. Craiova, 1975.
70. URSU, I., *Optică*, Univ. „Babeș-Bolyai”, Cluj, 1953.
71. URSU, I., *Efecte magnetomecanice la oxigen*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1959.
72. URSU, I., *Rezonanța electronică de spin*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1965.
73. VASIU, M., *Fizica teoretică*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
74. VASIU, M., *Electrodinamică și teoria relativității*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1979.
75. VONSOVSKI, S. V., *Magnetismul*, Ed. științifică și enciclopedică, București 1981.
76. VREJOIU, C., BURLACU, L., *Electrodinamica*, Partea I., Univ. București, 1975.
77. WERT, CH. A., THOMSON, R. M., *Physics of solids*, Ed. Mc Graw Hill, 1964.

Redactor : NATALIA FIUCIUC  
 Tehnoredactor : ELLY GORUN  
 Coperta : DANIEL NĂPĂRUȘ

Bun de tipar 18.II/982. Format 16/70 × 100. Coli de tipar 26. C.Z. pentru biblioteci mari 530(082). C.Z. pentru biblioteci mici 530.



C. 111 — I. P. „INFORMAȚIA”  
 Str. Brezoianu Nr. 23—25  
 București